

Lezioni di Propagazione e Trasmissione

Sandra Costanzo

Dip. Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università della Calabria,
87036 Rende (CS) - Italy

Indice

1	Propagazione per onde	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Onde elettromagnetiche	3
2	Linee di Trasmissione	10
2.1	Introduzione	10
2.2	Linee nel dominio del tempo	11
2.2.1	Equazioni dei telegrafisti	11
2.2.2	Soluzioni delle equazioni delle linee nel dominio del tempo	12
2.2.3	Impedenza Caratteristica	13
2.2.4	Coefficienti di riflessione e trasmissione	14

Capitolo 1

Propagazione per onde

1.1 Introduzione

Lo studio dei fenomeni elettromagnetici é affidata, a livello macroscopico, ad un insieme di equazioni empiriche note come equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{e} &= -\frac{\partial \underline{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{h} &= \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + \underline{J} \\ \nabla \cdot \underline{d} &= \rho \\ \nabla \cdot \underline{b} &= 0\end{aligned}$$

Nelle suddette equazioni, i vettori \underline{e} , \underline{h} , \underline{d} , \underline{b} , \underline{J} rappresentano, rispettivamente, il campo elettrico, il campo magnetico, l'induzione elettrica, l'induzione magnetica e la densitá di corrente, mentre lo scalare ρ denota la densitá di carica. Tutte le grandezze citate sono funzioni delle tre coordinate spaziali x, y, z e della coordinata temporale t .

Ricordando le definizioni degli operatori rotore e divergenza in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{A} &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla \cdot \underline{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

é facile osservare che le prime due equazioni di Maxwell correlano variazioni spaziali di campo elettrico a variazioni temporali di campo magnetico e vice-

ersa. In particolare, esprimendo la prima equazione nella corrispondente forma integrale si ricava la legge di Faraday:

$$f.e.m. = \oint_{\gamma} \underline{e} \cdot d\underline{L} = -\frac{\partial \varphi_b}{\partial t} \quad (1.1)$$

dove φ_b rappresenta il flusso di induzione magnetica.

La (1.1) consente di affermare che la variazione temporale del flusso di induzione magnetica produce una f.e.m. indotta, il cui segno é tale da opporsi alla causa generatrice. In altri termini, un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico. In modo del tutto analogo, la forma integrale della seconda equazione di Maxwell riproduce la legge di Ampère generalizzata al caso dinamico:

$$\oint_{\gamma} \underline{h} \cdot d\underline{L} = \frac{\partial \varphi_d}{\partial t} + i_c \quad (1.2)$$

La (1.2) esprime la possibilità che un campo magnetico sia prodotto non solo da cariche libere, rappresentate dalla corrente di conduzione i_c , ma anche da variazioni temporali del flusso di induzione elettrica φ_d . Un campo elettrico variabile nel tempo genera, dunque, un campo magnetico.

1.2 Onde elettromagnetiche

La conseguenza piú appariscente delle equazioni di Maxwell é il fenomeno della propagazione elettromagnetica: una sorgente attiva in una certa regione spaziale, a partire da un certo istante temporale, é rilevabile sperimentalmente solo dopo un intervallo temporale finito non nullo. L'onda elettromagnetica puó, dunque, definirsi come segnale identificabile punto per punto ed istante per istante, che si propaga con velocità finita.

Un generico segnale ondoso puó essere rappresentato, dal punto di vista matematico, mediante un funzione vettoriale del tipo $\underline{U}(x, y, z, t)$, dove si é indicata la duplice dipendenza spaziale e temporale. Semplificando l'analisi, é possibile assumere una singola orientazione e considerare una funzione scalare $u(z, t)$, dove si é fatta l'ulteriore ipotesi che la dipendenza spaziale sia limitata alla sola coordinata z . Un esempio familiare é rappresentato dall'onda cosinusoidale:

$$u(z, t) = A \cdot \cos(\omega t - kz) \quad (1.3)$$

Nell'equazione (1.3), il termine A denota l'ampiezza del segnale, $\omega = 2\pi f$ ne rappresenta la pulsazione, mentre il termine k prende il nome di costante di fase o di propagazione.

Si supponga, ora, di voler rappresentare graficamente la (1.3) rispetto alla variabile temporale t . A tale scopo, si fissi un valore $z = z_o$ per la coordinata spaziale, ottenendo la funzione (di una sola variabile):

$$u(z_o, t) = A \cdot \cos(\omega t - kz_o) \quad (1.4)$$

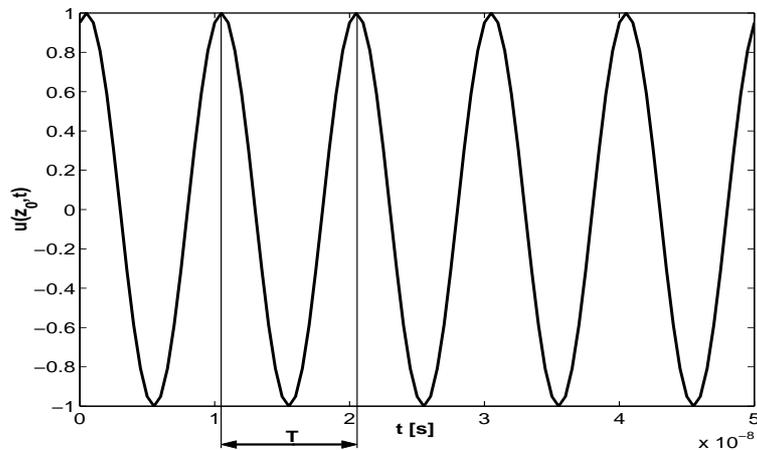


Figura 1.1: Rappresentazione grafica della funzione (1.4)

Il grafico della (1.4), illustrato in fig.1, mostra che la funzione considerata risulta essere periodica, con periodo temporale T correlato alla pulsazione ω mediante la ben nota relazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Procedendo in modo del tutto analogo, si fissi un valore $t = t_o$ per la coordinata temporale, ricavando la funzione spaziale:

$$u(z, t_o) = A \cdot \cos(\omega t_o - kz) \quad (1.5)$$

Come mostrato in fig.2, la (1.5) é anch'essa una funzione periodica, con periodo spaziale λ , detto lunghezza d'onda, che risulta correlato alla costante di propagazione k dalla relazione:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

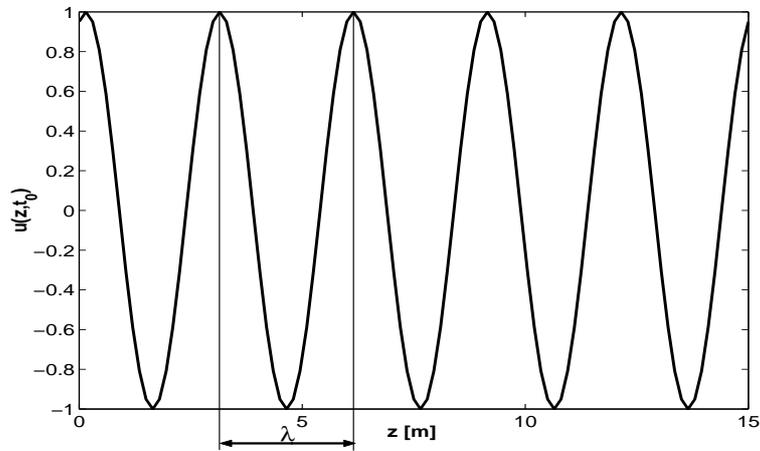


Figura 1.2: Rappresentazione grafica della funzione (1.5)

Si consideri, ora, l'andamento della funzione (1.3), al variare della coordinata spaziale z , per due distinti valori della coordinata temporale, rispettivamente t e $t + \Delta t$.

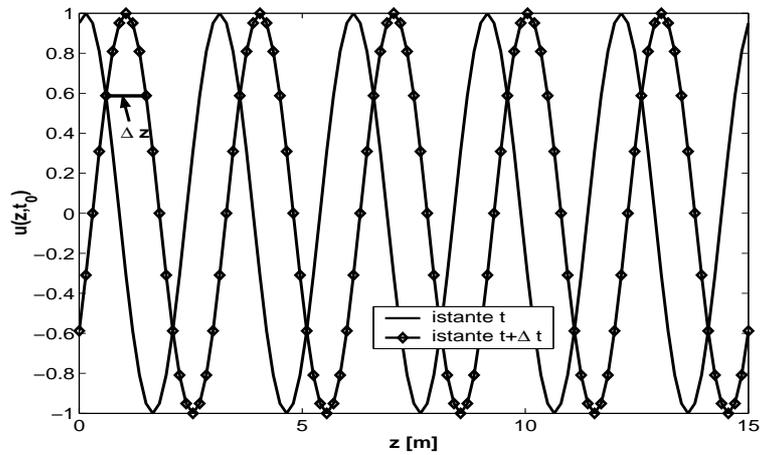


Figura 1.3: Propagazione dell'onda

Come illustrato in fig.3, la curva trasla spazialmente, ovvero si propaga di un tratto Δz senza deformarsi.

La velocità di propagazione v_f dell'onda, detta velocità di fase, deve lasciare inalterata la forma del segnale, ossia deve soddisfare la relazione:

$$u(z, t) = u(z + \Delta z, t + \Delta t) \quad (1.6)$$

per ogni punto P giacente sulla curva. Sostituendo nella (1.6) la definizione (1.3), si ricava:

$$A \cdot \cos(\omega t - kz) = A \cdot \cos(\omega t + \omega \Delta t - kz - k \Delta z)$$

Quest'ultima relazione é soddisfatta a patto di porre:

$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (1.7)$$

Sostituendo nella (1.7) le definizioni di ω e k , si ricava:

$$v_f = f \cdot \lambda$$

da cui, infine:

$$\lambda = \frac{v_f}{f}$$

Quest'ultima equazione esprime la relazione di proporzionalitá inversa esistente tra la lunghezza d'onda λ e la frequenza f .

Si consideri, ora, la scomposizione dell'esponenziale complesso in parte reale e parte immaginaria:

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z$$

Facendo uso delle suddetta relazione, la (1.3) puó essere espressa nella forma:

$$u(z, t) = \text{Re} \{ A \cdot e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t} \} \quad (1.8)$$

E' allora possibile isolare la dipendenza temporale della (1.3), scrivendo:

$$u(z, t) = \text{Re} \{ U(z) \cdot e^{j\omega t} \} \quad (1.9)$$

dove $U(z) = A \cdot e^{-jkz}$ prende il nome di fasore dell'onda , mentre la forma completa $u(z, t)$ é detta espressione istantanea.

La notazione introdotta puó essere applicata ai vettori di campo che compaiono nelle equazioni di Maxwell, indicando con le lettere maiuscole i fasori e con quelle minuscole le corrispondenti espressioni istantanee. In altri termini, si puó scrivere:

$$\begin{aligned}\underline{e}(z, t) &= \text{Re} \{ \underline{E}(z) \cdot e^{j\omega t} \} \\ \underline{h}(z, t) &= \text{Re} \{ \underline{H}(z) \cdot e^{j\omega t} \}\end{aligned}$$

ed analogamente per i vettori \underline{b} e \underline{d} . Sostituendo le espressioni suddette nelle prime due equazioni di Maxwell (in assenza di sorgenti), si ha:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \underline{B} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \underline{D} \quad (1.11)$$

Si supponga, per semplicitá, che il fasore del campo elettrico \underline{E} abbia un'unica componente E_x funzione della sola coordinata spaziale z . L'equazione (1.10) si semplifica come segue:

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega B_y \quad (1.12)$$

Se il mezzo in esame é lo spazio libero, valgono le relazioni:

$$B_y = \mu_o H_y, \quad D_x = \epsilon_o E_x \quad (1.13)$$

dove $\epsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12}$ e $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ rappresentano, rispettivamente, i valori della permittivitá e della permeabilitá nel vuoto. La prima delle relazioni (1.13) mostra che il campo magnetico presenta anch'esso un'unica componente, diretta lungo l'asse y , funzione della sola coordinata spaziale z . Il risultato ottenuto consente di semplificare la (1.11) come segue:

$$-\frac{dH_y}{dz} = j\omega D_x \quad (1.14)$$

Si derivi la (1.12) rispetto alla variabile z :

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -j\omega \frac{dB_y}{dz} \quad (1.15)$$

Sostituendo la seconda delle (1.13) nella (1.15), si ricava:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -j\omega \mu_o \frac{dH_y}{dz} \quad (1.16)$$

Facendo uso, infine, della (1.14) con la seconda delle (1.13), si ha:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \quad (1.17)$$

dove si é posto $k = \omega\sqrt{\epsilon_o\mu_o}$.

La (1.17), detta *equazione d'onda*, ammette soluzioni generali del tipo:

$$E_x(z) = E_x^+ \cdot e^{-jkz} + E_x^- \cdot e^{jkz} \quad (1.18)$$

dove la quantità $E_x^+ \cdot e^{-jkz}$ rappresenta un'onda di ampiezza E_x^+ che si propaga nella direzione positiva dell'asse z , mentre $E_x^- \cdot e^{jkz}$ denota un'onda di ampiezza E_x^- che viaggia lungo l'asse z negativo.

Procedendo in modo del tutto analogo per il campo magnetico, si ricava la soluzione:

$$H_y(z) = H_y^+ \cdot e^{-jkz} + H_y^- \cdot e^{jkz} \quad (1.19)$$

Si sostituiscano le equazioni (1.18) e (1.19) nella (1.12), ottenendo:

$$k (E_x^+ \cdot e^{-jkz} - E_x^- \cdot e^{jkz}) = \omega\mu_o (H_y^+ \cdot e^{-jkz} + H_y^- \cdot e^{jkz}) \quad (1.20)$$

Dalla (1.20) si ricava, per confronto:

$$H_y^+ = \frac{E_x^+ \cdot k}{\omega\mu_o} = \frac{E_x^+}{\eta} \quad H_y^- = -\frac{E_x^-}{\eta}$$

dove la quantità $\eta = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}$ prende il nome di impedenza dello spazio libero.

In definitiva, la (1.19) assume la forma:

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta} \cdot (E_x^+ \cdot e^{-jkz} - E_x^- \cdot e^{jkz}) \quad (1.21)$$

I risultati espressi dalle relazioni (1.18) e (1.21), ottenuti nell'ipotesi di campo elettromagnetico dipendente dalla sola variabile spaziale z , rappresentano un'*onda piana*, ossia un'onda caratterizzata dalle seguenti proprietà:

1. campo elettrico e campo magnetico sono fra di loro ortogonali ed entrambi ortogonali alla direzione di propagazione z ;
2. il rapporto tra le ampiezze del campo elettrico e quelle del campo magnetico é pari all'impedenza dello spazio libero η ;
3. la fase del campo elettromagnetico é costante sui piani ortogonali alla direzione di propagazione.

Per verificare l'ultima delle proprietà sopra elencate, si consideri la sola onda diretta nell'equazione (1.18):

$$E_x^+ \cdot e^{-jkz} \tag{1.22}$$

La fase della (1.22) é data dalla quantità $-jkz$, che risulta costante per quei valori di z soddisfacenti la condizione $z = \text{costante}$, ovvero sui piani paralleli al piano $x - y$, che risultano ortogonali all'asse z di propagazione dell'onda.

Capitolo 2

Linee di Trasmissione

2.1 Introduzione

L'analisi dei circuiti, in elettrotecnica, viene effettuata mediante modelli a parametri concentrati, nei quali la dipendenza spaziale di tensioni e correnti viene trascurata, assumendo che la propagazione dei segnali dal generatore all'utilizzatore sia istantanea. Una tale approssimazione é consentita solo a frequenze sufficientemente basse, tali da considerare il circuito in esame *elettricamente piccolo*. In presenza di apparati elettronici dimensionalmente comparabili alla lunghezza d'onda non é piú possibile trascurare i fenomeni di propagazione e le grandezze circuitali (tensione e corrente) assumono una duplice dipendenza dalle coordinate spaziali e temporali. Si parla, in tal caso, di *circuiti a parametri distribuiti*. Un esempio tipico é rappresentato dalle *linee di trasmissione*, sistemi di due o piú conduttori paralleli la cui distanza di separazione risulta elettricamente piccola rispetto alla lunghezza stessa dei conduttori. Alcuni esempi di linee a due conduttori sono illustrati in fig.2.1, dove la sorgente é rappresentata da un circuito equivalente di Thevenin e la linea é connessa ad un carico resistivo di valore R_L . Il piano di massa presente nel secondo circuito sostituisce il conduttore di ritorno.

Nel seguito verranno prese in esame esclusivamente linee di trasmissione a due conduttori omogenee ed uniformi, nelle quali le proprietá del dielettrico interposto e la sezione trasversale restano invariate in ogni punto della linea.

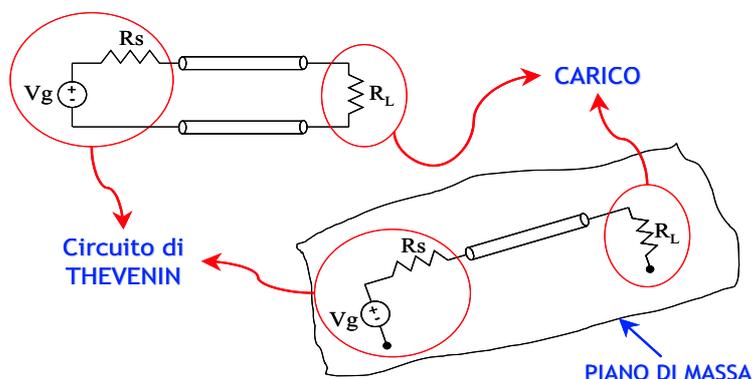


Figura 2.1: Esempi di linee di trasmissione a due conduttori

2.2 Linee nel dominio del tempo

2.2.1 Equazioni dei telegrafisti

L'analisi delle linee di trasmissione prevede di determinare gli andamenti delle correnti nei conduttori e delle tensioni tra gli stessi conduttori in ogni punto della linea. La possibilità di definire in modo univoco tensioni e correnti deriva dalla configurazione di campo elettromagnetico trasversale caratterizzante la struttura: i vettori di campo elettrico e di campo magnetico risultano ortogonali (trasversali) all'asse della linea, solitamente l'asse z , lungo il quale avviene la propagazione.

Allo scopo di derivare le equazioni delle linee, si consideri un tratto di lunghezza $\Delta z \ll \lambda$, che può essere schematizzato mediante il circuito a parametri concentrati illustrato in fig.2.2.

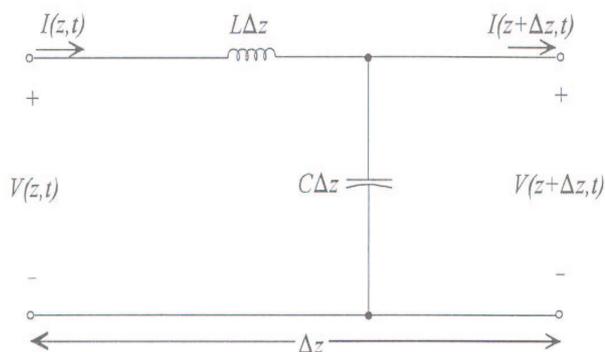


Figura 2.2: Circuito equivalente ad un tratto $\Delta z \ll \lambda$

La capacità per unità di lunghezza C modella l'effetto capacitivo del campo

elettrico che circonda i conduttori, mentre l'induttanza per unità di lunghezza L tiene conto del campo magnetico dovuto alla corrente che fluisce nei due conduttori.

Applicando le leggi di Kirchoff al circuito di fig.5, si ricavano le equazioni:

$$v(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = v(z + \Delta z, t) \quad (2.1)$$

$$i(z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} = i(z + \Delta z, t)$$

Si consideri, ora, lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione $f(x)$ intorno al punto $x_o + \Delta x$:

$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta x \frac{f'(x_o)}{1!} + \Delta x^2 \frac{f''(x_o)}{2!} + \dots \quad (2.2)$$

Applicando lo sviluppo (2.2) alle equazioni (2.1), si ricava:

$$v(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = v(z, t) + \Delta z \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$i(z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} - C\Delta z^2 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z \partial t} = i(z, t) + \Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial z}$$

Considerato trascurabile il termine in Δz^2 , si perviene al sistema:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$

Il sistema (2.4), detto dei *telegrafisti*, é composto da due equazioni alle derivate parziali nelle incognite tensione e corrente, funzioni delle coordinate spaziali e temporali.

2.2.2 Soluzioni delle equazioni delle linee nel dominio del tempo

Al fine di derivare le distribuzioni di tensione e corrente lungo la linea, si derivi rispetto a z la prima delle (2.4), ottenendo:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z \partial t} \quad (2.5)$$

Sostituendo la seconda delle (2.4) nella (2.5), si ha:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

dove si é posto $v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

L'equazione d'onda (2.6) ammette soluzioni generali del tipo:

$$v(z, t) = V_1 \cdot v_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right) + V_2 \cdot v_2 \left(t + \frac{z}{v_f} \right) \quad (2.7)$$

In modo del tutto analogo, derivando rispetto a z la seconda delle (2.4), si ricava l'equazione rispetto alla sola corrente $i(z, t)$:

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

La soluzione generale della (2.8) assume la forma:

$$i(z, t) = I_1 \cdot i_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right) + I_2 \cdot i_2 \left(t + \frac{z}{v_f} \right) \quad (2.9)$$

2.2.3 Impedenza Caratteristica

Le distribuzioni di tensione e corrente (2.7) e (2.9) sono fra loro correlate. Se si considerano, infatti, le sole onde dirette $V_1 \cdot v_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right)$, $I_1 \cdot i_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right)$ e si sostituiscono nel sistema dei telegrafisti (2.4), si ricava:

$$V_1 \frac{\partial v_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right)}{\partial z} = -L I_1 \frac{\partial i_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right)}{\partial t} \quad (2.10)$$

Posto $u = t - \frac{z}{v_f}$, l'equazione (2.10) assume la forma:

$$-\frac{V_1}{v_f} \frac{\partial v_1(u)}{\partial u} = -L I_1 \frac{\partial i_1(u)}{\partial u} \quad (2.11)$$

Manipolando la (2.11), si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{V_1 \cdot v_1(u)}{v_f} - L I_1 \cdot i_1(u) \right) = 0 \quad (2.12)$$

da cui risulta:

$$V_1 \cdot v_1(u) - LI_1 \cdot i_1(u)v_f = costante \quad (2.13)$$

Scegliendo la costante pari a zero, si ottiene la relazione:

$$V_1 \cdot v_1(u) = Lv_f I_1 \cdot i_1(u) = Z_o I_1 \cdot i_1(u) \quad (2.14)$$

dove la quantità $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$ rappresenta l'impedenza caratteristica della linea. Procedendo in modo analogo per le onde riflesse, si ricava:

$$V_2 \cdot v_2(u) = -Z_o I_2 \cdot i_2(u) \quad (2.15)$$

In definitiva, le distribuzioni di tensione e corrente sono esprimibili nella forma:

$$v(z, t) = V_1 \cdot v_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right) + V_2 \cdot v_2 \left(t + \frac{z}{v_f} \right) \quad (2.16)$$

$$i(z, t) = \frac{V_1}{Z_o} v_1 \left(t - \frac{z}{v_f} \right) - \frac{V_2}{Z_o} v_2 \left(t + \frac{z}{v_f} \right)$$

Le ampiezze V_1 e V_2 vengono determinate dall'applicazione di opportune condizioni agli estremi della linea, ovvero sul generatore e sul carico.

2.2.4 Coefficienti di riflessione e trasmissione

Si consideri una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_o , utilizzata per connettere un generatore di tensione V_g ad un carico di impedenza Z_L (fig.2.3).

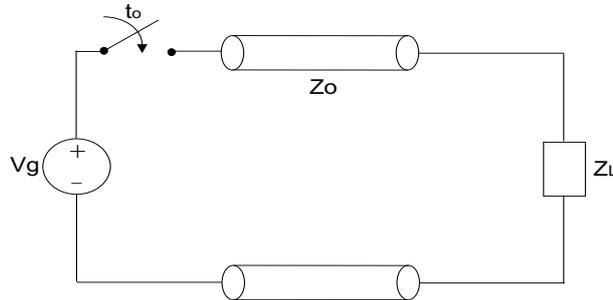


Figura 2.3: Circuito a linea di trasmissione

All'istante t_o l'interruttore viene chiuso e la tensione V_g si manifesta ai morsetti di ingresso della linea. Negli istanti successivi, l'onda diretta di

tensione si propaga lungo la linea; ad essa é associata un'onda di corrente avente la stessa forma ma ampiezza ridotta di un fattore pari a $\frac{1}{Z_o}$. Quando le onde dirette di tensione e corrente raggiungono il carico Z_L , parte dell'energia da esse trasportata viene ceduta, ossia *trasmessa*, e la rimanente parte viene riflessa, dando origine alle onde regressive. Siano v_d, i_d le tensioni e correnti dirette, e v_r, i_r le tensioni e correnti riflesse. Dette, inoltre, $v_{AA'}$ e $i_{AA'}$ la tensione e la corrente sul carico Z_L , si possono scrivere le relazioni:

$$v_{AA'} = v_d + v_r \quad (2.17)$$

$$i_{AA'} = i_d + i_r = \frac{v_d}{Z_o} - \frac{v_r}{Z_o}$$

Dalla prima delle (2.17) si ricava:

$$v_r = v_{AA'} - v_d \quad (2.18)$$

Sostituendo la (2.18) nella seconda delle (2.17), si ha:

$$Z_o i_{AA'} = 2v_d - v_{AA'} \quad (2.19)$$

A quest'ultima equazione corrisponde il circuito a parametri concentrati di fig.2.4, nel quale la sorgente é rappresentata dal generatore di tensione $2v_d$ con impedenza interna Z_o .

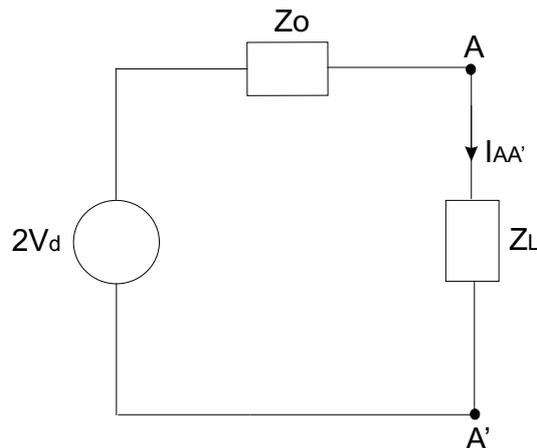


Figura 2.4: Circuito equivalente all'equazione (2.19)

Manipolando la (2.18), si ricava:

$$v_r = \frac{2v_d \cdot Z_L}{Z_L + Z_o} - v_d = v_d \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \Gamma \cdot v_d \quad (2.20)$$

dove la quantità $\Gamma = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$ denota il coefficiente di riflessione.
Sostituendo la (2.20) nella prima delle (2.17), si ha:

$$v_{AA'} = (1 + \Gamma)v_d = \tau \cdot v_d \quad (2.21)$$

dove $\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_o}$ é detto coefficiente di trasmissione.