

Esame di Analisi II - 4 Maggio 2001 - Compito B

ESERCIZIO 1. Sono dati:

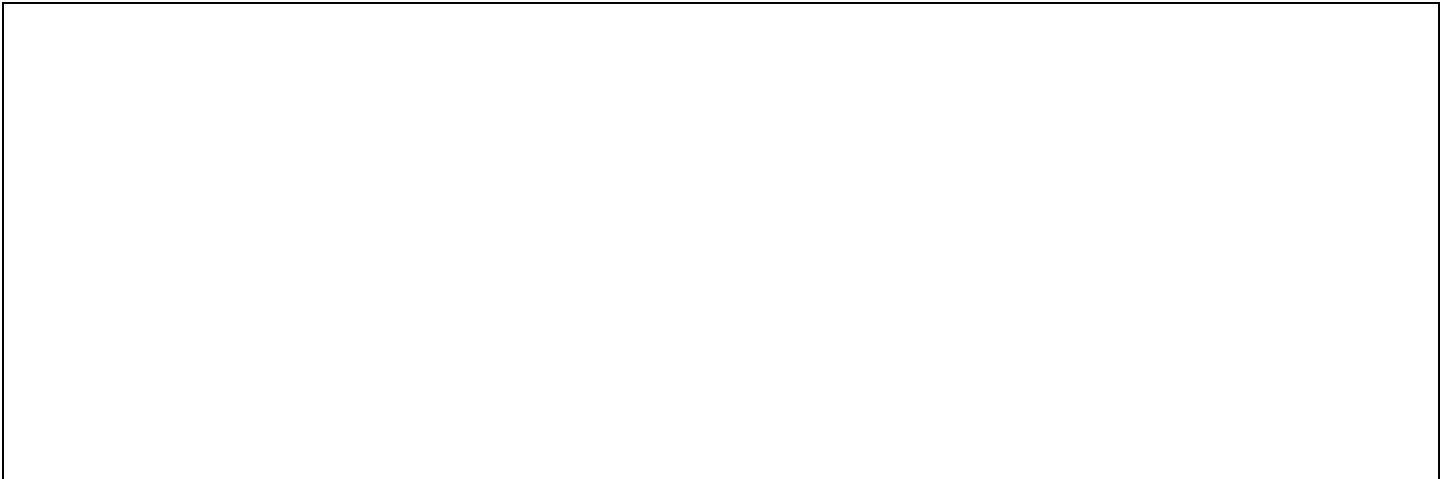
- la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **pari** e 2π - **periodica** che sull'intervallo $[0, \pi]$ coincide con la funzione $y = 3(x^2 - \pi^2)$;
- la serie di Fourier di f

$$c + 12 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

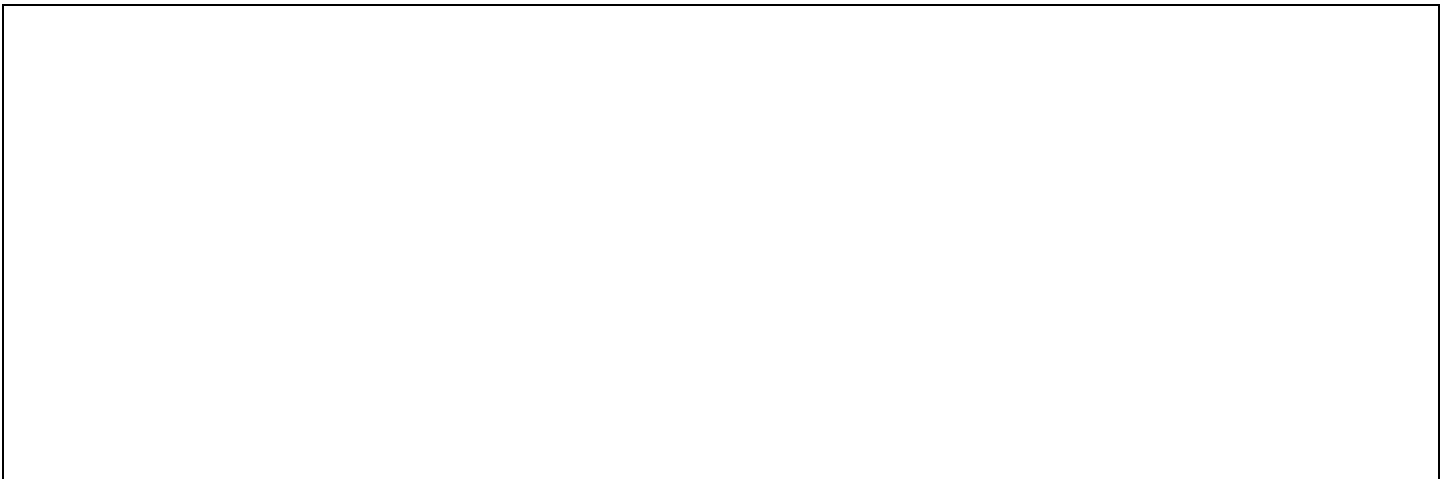
1. Disegnare il grafico di f e dire se f è continua.



2. Determinare il valore di c



3. calcolare la somma $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$



4. Dire se la serie converge assolutamente nel punto $x = -\pi$.

5. Utilizzando la formula di Parseval, calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

ESERCIZIO 2.

1. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni :

$$f(t) = t \sin(2t) \qquad g(t) = t \cos(2t).$$

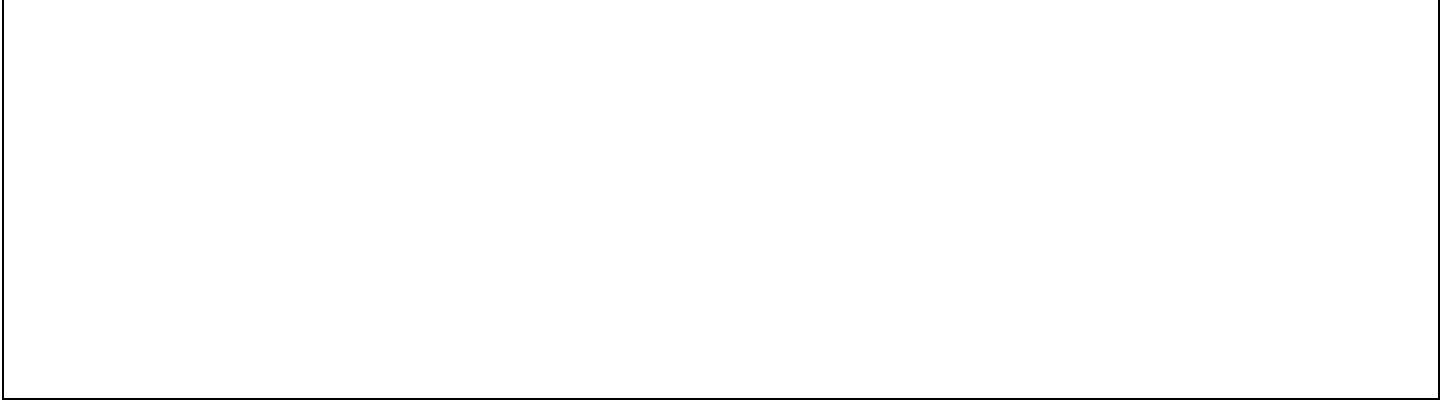
2. Mediante la trasformata di Laplace determinare le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ del sistema di equazioni differenziali :

$$\begin{cases} x'' = 4y' + 4x \\ y'' = 4y - 4x' \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

ESERCIZIO 3.

Data la funzione : $f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{1}{y} + 2xy$

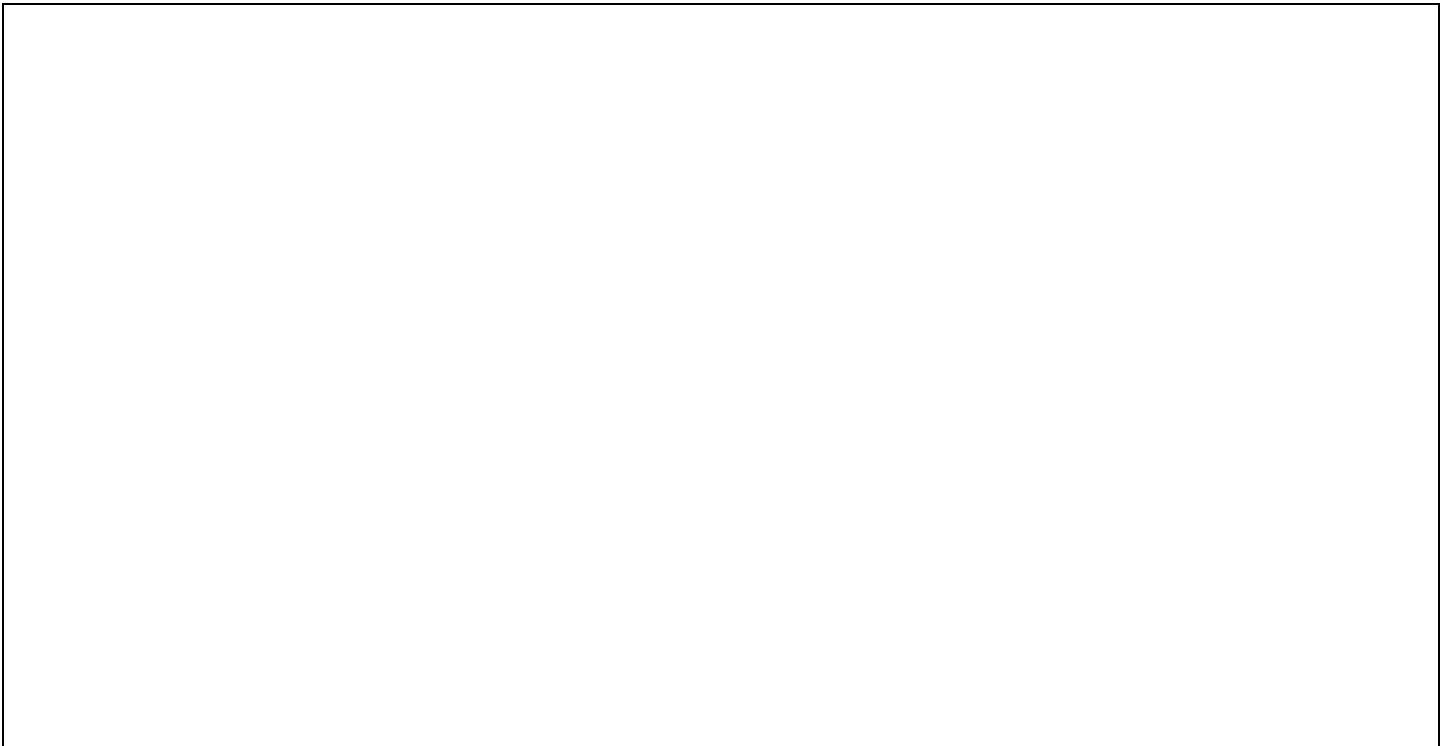
1. Determinare e rappresentare graficamente D il dominio di $f(x, y)$.



2. Discutere l'esistenza del piano tangente al grafico di f nel punto $Q_0 = (4, -1, -8)$. In caso affermativo, trovarne l'equazione.



3. Determinare i punti di critici di f e indicarne la natura.



4. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di f .



ESERCIZIO 4. Determinare le radici di $P(x) = x^2 + 2x + 1 - 2i$ e rappresentarle sul piano di Gauss

ESERCIZIO 5.

1. Sia $f(x) : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, continua tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}, l < 0$, allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ è :

CONVERGENTE

DIVERGENTE

DIPENDE DA $f(x)$

2. Verificato che $f(x) = cx$ è soluzione su \mathbf{R} dell'equazione $xy'(x) = y(x)$ per ogni $c \in \mathbf{R}$, determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy : $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$. I problemi considerati ammettono unica soluzione ?

TEORIA. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie di potenze :

1. fornire la definizione di raggio di convergenza

2. dimostrare che se la serie converge in un punto x_1 allora converge in ogni x tale che $|x| < |x_1|$

3. se la serie converge in x_1 allora converge in $-x_1$

VERO

FALSO

4. se la serie converge in x_1 allora diverge in $-x_1$

VERO

FALSO