

Esame di Analisi II - 4 Maggio 2001 - Compito A

ESERCIZIO 1. Sono dati:

- la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **pari** e 2π - **periodica** che sull'intervallo $[0, \pi]$ coincide con la funzione $y = 2(\pi^2 - x^2)$;
- la serie di Fourier di f

$$c + 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos(kx)$$

1. Disegnare il grafico di f e dire se f è continua.

2. Determinare il valore di c

3. calcolare la somma $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

4. Dire se la serie converge assolutamente nel punto $x = -\pi$.

5. Utilizzando la formula di Parseval, calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

ESERCIZIO 2.

1. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni :

$$f(t) = t \sin(3t) \qquad g(t) = t \cos(3t).$$

2. Mediante la trasformata di Laplace determinare le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ del sistema di equazioni differenziali :

$$\begin{cases} x'' = 6y' + 9x \\ y'' = 9y - 6x' \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

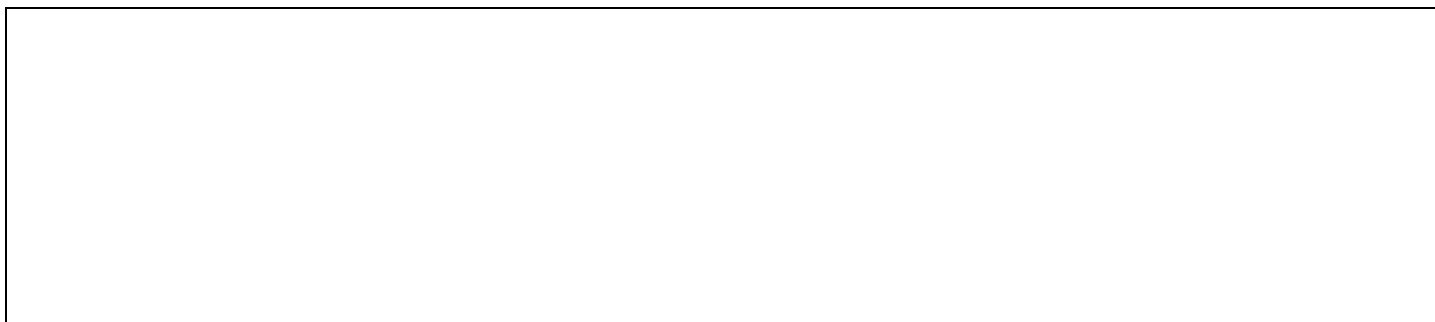
ESERCIZIO 3.

Data la funzione : $f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + xy$

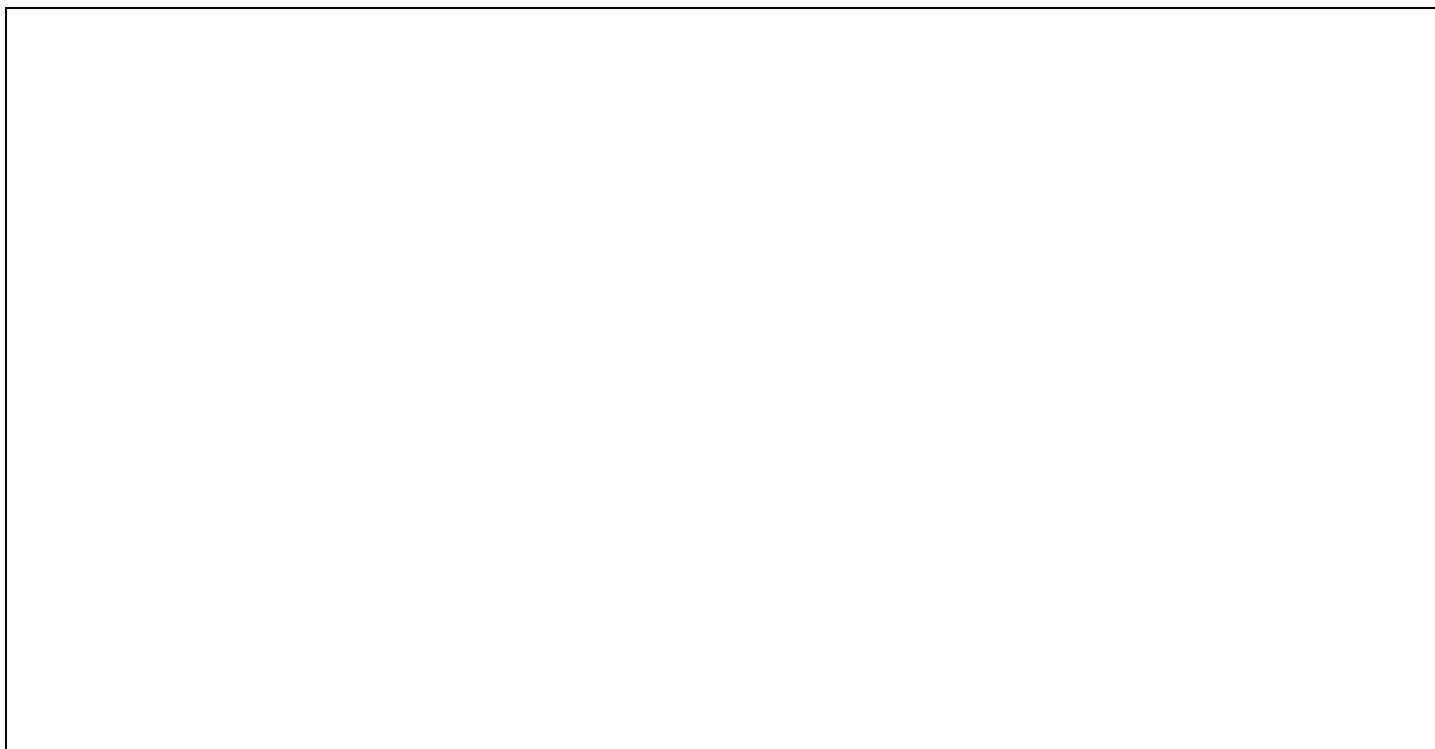
1. Determinare e rappresentare graficamente D il dominio di $f(x, y)$.



2. Discutere l'esistenza del piano tangente al grafico di f nel punto $Q_0 = (1, 1, 7)$. In caso affermativo, trovarne l'equazione.



3. Determinare i punti di critici di f e indicarne la natura.



4. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di f .



ESERCIZIO 4. Determinare le radici di $P(x) = x^2 - 2x + 2i + 1$ e rappresentarle sul piano di Gauss

ESERCIZIO 5.

1. Sia $f(x) : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, continua tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}, l > 0$, allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ è :

CONVERGENTE

DIVERGENTE

DIPENDE DA $f(x)$

2. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convergente per $|x| < 2$. Determinare il dominio di convergenza puntuale di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{3x^n}$

TEORIA.

1. Enunciare e dimostrare il teorema relativo alle soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$

2. Data l'equazione differenziale $xy'(x) = 3y(x)$ e i problemi di Cauchy : $\begin{cases} xy'(x) = 3y(x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} xy'(x) = 3y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(a) $f(x) = -x^3$ è soluzione dell'equazione differenziale su \mathbf{R}

VERO

FALSO

(b) $f(x) = 3x^3$ è l'unica soluzione locale del primo problema di Cauchy

VERO

FALSO

(c) $f(x) = x^3$ è l'unica soluzione del secondo problema di Cauchy

VERO

FALSO