Cognome .... Nome .... Docente ....

Esame di Analisi II - 4 Maggio 2001 - Compito D

ESERCIZIO 1. Sono dati:

- la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **pari** e $2\pi-$ **periodica** che sull'intervallo $[0, \pi]$ coincide con la funzione $y = 3(\pi^2 - x^2)$;
- la serie di Fourier di f

$$c + 12 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos(kx)$$

1. Disegnare il grafico di f e dire se f è continua.

2. Determinare il valore di c

3. calcolare la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

4. Dire se la serie converge assolutamente nel punto $x = -\pi$.

5. Utilizzando la formula di Parseval, calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

ESERCIZIO 2.

1. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni :

$$f(t) = t\sin(2t) \qquad\qquad g(t) = t\cos(2t).$$

2. Mediante la trasformata di Laplace determinare le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ del sistema di equazioni differenziali :

$$\begin{cases} x'' = 2y' + 4x \\ y'' = 4y - 8x' \end{cases} \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

ESERCIZIO 3.

Data la funzione : $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + 2xy$

1. Determinare e rappresentare graficamente D il dominio di $f(x,y)$.

2. Discutere l'esistenza del piano tangente al grafico di f nel punto $Q_0 = (1,-2,-5)$. In caso affermativo, trovarne l'equazione.

3. Determinare i punti di critici di f e indicarne la natura.

4. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di f.

ESERCIZIO 4. Determinare le radici di $P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2i$ e rappresentarle sul piano di Gauss

ESERCIZIO 5.

1. Sia $f(x) : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, continua tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}, l < 0$, allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è :

   CONVERGENTE **DIVERGENTE** **DIPENDE DA** $f(x)$

2. Verificato che $f(x) = cx$ è soluzione su $\mathbf{R}$ dell'equazione $xy'(x) = y(x)$ per ogni $c \in \mathbf{R}$, determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy : $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$. I problemi considerati ammettono unica soluzione ?

TEORIA. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie di potenze :

1. fornire la definizione di raggio di convergenza

2. dimostrare che se la serie converge in un punto x_1 allora converge in ogni x tale che $|x| < |x_1|$

3. se la serie converge in x_1 allora converge in $-x_1$ **VERO** **FALSO**

4. se la serie converge in x_1 allora diverge in $-x_1$ **VERO** **FALSO**