Modelli Statistici I

A.A. 2002-2003 **Esercitazione 1**

Esempio 1.1 Si è interessati a valutare se esiste una relazione tra il numero di libri letti in un anno e il numero medio giornaliero di ore passate davanti al televisore (acceso). È stato intervistato un campione di $n = 11$ studenti universitari e i dati ottenuti sono i seguenti:

ore tv (x_i)	0	0.5	1.2	1.4	2.0	2.2	2.5	2.9	3.0	4.0	5.0
libri letti (y_i)	23	18	15	11	8	8	7	5	3	2	1

In particolare, si ha $\sum_{i=1}^{11} y_i = 101$, $\sum_{i=1}^{11} x_i = 24.7$, $\sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 1415$, $\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 77.15$, $\sum_{i=1}^{11} x_i\, y_i = 130$.

Si assuma che $y_1, \ldots, y_{11}$ siano realizzazioni di variabili casuali indipendenti $N(\beta_1 + \beta_2\, x_i, \sigma^2)$, con x_i costanti fissate, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

1 Si scrivano le funzioni di verosimiglianza e log-verosimiglianza per $\theta = (\beta_1, \beta_2, \sigma^2)$.

2 Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ per θ e se ne calcoli il valore per i dati osservati.

3 Si determini l'informazione osservata per θ e si calcoli $j(\hat{\theta})^{-1}$.

4 Si determini la distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$.

5 Si determinino le distribuzioni esatte di $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$.

6 Si calcoli un intervallo di confidenza per β_1 con livello 0.95, basato sulla distribuzione esatta di $\hat{\beta}_1$. Si calcoli l'analogo intervallo di confidenza per β_2.

7 Si verifichi $H_0 : \beta_2 = 0$ contro $H_1 : \beta_2 \neq 0$ con livello di significatività esatto 0.05, utilizzando la statistica $W_P(\beta_2)$.

8 Si calcoli il livello di significatività osservato del test ottenuto al punto precedente.

9 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test basato su $W_P(\beta_2)$.