

# Numeri Complessi

E' ben noto che non esiste alcun numero reale  $x$  tale che  $x^2 = -1$  o, equivalentemente, che l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  non ha soluzioni reali. Cosí come è possibile estendere i numeri razionali, introducendo i numeri reali, in modo che equazioni quali ad esempio  $X^2 - 2 = 0$  abbiano soluzioni è anche possibile estendere i numeri reali in modo che l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  abbia soluzioni. Il sistema di numeri a cui si perviene, i numeri complessi, ha proprietà molto interessanti, ad esempio ogni equazione algebrica ha soluzioni complesse.

**Definizione 1.** Nell'insieme  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  delle coppie ordinate di numeri reali definiamo una somma e un prodotto ponendo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

E' immediato verificare che queste operazioni sono commutative e associative e vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

Poiché per ogni numero complesso  $(a, b)$  si ha:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b) \quad \text{e} \quad (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

$(0, 0)$  è l'elemento neutro rispetto alla somma e  $(1, 0)$  è l'elemento neutro rispetto al prodotto. Inoltre si verifica subito che  $(-a, -b)$  è l'opposto di  $(a, b)$  e, se  $a$  e  $b$  non sono entrambi nulli,

$$(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

cioè  $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$  è l'inverso di  $(a, b)$ .

Introduciamo ora un'altra notazione per i numeri complessi che risulta particolarmente efficace per effettuare i calcoli. Siccome per ogni  $(a, b) \in \mathbb{C}$  si ha:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

identificando  $(a, 0)$  con  $a$ ,  $(b, 0)$  con  $b$  e posto  $i = (0, 1)$  possiamo esprimere un numero complesso nella forma

$$a + ib$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$  ed  $i \in \mathbb{C}$  è il numero complesso, detto *unità immaginaria*, tale che

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad .$$

Ciò significa che in  $\mathbb{C}$  il numero  $-1$  è un quadrato. Più in generale si ha:

**Proposizione 2** *Ogni numero complesso è un quadrato.*

*Dim.* Segue dall'uguaglianza

$$\left( \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{2}} \right)^2 = a + ib \quad .$$

□

**Definizione 3.** Dato un numero complesso  $z = a + ib$ , definiamo *parte reale*  $\text{Re}(z)$ , *parte immaginaria*  $\text{Im}(z)$ , *modulo*  $|z|$  e *norma*  $N(z)$  di  $z$  ponendo:

$$\text{Re}(z) = a \quad \text{Im}(z) = b$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2$$

Il numero  $\bar{z} = a - ib$  si dice *coniugato* di  $z$  e l'applicazione  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\sigma(z) = \bar{z}$  è detta *coniugio*.

**Proposizione 4** Valgono le seguenti proprietà:

1.  $\overline{\overline{z}} = z$ ;
2.  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ;
3.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ;
4.  $|\overline{z}| = |z|$ ;
5.  $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ;
6.  $z \in \mathbb{R}$  se e solo se  $z = \overline{z}$ ;
7.  $|z| = 0$  se e solo se  $z = 0$ .

*Dim.* Sono facili verifiche. □

**Proposizione 5** La somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono due numeri reali.

*Dim.* Se  $z = a + ib$ , si ha infatti:  $z + \overline{z} = 2a$  e  $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ . □

**Proposizione 6** Dati due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  si ha:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

*Dim.* Si ha:  $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$ .

Poiché  $z_1\overline{z_2}$  e  $\overline{z_1}z_2$  sono coniugati, la loro somma è il numero reale  $2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$ . Ma la parte reale di un numero complesso è minore o uguale al suo modulo, quindi

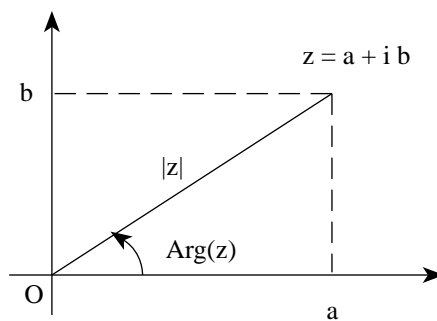
$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \leq 2|z_1 \cdot z_2| = 2|z_1| \cdot |z_2| .$$

Ne segue  $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$ . □

## Rappresentazione trigonometrica

Poiché un numero complesso è determinato da una coppia di numeri reali, possiamo rappresentare geometricamente un numero complesso con un punto di un piano dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Più precisamente associando al numero complesso  $a + ib$  il punto di coordinate  $(a, b)$  si ha una corrispondenza biunivoca tra numeri complessi e punti del piano. In questa situazione, quando cioè i punti sono identificati con numeri complessi il piano è detto *piano di Argand-Gauss*, l'asse  $x$  si dice *asse reale* e l'asse  $y$  *asse immaginario*.

Un numero complesso  $z$  è individuato nel piano di Argand-Gauss dal suo modulo  $\rho$  e, se  $z \neq 0$ , dalla rotazione antioraria  $\vartheta$  che il semiasse positivo reale deve compiere per sovrapporsi alla semiretta uscente dall'origine e che contiene  $z$ . La rotazione  $\vartheta$ , misurata in radianti, è definita a meno di multipli di  $2\pi$  e si chiama *argomento* di  $z$  e si denota  $\operatorname{Arg}(z)$ . Quindi l'argomento di  $z$  non è unico ma se  $\vartheta = \operatorname{Arg}(z)$ , ogni numero reale del tipo  $\vartheta + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$  è un argomento di  $z$ .



Se  $\rho$  e  $\vartheta$  sono il modulo e l'argomento di un numero complesso  $z = a + ib$  non nullo, si ha allora  $a = \rho \cos \vartheta$  e  $b = \rho \sin \vartheta$  ed anche

$$\cos \vartheta = \frac{a}{\rho} \quad \sin \vartheta = \frac{b}{\rho}$$

Dalle formule precedenti si ottiene:

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

che è detta *forma trigonometrica* del numero complesso  $z$ .

**Proposizione 7** Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , si ha

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) .$$

*Dim.* Sia  $z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$  e  $z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$ . Allora

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i (\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) . \end{aligned}$$

**Corollario 8 (Formula di de Moivre)** Per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha

$$[\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) .$$

## Rappresentazione esponenziale

In matematica una delle funzioni più importanti è senza dubbio la funzione esponenziale  $e^x$ . Tale funzione si può estendere al campo complesso utilizzando la *formula di Eulero*, una delle formule più curiose (e più utili) di tutta la matematica, che permette di definire le potenze con esponente immaginario. La formula è la seguente: se  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \tag{1}$$

Non riportiamo la dimostrazione di tale formula che richiederebbe alcune nozioni di teoria delle funzioni di variabile complessa.

Dalla formula di Eulero si ricava una scrittura più compatta della rappresentazione trigonometrica di un numero complesso.

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$$

Questa notazione risulta particolarmente comoda sia per la brevità sia per il fatto che, come si può dimostrare, le proprietà delle potenze valgono anche per l'esponenziale complesso. Accenniamo ad alcune conseguenze della formula (1).

Se  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  è un numero complesso, allora dalla (1) si ricava

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$$

quindi si può definire l'esponenziale di un qualunque numero complesso.

La funzione di variabile complessa  $e^z$  è una funzione periodica di periodo immaginario  $2\pi i$  per cui si ha

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Il fatto che  $e^z$  non è iniettiva pone problemi per la sua inversione. In effetti la definizione di una funzione logaritmo nel campo complesso, anche se possibile, non è unica e la sua introduzione pone parecchi problemi troppo delicati per essere affrontati in questa sede. E' invece facile estendere al campo complesso le funzioni trigonometriche in modo tale che la formula di Eulero valga in generale e non solo per un esponente puramente immaginario. Infatti dalle

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z ; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

si ricava

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} .$$

**Esempio** Se  $z = \rho e^{i\vartheta}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , usando la notazione esponenziale la formula di de Moivre si riscrive in modo più compatto

$$z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$$

Si voglia ad esempio calcolare  $(1+i)^{100}$ . Poiché  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$  si ha

$$(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100} e^{i100\pi/4} = 2^{50} e^{i25\pi} = -2^{50} .$$

## Radici di un numero complesso

Dato un numero complesso  $\alpha$  e un intero positivo  $n$ , si dice che  $z \in \mathbb{C}$  è una *radice  $n$ -esima* di  $\alpha$  se  $z^n = \alpha$ .

Utilizzando la rappresentazione trigonometrica di un numero complesso si può provare il seguente teorema che generalizza la Proposizione 2.

**Teorema 9** *Ogni numero complesso  $\alpha \neq 0$  ha  $n$  radici  $n$ -esime distinte.*

*Dim.* Siano  $r = |\alpha|$  e  $\vartheta = \text{Arg}(\alpha)$ , allora il modulo  $\rho$  e l'argomento  $\phi$  di una radice  $n$ -esima di  $\alpha$  devono essere tali che  $\rho^n = r$  e  $n\phi \equiv \vartheta \pmod{2\pi}$ . Quindi

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{e} \quad \phi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

qui  $\sqrt[n]{r}$  significa *radice  $n$ -esima aritmetica* del numero reale positivo  $r$ . Viceversa si vede subito che ogni numero complesso della forma

$$\beta_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i \text{sen} \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

è una radice  $n$ -esima di  $\alpha$ . È chiaro che al variare di  $k$  in  $\mathbb{Z}$  la (2) non fornisce numeri tutti distinti, anzi due diversi valori  $k_1$  e  $k_2$  di  $k$  forniscono lo stesso numero complesso se e solo se

$$\frac{\vartheta + 2k_1\pi}{n} \equiv \frac{\vartheta + 2k_2\pi}{n} \pmod{2\pi}$$

cioè se  $k_1 - k_2 \equiv 0 \pmod{n}$ . Per avere tutte le radici  $n$ -esime di  $\alpha$ , e ciascuna una volta sola, basta dunque attribuire a  $k$  i valori  $0, 1, \dots, n-1$ .  $\square$

Se  $\alpha = 1$  la (2) fornisce le  $n$  radici  $n$ -esime dell'unità

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \text{sen} \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3)$$

Le radici  $n$ -esime dell'unità costituiscono un gruppo ciclico (moltiplicativo) di ordine  $n$  e si ha  $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ . I generatori di questo gruppo sono le *radici  $n$ -esime primitive dell'unità*; esse si ottengono dalla (3) quando  $k$  è primo con  $n$ . In particolare una radice primitiva è

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \text{sen} \frac{2\pi}{n}$$

Si osservi che la (2) si può così riscrivere:

$$\beta_k = \beta_0 \varepsilon_1^k$$

Rappresentando i numeri complessi nel piano di Argand-Gauss si vede subito che le radici dell'unità sono i vertici di un poligono regolare con  $n$  lati inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1 e che ha un vertice nel punto  $(1, 0)$ .

Consideriamo l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$ , dove  $a, b, c$  sono numeri reali e  $a \neq 0$ . Tale equazione si può riscrivere nella forma

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

Se  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , l'equazione ha le radici reali  $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ . Se  $\Delta < 0$ , l'equazione non ha radici reali ma esistono due radici complesse coniugate date da

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Questo fatto si esprime dicendo che ogni polinomio di secondo grado a coefficienti reali ha due radici complesse coniugate. Di fatto vale un risultato molto più generale noto come *teorema fondamentale dell'algebra* che afferma che ogni polinomio non costante in  $\mathbb{C}[X]$  ha radici in  $\mathbb{C}$ . Vi sono molte dimostrazioni di questo teorema, ma anche le più semplici richiedono l'uso di strumenti che esulano dall'ambito di questo corso (funzioni di due variabili reali oppure funzioni di variabile complessa). Pertanto qui ci limiteremo a dare l'enunciato ed alcune importanti conseguenze.

**Teorema 10 (D'Alembert)** *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado positivo possiede in  $\mathbb{C}$  almeno una radice.*

## Esercizi

**Es. 1.** Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$$\frac{4 + \sqrt{3}i}{5 + \sqrt{3}i}, \quad (\sqrt{2} + i)^7, \quad \frac{1}{i(1-i)^5}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (i\sqrt{2} - i\sqrt{3})^3, \quad 2i - 1 .$$

**Es. 2.** Risolvere le equazioni:  $(1 + 3i)z = 4$ ;  $(2 - 3i)z = i$ ;  $\frac{z-1}{z-i} = 2/3$ .

**Es. 3.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  di modulo 1 tali che  $(1 + 3i)z \in \mathbb{R}$ .

**Es. 4.** Determinare i numeri complessi  $z$  tali che  $z^3 \in \mathbb{R}$  e  $|z| = 1$ .

**Es. 5.** Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$$2 + 2i, \quad 3 - i, \quad -4, \quad -3i, \quad 1, \quad -3 - 2i, \quad 3 + 2i, \quad \cos \pi/3 - i \sin \pi/3, \\ \sin \pi/4 + i \cos \pi/4, \quad \cos 0 + i \sin \pi/2, \quad 4(\cos \pi/4 - i \sin \pi/4)(\sin 3\pi/4 + i \cos 3\pi/4), \\ (\cos \pi/4 - i \sin \pi/3), \quad (\sin \phi - i \cos \phi), \quad \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2-i}, \quad \frac{2+i+2i^2-i^3}{1-i} .$$

**Es. 6.** Calcolare il modulo dei numeri complessi:

$$(1 + 3i)(\cos 7 + i \sin 7), \quad (4 + 3i)2(\cos 3 + i \sin 3)^{45} .$$

**Es. 7.** Rappresentare nel piano di Gauss gli insiemi:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}, \\ \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 27\}, \\ \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \frac{5\pi}{3}\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = i\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) = 0\} .$$

**Es. 8.** Determinare:

- le radici seste di 1;
- le radici quarte di  $-i$ ;
- le radici cubiche di  $(\frac{1+i}{1-i})^3$ ;
- le radici quadrate di  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Es. 9.** Determinare le radici dei seguenti polinomi:  $(X - i)^5 - \sqrt{2}$ ;  $X^4 + 1$ ;  $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$ ;  $X^6 + 12X^2$ ,  $X^4 - 1$ ,  $iX^3 - X^3 - 1$ ,  $\sqrt{3}X^5 - i$ .