NUMERI COMPLESSI

Esercizi svolti

1. Calcolare le seguenti potenze di i:

   $a)\ i^2 \quad , \quad b)\ i^3 \quad , \quad c)\ i^4 \quad , \quad d)\ \dfrac{1}{i} \quad , \quad e)\ i^{34} \quad , \quad f)\ i^{-7}$

2. Semplificare le seguenti espressioni:

   $a)\ (\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}\,i) \quad , \quad b)\ (3+i)(3-i)\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}\,i\right) \quad ,$

   $c)\ \dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} \quad , \quad d)\ \overline{\overline{z}+3i}$

3. Verificare che $z = 1 \pm i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi :

   $a)\ 1+i-\dfrac{i}{1-2i} \quad , \quad b)\ (1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}\,i) \quad , \quad c)\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}-1\right)^2$

5. Mettere in forma trigonometrica e in forma esponenziale i seguenti numeri complessi:

   $a)\ z=i \quad , \quad b)\ z=1+i \quad , \quad c)\ z=\dfrac{1}{3+3i} \quad ,$

   $d)\ z=\dfrac{4i}{\sqrt{3}+i} \quad , \quad e)\ z=(1+i)(2-2i)$

6. Siano:

   $a)\ z=\dfrac{2}{\sqrt{3}-i}+\dfrac{1}{i} \quad , \quad b)\ z=\dfrac{1+i}{2-2i}$

   Scrivere in forma algebrica, in forma trigonometrica e in forma esponenziale i numeri complessi z^2 , z^6 , z^{22}.

7. Trovare le radici dei seguenti numeri complessi e disegnarle sul piano di Gauss.

   $a)\ \sqrt[4]{\sqrt{2}} \quad , \quad b)\ \sqrt{1-\sqrt{3}\,i} \quad , \quad c)\ \sqrt[3]{1-i+\sqrt{2}i}$

8. Sia $z = e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

   a) Esprimere z sia in forma algebrica sia in forma trigonometrica.

   b) Esprimere le radici cubiche di z in forma esponenziale.

9. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni delle seguenti equazioni:

   $a)\ \ z^2+3iz+4=0 \quad , \qquad b)\ \ z^4+2z^2+4=0 \quad ,$

   $c)\ \ z|z|-2z+i=0 \quad , \qquad d)\ \ z\overline{z}-z+\dfrac{i}{4}=0 \quad ,$

   $e)\ \ z^3=|z|^2$

10. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni dei seguenti sistemi:

    $(a)\ \begin{cases} \mathrm{Re}\ [\overline{z}(z+i)] \leq 2 \\ \mathrm{Im}\ z \geq 0 \end{cases}$

    $(b)\ \begin{cases} z^6+7z^3-8=0 \\ \mathrm{Re}(z)=1 \end{cases}$

11. E' data la funzione $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ così definita $f(z)=\dfrac{1+iz}{iz+i}$.

    a) Trovare tutti gli $z\in\mathbf{C}$ per cui $f(z)=z$.

    b) Trovare le controimmagini di $3+i$.

12. Sapendo che $1+i$ è radice del polinomio $p(z)=z^4-5z^3+10z^2-10z+4$, trovare le altre radici. Decomporre $p(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ e su $\mathbf{C}$.

13. Verificare che il polinomio :

    $p(z)=z^3+(1+2i)z^2+[(-\sqrt{3}+2)i-2]z-i\sqrt{3}-2$

    si annulla per $z_0=-1$ e trovare le altre radici.

    Decomporre $p(z)$ in fattori irriducibili .

14. Trovare un polinomio $p(z)\in\mathbb{R}[z]$ di grado 5, avente $a=3$ come radice semplice, $b=2-3i$ come radice di molteplicità 2, e tale che $p(0)=1$.

SOLUZIONI degli esercizi sui NUMERI COMPLESSI

1. (a) $i^2 = -1$ (per definizione)
   (b) $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$
   (c) $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
   (d) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$
   (e) $i^{34} = i^{32} \cdot i^2 = (i^4)^8 \cdot i^2 = 1^8 \cdot (-1) = -1$
   (f) $i^{-7} = (i^7)^{-1} = (i^4 \cdot i^3)^{-1} = (-i)^{-1} = \dfrac{1}{-i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

2. (a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = \sqrt{2} - i - i + \sqrt{2}i^2 = \sqrt{2} - 2i - \sqrt{2} = -2i$
   (b) $(3+i)(3-i)\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}i\right) = (9 - i^2)\ \dfrac{2+i}{10} = (9+1)\ \dfrac{2+i}{10} = 2 + i$
   (c) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \dfrac{5}{(2 - i - 2i + i^2)(3-i)} = \dfrac{5}{(1-3i)(3-i)} =$
   $= \dfrac{5}{3 - i - 9i + 3i^2} = \dfrac{5}{-10i} = \dfrac{1}{2}\ i$
   (d) $\overline{\overline{z} + 3i} = \overline{\overline{z}} + \overline{3i} = z + 3\overline{i} = z - 3i$

3. Calcoliamo $z^2 - 2z + 2$ per $z = 1 + i$:

   $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 2i - 2 - 2i + 2 \equiv 0$

   Dunque $z = 1 + i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

   Facciamo lo stesso con $z = 1 - i$:

   $(1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 \equiv 0$

   Pertanto anche $z = 1 - i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0.$

4. (a) $\left|1 + i - \dfrac{i}{1-2i}\right| = \left|1 + i - \dfrac{i(1+2i)}{1-4i^2}\right| = \left|1 + i - \dfrac{i-2}{5}\right| = \left|\dfrac{5 + 5i - i + 2}{5}\right| =$
   $= \dfrac{1}{5}|7 + 4i| = \dfrac{1}{5}\sqrt{49+16} = \dfrac{1}{5}\sqrt{65}$
   (b) $|(1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)| = |(1-i^2)|\ |1 + \sqrt{3}i| = 2\sqrt{1+3} = 4$
   (c) $\left|\left(\dfrac{1+i}{1-i} - 1\right)^2\right| = \left|\dfrac{1+i}{1-i} - 1\right|^2 = \left|\dfrac{2i}{1-i}\right|^2 = \dfrac{|2i|^2}{|1-i|^2} = \dfrac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2$
   $= \left|\dfrac{2i(1+i)}{2}\right|^2 = |i|^2\ |1+i|^2 = 1 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2$

5. (a) $z = i$

Il modulo di z è $|z| = 1$. Posto $\theta =$ Arg (z) , si ha:

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto in forma trigonometrica e in forma esponenziale:

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \ , \quad z = 1 \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$$

(b) $z = 1 + i$; $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Se $\theta =$ Arg (z) :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

In forma trigonometrica e in forma esponenziale :

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \ , \quad z = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$$

(c) $z = \dfrac{1}{3+3i} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1-i}{1-i^2} = \dfrac{1}{6}(1-i)$

$|z| = \dfrac{1}{6}\sqrt{2}$. Se $\theta =$ Arg (z) :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \theta = -\ \frac{\pi}{4}$$

In forma trigonometrica e in forma esponenziale:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\cos\left(-\ \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\ \frac{\pi}{4}\right)\right) \ , \quad z = \frac{\sqrt{2}}{6}\ e^{-i\pi/4}$$

(d) $z = \dfrac{4i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{4i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \dfrac{4(\sqrt{3}i - i^2)}{3-i^2} = 1 + \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Se $\theta =$ Arg (z)

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

In forma trigonometrica e in forma esponenziale

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \ , \quad z = 2\ e^{i\pi/3}$$

(e) $z = (1+i)(2-2i) = 2(1+i)(1-i) = 2(1-i^2) = 4$

$|z| = 4$. Se $\theta =$ Arg (z)

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \implies \theta = 0$$

In forma trigonometrica ed esponenziale

$$z = 4(\cos 0 + i\sin 0) \ , \quad z = 4\ e^{i0}$$

6. (a) $z = \dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i} = \dfrac{2(\sqrt{3}+i)}{3-i^2} + \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} - i = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\ i$

$|z| = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1$. Se $\theta =$ Arg (z)

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Calcoliamo adesso i numeri z^2 , z^6 , z^{22} .

- $|z^2| = 1^2 = 1$, Arg $(z^2) = 2$ Arg $(z) = -\frac{\pi}{3}$

  In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

  $z^2 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z^2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- $|z^6| = 1$, Arg $(z^6) = 6$ Arg $(z) = -\pi = \pi - 2\pi$.

  In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

  $z^6 = \cos\pi + i\sin\pi$, $z^6 = e^{i\pi}$, $z^6 = -1$

- $|z^{22}| = 1$, Arg $(z^{22}) = 22$ Arg $(z) = -11\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 4\pi$

  In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

  $z^{22} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $z^{22} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z^{22} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $z = \dfrac{1+i}{2-2i} = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{(1+i)^2}{1-i^2} = \dfrac{1}{4}(2i) = \dfrac{1}{2}i$

$|z| = \dfrac{1}{2}$, Arg $z = \dfrac{\pi}{2}$

Calcoliamo adesso z^2 , z^6 , z^{22}

- $|z^2| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ Arg $(z^2) = 2$ Arg $(z) = \pi$

  In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

  $z^2 = \dfrac{1}{4}\ (\cos\pi + i\sin\pi)$, $z^2 = \dfrac{1}{4}\ e^{i\pi}$, $z^2 = -\dfrac{1}{4}$

- $|z^6| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$, Arg $(z^6) = 6$ Arg $(z) = 3\pi = \pi + 2\pi$

  In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

  $z^6 = \dfrac{1}{64}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z^6 = \dfrac{1}{64}\ e^{i\pi}$, $z^6 = -\dfrac{1}{64}$.

- $|z^{22}| = \dfrac{1}{2^{22}}$, Arg $(z^{22}) = 22$ Arg $(z) = 11\pi = \pi + 10\pi$

  In forma trigonometrica, in forma esponenziale ed in forma algebrica:

  $z^{22} = \dfrac{1}{2^{22}}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z^{22} = \dfrac{1}{2^{22}}\ e^{i\pi}$, $z^{22} = -\dfrac{1}{2^{22}}$.

7. (a) $z=\sqrt[4]{\sqrt{2}}=\left(2^{1/2}\right)^{1/4}=2^{1/8}=\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{1}$

Calcoliamo le otto radici ottave del numero complesso 1. Poiché 1 ha modulo 1 e argomento 0 le otto radici ottave di 1 avranno sempre modulo 1 e argomenti:

$$\theta_i=0+\frac{2k\pi}{8}\quad(k=0,1,\ldots,7)$$

Pertanto le otto radici ottave di 2 sono

$$z_1=\sqrt[8]{2}\cdot e^{i\cdot 0}=\sqrt[8]{2}$$

$$z_2=\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(1+i)=\frac{1}{\sqrt[8]{8}}(1+i)$$

$$z_3=\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt[8]{2}i$$

$$z_4=\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(-1+i)=\frac{1}{\sqrt[8]{8}}(-1+i)$$

$$z_5=\sqrt[8]{2}\ e^{i\pi}=-\sqrt[8]{2}$$

$$z_6=\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(-1-i)=\frac{1}{\sqrt[8]{8}}(-1-i)$$

$$z_7=\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{3\pi}{2}}=-\sqrt[8]{2}i$$

$$z_8=\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt{2}}(1-i)=\frac{1}{\sqrt[8]{8}}(1-i)$$

Nel piano di Gauss, si trovano ai vertici di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza di centro $O=(0,0)$ e raggio $\sqrt[8]{2}$, di cui un vertice è nel punto $U=(\sqrt[8]{2},0)$.

(b) Il numero complesso $z=1-\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento θ tale che:

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\implies\theta=-\frac{\pi}{3}$$

Pertanto le due radici quadrate α_1 , α_2 di z hanno modulo $|\sqrt{z}|=\sqrt{2}$ e argomenti

$$\text{Arg }(\sqrt{z})=\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\quad(k=0,1)\ .$$

Quindi:

$$\alpha_1=\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2=\sqrt{2}\ e^{\frac{5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Si osservi che $\alpha_1=-\alpha_2$. (come sempre succede per le due radici quadrate di un qualunque numero complesso). Nel piano di Gauss α_1 e α_2 sono i due punti sulla circonferenza di centro $O=(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, di coordinate $A=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, simmetrici rispetto all'origine.

(c) Dobbiamo calcolare $z = \sqrt[3]{1-i+\sqrt{2i}}$.

Calcoliamo prima $\sqrt{2i} = \sqrt{2}\ \sqrt{i}$

Il numero complesso i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$; dunque le sue due radici quadrate avranno modulo 1 e argomenti $\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$ $(k=0,1)$, cioè $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

Dunque:

$$(\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+i$$

$$(\sqrt{2i})_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1-i$$

Dobbiamo adesso calcolare i numeri complessi

$$w = \sqrt[3]{1-i+1+i} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{1}$$

$$t = \sqrt[3]{1-i-1-i} = \sqrt[3]{-2i} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{-i}$$

- Calcoliamo $\sqrt[3]{1}$.

  Poiché $|1| = 1$ e $\text{Arg}\ (1) = 0$, le tre radici cubiche di 1 avranno sempre modulo 1 e argomenti $\text{Arg}\ (\sqrt[3]{1}) = 0 + \frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$.

  Dunque:

  $$(\sqrt[3]{1})_1 = 1\ , \qquad (\sqrt[3]{1})_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad (\sqrt[3]{1})_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Pertanto le tre radici cubiche di 2 sono:

  $$w_1 = \sqrt[3]{2}\ , \qquad w_2 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\ , \qquad w_3 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$$

- Calcoliamo le $\sqrt[3]{-i}$

  Poiché $-i$ ha modulo 1 e argomento $\frac{3\pi}{2}$ le radici cubiche di $-i$ avranno modulo 1 e argomenti $\text{Arg}\ (\sqrt[3]{-i}) = \frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$.

  Pertanto

  $$(\sqrt[3]{-i})_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i\ , \qquad (\sqrt[3]{-i})_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\ , \qquad (\sqrt[3]{-i})_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Dunque le tre radici cubiche di $-2i$ sono:

$$t_1 = (\sqrt[3]{-2i})_1 = \sqrt[3]{2}\ i\ , \quad t_2 = (\sqrt[3]{-2i})_2 = -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\ , \quad t_3 = (\sqrt[3]{-2i})_3 = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Concludendo, le radici cubiche cercate $\sqrt[3]{1-i+\sqrt{2i}}$ sono i 6 numeri w_1 , w_2 , w_3 , t_1 , t_2 , t_3 .

Sul piano di Gauss appartengono ad una circonferenza di raggio $\sqrt[3]{2}$, ma non sono più ai vertici di un esagono regolare (mentre w_1 , w_2 , w_3 sono vertici di un triangolo equilatero, come pure t_1 , t_2 , t_3 .)

8. (a) $z = e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\, i$

In forma algebrica dunque:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3}i)$$

Per scrivere z in forma trigonometrica, calcoliamo il modulo di z e $\theta =$ Arg (z):

$$|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+3} = \sqrt{3}\ .$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \text{Arg}\ (z) = -\frac{\pi}{3}$$

Dunque in forma trigonometrica:

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

(b) Le radici cubiche di z hanno modulo $|\sqrt[3]{z}| = \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$ e argomenti

$$\text{Arg}\ (\sqrt[3]{z}) = \frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2)\ .$$

Dunque in forma esponenziale

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{3}\ e^{i\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad (k = 0, 1, 2)$$

9. (a) $z^2 + 3iz + 4 = 0$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo:

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{9i^2 - 16}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-3i \pm 5\sqrt{-1}}{2} = \frac{-3i \pm 5i}{2}$$

da cui $z_1 = -4i$, $z_2 = i$.

Sul piano di Gauss, sono i due punti situati sull'asse delle y di coordinate $(0, -4)$ e $(0, 1)$.

(b) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

Posto $z^2 = t$, risolviamo l'equazione di secondo grado $t^2 + 2t + 4 = 0$:

$$t = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Dobbiamo ora trovare $z = \sqrt{t}$, cioè i due numeri complessi $\sqrt{-1 - \sqrt{3}i}$ e i due numeri $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$.

- Iniziamo con $\sqrt{-1 - \sqrt{3}i}$

  Poiché $-1 - \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{4\pi}{3}$ le sue due radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti rispettivamente $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3} + \pi$, cioè

$$\sqrt{-1 - \sqrt{3}i} = \pm\sqrt{2}\ e^{i\frac{2\pi}{3}} = \pm\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

- Proseguiamo calcolando $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$

  Il numero complesso $-1+\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\dfrac{2\pi}{3}$.

  Pertanto le sue due radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{\pi}{3}+\pi$; dunque:

  $$\sqrt{-1+\sqrt{3}i} = \pm\sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$$

Dunque le soluzioni dell'equazione di partenza sono i quattro numeri complessi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})\ , \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})\ , \qquad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$$

Nel piano di Gauss, appartengono ad una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$, ai vertici di un rettangolo, di coordinate $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(c) $z\,|z| - 2z + i = 0$

Posto $z = x+iy$, l'equazione diventa:

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2iy + i = 0$$

$$x\left[\sqrt{x^2+y^2}-2\right] + i\left[1-2y+y\sqrt{x^2+y^2}\right] = 0$$

Pertanto parte reale e parte immaginaria devono essere nulli. Si ottiene dunque il sistema:

$$\begin{cases} x\left[\sqrt{x^2+y^2}-2\right] = 0 \\ 1-2y+y\sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1-2y+y\ |y| = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-2 = 0 \\ 1-2y+y\sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzione, in quanto la seconda equazione diventa $1-2y+y\cdot 2 = 0$, che è impossibile.

Il primo sistema a sua volta si divide in due sottosistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \\ y^2-2y+1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ -y^2-2y+1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ y^2+2y-1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione sono i due numeri complessi $z = i$ e $z = (-1-\sqrt{2})i$.

Sul piano di Gauss, sono i due punti sull'asse delle y di coordinate $(0,1)$ e $(0,-1-\sqrt{2})$.

(d) Posto $z = x + iy$, ricordando che $z\overline{z} = |z|^2$, l'equazione diventa:

$x^2 + y^2 - x - iy + \frac{i}{4} = 0$

Dobbiamo annullare la parte reale e la parte immaginaria; otteniamo pertanto il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \frac{1}{4} - y = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x + \frac{1}{16} = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i\,\frac{1}{4}\ , \qquad z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i\,\frac{1}{4}$$

Sul piano di Gauss, sono i due punti di coordinate $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

(e) Dobbiamo risolvere l'equazione $z^3 = |z|^2$.

Posto $\rho = |z|$ e $\theta = \text{Arg}\,(z)$, il numero complesso z^3 ha modulo ρ^3 e argomento 3θ , mentre il numero $|z|^2$ ha modulo ρ^2 e argomento 0 .

Poiché il numero complesso z^3 deve coincidere con il numero $|z|^2$ i loro moduli devono coincidere e i loro argomenti devono essere uguali a meno di multipli di 2π. Si deve pertanto avere:

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 0 \ \vee \ \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono pertanto i quattro numeri complessi

$z_1 = 0$, $\qquad z_2 = 1$

$$z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\,\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\,\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nel piano di Gauss, si trovano quattro punti : l'origine e i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O e raggio 1 (di cui il punto $(1,0)$ è uno dei vertici).

10. (a) Posto $z = x + iy$, iniziamo a trasformare la prima equazione del sistema:

$\overline{z}(z + i) = (x - iy)(x + iy + i) = x^2 + y^2 + y + ix$

Pertanto il sistema risulta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y \le 2 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + y - 2 \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Nel piano di Gauss i punti che soddisfano al sistema sono i punti interni alla semicirconferenza di centro $C\left(0, -\,\frac{1}{2}\right)$ e raggio $R = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2}$, situati nel semipiano al di sopra dell'asse x (compresi i punti di frontiera).

(b) Per risolvere l'equazione $z^6+7z^3-8=0$, poniamo $t=z^3$ e troviamo l'equazione $t^2+7t-8=0$, che ha soluzioni $t=-8$ e $t=1$.

Pertanto

$z^3=-8 \quad$ oppure $\quad z^3=1$

- Se $z^3=-8$, allora $z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{-1}=2\sqrt[3]{-1}$

  Le tre radici cubiche di -1 sono -1 , $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Dunque le prime tre soluzioni dell'equazione $z^6+7z^3-8=0$ sono

  $z_1=-2$, $z_2=1+i\sqrt{3}$, $z_3=1-i\sqrt{3}$.

- Se $z^3=1$, si ha $z=\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{3}} \quad (k=0,1,2)$, cioè

  $z_4=1$, $z_5=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_6=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le soluzioni del sistema proposto sono le soluzioni dell'equazione

$z^6+7z^3-8=0$ che hanno parte reale 1, e dunque :

$z_2=1+i\sqrt{3}$, $z_3=1-i\sqrt{3}$, $z_4=1$.

Nel piano di Gauss, sono i tre punti sulla retta di equazione $x=1$ di coordinate $(1,\sqrt{3})$, $(1,0)$, $(1,-\sqrt{3})$.

11. (a) $f(z)=z \iff \dfrac{1+iz}{iz+i}=z \iff 1+iz=iz^2+iz \iff 1=iz^2 \iff z^2=-i \iff z=\sqrt{-i}$

Le due radici quadrate di $-i$ sono $\sqrt{-i}=\pm\, e^{i\frac{3\pi}{4}}=\pm\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

Dunque le soluzioni dell'equazione $f(z)=z$ sono: $z=\pm\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

(b) Le controimmagini di $3+i$ sono gli $z\in\mathbf{C}$ tali che $f(z)=3+i$. Dunque:

$\dfrac{1+iz}{iz+i}=3+i \iff 1+iz=3iz+3i-z-1 \iff z=\dfrac{3i-2}{1-2i} \iff z=\dfrac{-8-i}{5}$

Pertanto c'è una sola controimmagine di $3+i$, il numero complesso $z=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{5}\,i$

12. Poiché $p(z)=z^4-5z^3+10z^2-10z+4\in\mathbb{R}[z]$

è un polinomio a coefficienti reali, se ha la radice $1+i$ ha anche la radice $1-i$; dunque $p(z)$ si può dividere per il polinomio prodotto :

$a(z)=[z-(1+i)][z-(1-i)]=z^2-2z+2$

Per trovare gli altri fattori di $p(z)$, eseguiamo la divisione di $p(z)$ per $a(z)$ e troviamo il quoziente $q(z)=z^2-3z+2$.

Pertanto $p(z)=(z^2-2z+2)(z^2-3z+2)$.

Le radici di z^2-3z+2 sono 2 e 1.

Pertanto le radici di $p(z)$ sono: $z_1=1+i$, $z_2=1-i$, $z_3=1$, $z_4=2$.

La decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ è : $p(z)=(z-1)(z-2)(z^2-2z+2)$.

Su $\mathbf{C}$, $p(z)$ si decompone in fattori di primo grado: $p(z)=(z-1)(z-2)(z-1-i)(z-1+i)$.

13. $p(-1) = (-1)^3 + (1+2i)(-1)^2 + \left[(-\sqrt{3}+2)i - 2\right](-1) - i\sqrt{3} - 2 =$

$= -1 + 1 + 2i + (\sqrt{3}-2)i + 2 - i\sqrt{3} - 2 =$

$= 2i + \sqrt{3}i - 2i - i\sqrt{3} \equiv 0$

Pertanto $z_0 = -1$ è radice di $p(z)$.

Per trovare le altre radici, dividiamo $p(z)$ per $(z+1)$ ad esempio utilizzando il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1+2i & (-\sqrt{3}+2)i-2 & -i\sqrt{3}-2 \\ -1 & & -1 & -2i & \sqrt{3}i+2 \\ \hline & & & & \\ & 1 & 2i & -\sqrt{3}i-2 & // \end{array}$$

Dunque

$p(z) = (z+1)(z^2 + 2iz - 2 - \sqrt{3}i)$

Le radici del polinomio di secondo grado $z^2 + 2iz - 2 - \sqrt{3}i$ sono:

$z = -i \pm \sqrt{-1 + 2 + \sqrt{3}i} = -i \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$

Poiché $1 + \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\dfrac{\pi}{3}$ le sue radici quadrate sono:

$$\sqrt{1+\sqrt{3}i} = \pm\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i).$$

Dunque le tre radici di $p(z)$ sono:

$$z_0 = -1 \ , \ z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \ , \ z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right).$$

La decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili è pertanto:

$$p(z) = (z+1)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}} - i\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\right)\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)$$

14. Poiché $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ (cioè è a coefficienti reali), se ammette la radice

$b = 2 - 3i$ (con molteplicità 2) deve ammettere anche la radice $\overline{b} = 2 + 3i$ (ancora con molteplicità 2).

Dunque $p(z)$ è divisibile per $\Big([z-(2-3i)]\,[z-(2+3i)]\Big)^2 = (z^2 - 4z + 13)^2$.

Inoltre deve essere divisibile per $z - 3$ (avendo $a = 3$ come radice semplice).

Poiché deve essere di grado 5, sarà $p(z) = k(z-3)(z^2-4z+13)^2$, $k \in \mathbf{C}$.

Poiché $p(0) = 1$, si deve avere: $1 = k(-3)\cdot 169$, da cui $k = -\dfrac{1}{507}$.

Pertanto il polinomio cercato è:

$$p(z) = -\frac{1}{507}\,(z-3)(z^2-4z+13)^2.$$