Modelli Statistici 1

A.A. 2002-2003 **Homework 3-Soluzioni**

Esercizio 3.1. La condizione di annullamento delle derivate parziali è che sia soddisfatto il sistema delle tre equazioni:

$$\frac{\partial SQ(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial\beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_1-\beta_2x_{i2}-\beta_3x_{i3}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial SQ(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial\beta_2} = -2\sum_{i=1}^{n}x_{i2}(y_i-\beta_1-\beta_2x_{i2}-\beta_3x_{i3}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial SQ(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{\partial\beta_3} = -2\sum_{i=1}^{n}x_{i3}(y_i-\beta_1-\beta_2x_{i2}-\beta_3x_{i3}) = 0\,.$$

Si verifica poi che le 3 equazioni (moltiplicate per -1/2) coincidono con le tre equazioni che si hanno particolarizzando al caso $p = 3$ le equazioni normali $(y - X\beta)^\top X = 0$.

Affinché il punto stazionario sia un minimo, occorre che la matrice delle derivate parziali seconde di $SQ(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sia definita positiva. Si verifica che tale matrice è pari a $2X^\top X$ che è definta positiva se X ha rango pieno.

Esercizio 3.2.

1 L'ipotesi che la radiazione solare non abbia influenza sulla concentrazione di ozono, a parità di temperatura e velocità del vento, corrisponde all'ipotesi statistica $H_0 : \beta_2 = 0$, per verificare la quale possiamo ricorrere al test

$$F = \frac{(\tilde\sigma^2-\hat\sigma^2)/(p-p_0)}{\hat\sigma^2/(n-p)},$$

con $\tilde\sigma^2$ stima della varianza dell'errore per il modello ridotto, $\hat\sigma^2$ stima della varianza dell'errore per il modello completo, p_0 numero di variabili nel modello ridotto e p numero di variabili nel modello completo. Dai dati forniti, si ottiene $F^{oss} = 0.4486$ e $\alpha^{oss} = 0.64$. Pertanto, l'ipotesi H_0 non viene rifiutata.

2 Per l'ipotesi $H_0 : \beta_2 = 0$, $F^{oss} = (t_2^{oss})^2$, con $t_2^{oss} = \frac{\hat\beta_2}{\sqrt{\hat V(\hat\beta_2)}}$, da cui si ricava $t_2^{oss} = 0.6698$. Essendo

$$\sqrt{\hat V(\hat\beta_2)} = s\sqrt{(X^TX)^{-1}_{22}} = 0.5449\sqrt{0.12\times10^{-5}} = 0.0006$$

si ricava $\hat\beta_2 = 0.0004$. Pertanto, un intervallo di confidenza di livello esatto 0.95 per β_2 è dato da $(-0.0008, 0.0016)$, che, come da attendersi, include il valore 0.

Esercizio 3.3.

1 Va mostrato che $P^\top = P$.

2 Va mostrato che $P\,P = P$.

3 Va mostrato che $(I_n - P)^\top = I_n - P$ e che $(I_n - P)(I_n - P) = I_n - P$.

4 Se $z \in \mathcal{V}$ la sua proiezione ortogonale in $\mathcal{V}$ coincide con z.

5 P_0 rappresenta la matrice di proiezione ortogonale nel sottospazio vettoriale $\mathcal{V}_0$ di $\mathbb{R}^n$ generato dalle colonne di X_0. Va mostrato che $P_0^\top = P_0$ e che $P_0\,P_0 = P_0$.

6 Va mostrato che $(P - P_0)^\top = P - P_0$ e che $(P - P_0)(P - P_0) = P - P_0$.