SERIE DI FUNZIONI: CONVERGENZA PUNTUALE ED UNIFORME

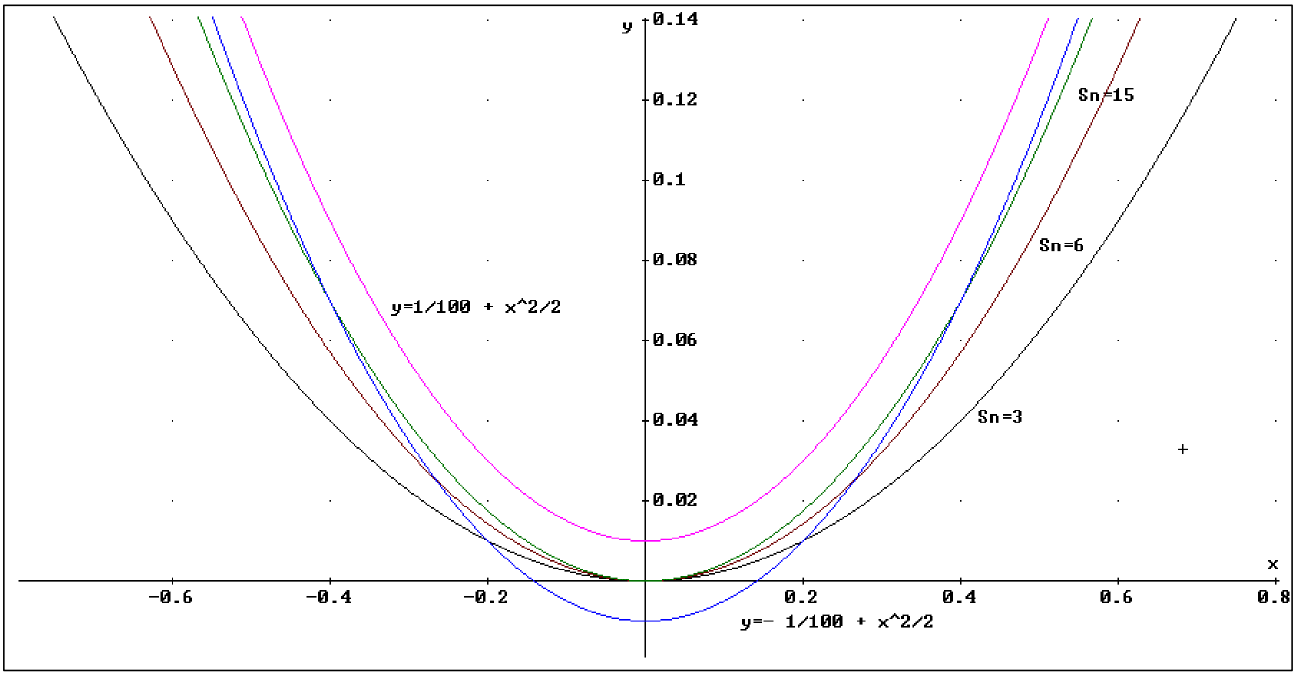
Data la serie: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^2}{n(n+1)}$

1) La ridotta n-esima è: $S_n = \sum_{n=2}^{n} \frac{x^2}{n(n+1)} = x^2 * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$
2) La somma è: $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^2}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(x^2 * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \frac{x^2}{2}$
3) L'insieme di convergenza puntuale Ep è: $|Sn - f(x)| < e$ cioè $\left|\left(x^2 * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\right) - \frac{x^2}{2}\right| < e$

   Semplificando : $\frac{x^2}{n+1} < e \Rightarrow x \in R$
4) Per trovare l'insieme di convergenza uniforme Eu devo avere un'espressione in 'n' ed 'ε' quindi devo "eliminare" il termine 'x^2', perciò uso una maggiorante di $\frac{x^2}{n+1}$ con le opportune condizioni:

   $\frac{x^2}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \wedge x^2 \le 1$, ora devo controllare se –1 ed 1 sono compresi perciò li sostituisco ad x e trovo che la disequazione è soddisfatta e quindi Eu = $|x| \le 1$
5) Per ogni ε>0 arbitrariamente piccolo esiste un n_e dipendente da ε tale che per ogni n>n_e si ha che il resto n-esimo | r_n|< ε è | Sn – f(x) | < ε .

   $n > \frac{x^2}{e} - 1 \Rightarrow n > 100x^2 - 1$ quindi $n_e = 100x^2 - 1$
6) Siccome nessuna delle tre curve Sn Λ n={3, 6, 15} risulta compresa tra *f*(x)+ε e *f*(x)-ε nell'intervallo Ep = [-1;1] è confermata la condizione $n > 100x^2 - 1$ infatti:



Data la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{n-1}-x^{n}\right)$

7) La ridotta n-esima è: $S_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{n-1}-x^{n}\right)=1-x^{n}$

8) La somma è: $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty^-}\left(x^2 * \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\frac{x^2}{2}$

9) L'insieme di convergenza puntuale Ep è: $\left|Sn-f(x)\right|<e$ cioè $\left|\left(x^2 * \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right)-\frac{x^2}{2}\right|<e$

Semplificando : $\frac{x^2}{n+1}<e \Rightarrow x\in R$

10) Per trovare l'insieme di convergenza uniforme Eu devo avere un'espressione in 'n' ed 'ε' quindi devo "eliminare" il termine 'x^2', perciò uso una maggiorante di $\frac{x^2}{n+1}$ con le opportune condizioni:

$\frac{x^2}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}\ \Lambda\ x^2\leq 1$, ora devo controllare se –1 ed 1 sono compresi perciò li sostituisco ad x e trovo che la disequazione è soddisfatta e quindi Eu = $|x|\leq 1$

11) Per ogni ε>0 arbitrariamente piccolo esiste un n_e dipendente da ε tale che per ogni $n>n_e$ si ha che il resto n-esimo $|r_n|<\varepsilon$ è | Sn – f(x) | < ε .

$n>\frac{x^2}{e}-1\Rightarrow n>100x^2-1$ quindi $n_e=100x^2-1$

12) Siccome nessuna delle tre curve Sn Λ n={3, 6, 15} risulta compresa tra *f*(x)+ε e *f*(x)-ε nell'intervallo Ep = [-1;1] è confermata la condizione $n>100x^2-1$ infatti: