

**Esame di Analisi II - 4 Maggio 2001 - Compito D**

**ESERCIZIO 1.** Sono dati:

- la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **pari** e  $2\pi$ - **periodica** che sull'intervallo  $[0, \pi]$  coincide con la funzione  $y = 3(\pi^2 - x^2)$  ;
- la serie di Fourier di  $f$

$$c + 12 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos(kx)$$

1. Disegnare il grafico di  $f$  e dire se  $f$  è continua.

2. Determinare il valore di  $c$

3. calcolare la somma  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

4. Dire se la serie converge assolutamente nel punto  $x = -\pi$ .

5. Utilizzando la formula di Parseval, calcolare la somma della serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

**ESERCIZIO 2.**

1. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni :

$$f(t) = t \sin(2t) \qquad g(t) = t \cos(2t).$$

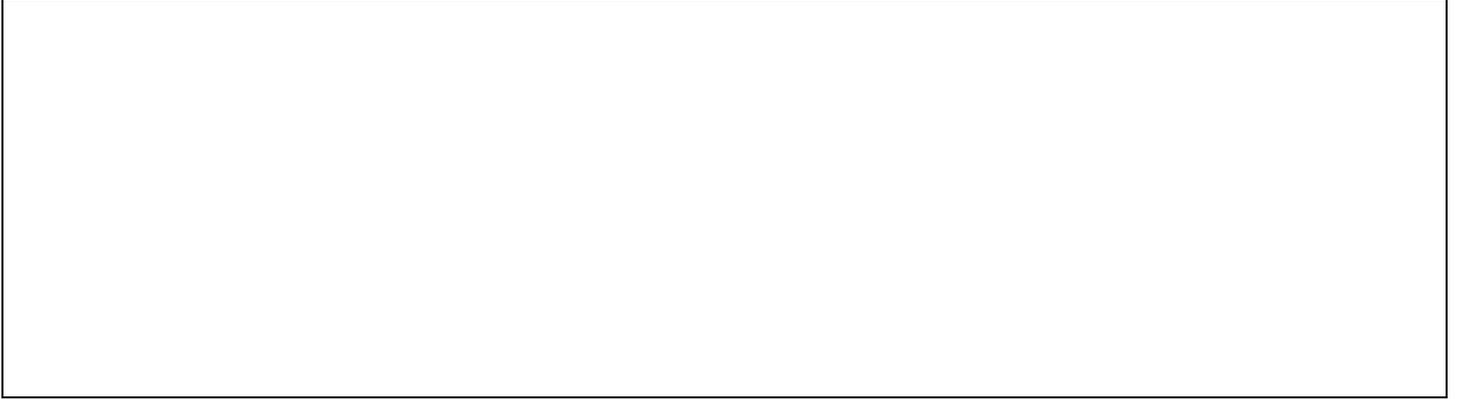
2. Mediante la trasformata di Laplace determinare le soluzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  del sistema di equazioni differenziali :

$$\begin{cases} x'' = 2y' + 4x \\ y'' = 4y - 8x' \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

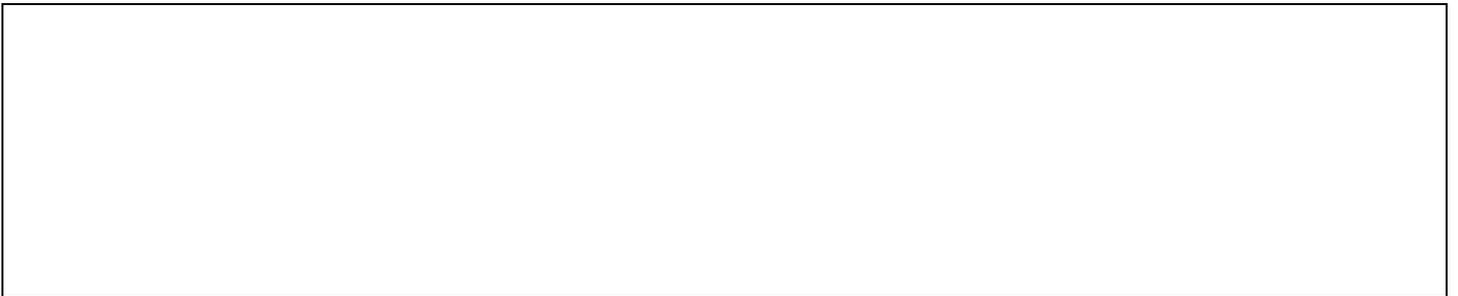
**ESERCIZIO 3.**

Data la funzione :  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 2xy$

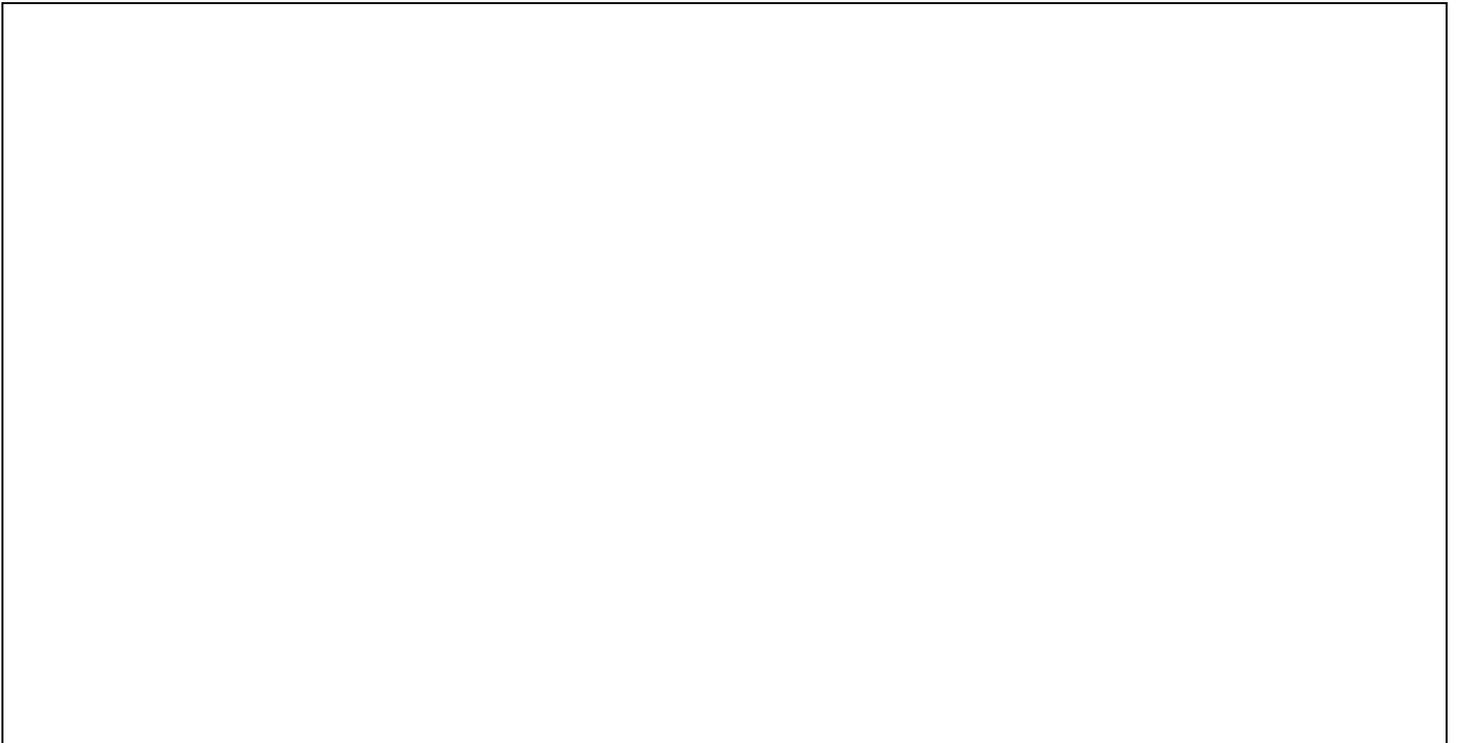
1. Determinare e rappresentare graficamente  $D$  il dominio di  $f(x, y)$ .



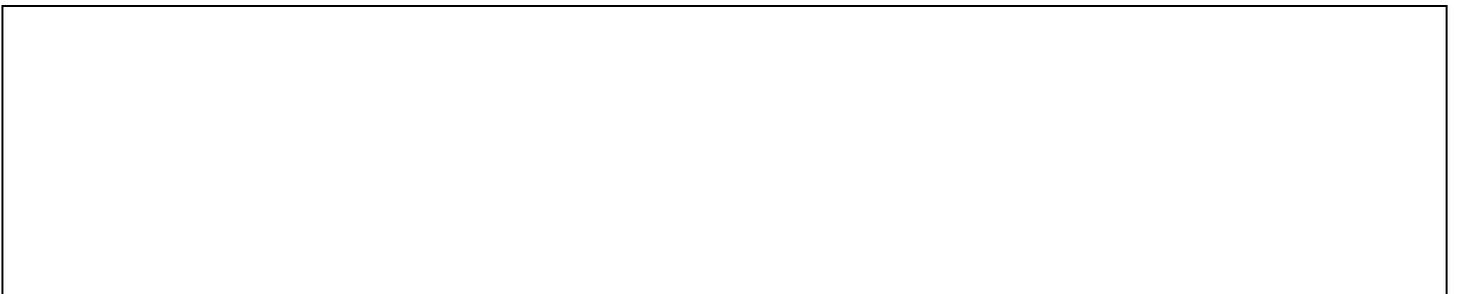
2. Discutere l'esistenza del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $Q_0 = (1, -2, -5)$ . In caso affermativo, trovarne l'equazione.



3. Determinare i punti di critici di  $f$  e indicarne la natura.



4. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di  $f$ .



**ESERCIZIO 4.** Determinare le radici di  $P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2i$  e rappresentarle sul piano di Gauss

**ESERCIZIO 5.**

1. Sia  $f(x) : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , continua tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}, l < 0$ , allora l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  è :

**CONVERGENTE**

**DIVERGENTE**

**DIPENDE DA  $f(x)$**

2. Verificato che  $f(x) = cx$  è soluzione su  $\mathbf{R}$  dell'equazione  $xy'(x) = y(x)$  per ogni  $c \in \mathbf{R}$ , determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy :  $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$  e  $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ . I problemi considerati ammettono unica soluzione ?

**TEORIA.** Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie di potenze :

1. fornire la definizione di raggio di convergenza

2. dimostrare che se la serie converge in un punto  $x_1$  allora converge in ogni  $x$  tale che  $|x| < |x_1|$

3. se la serie converge in  $x_1$  allora converge in  $-x_1$

**VERO**

**FALSO**

4. se la serie converge in  $x_1$  allora diverge in  $-x_1$

**VERO**

**FALSO**