Conseguenze della differenziabilità di una funzione di più variabili

Teorema. *Sia* $f : A \to \mathbf{R}$*, con* $A \subseteq \mathbf{R}^2$*,* (x_0, y_0) *interno ad* A *e* $f(x, y)$ *differenziabile in* (x_0, y_0) *allora :*

1. $f(x, y)$ *è continua in* (x_0, y_0)*;*
2. $f(x, y)$ *ammette tutte le derivate direzionali in* (x_0, y_0) *e verifica*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$$

per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^2$ *non nullo.*

Dimostrazione

1. Dalla definizione di differenziabilità (vedi (2.6) pagina 379 del libro di testo) si ha immediatamante che siccome il secondo termine tende a zero per $(h, k) \to (0, 0)$ allora anche il primo termine deve tendere a zero e quindi $f(x, y)$ risolta continua in (x_0, y_0).

2. Sia $v = (a, b)$ non nullo. Per definizione

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

che, grazie all'ipotesi di differenziabilità, risulta essere uguale a

$$\lim_{t \to 0} \frac{\nabla f(x_0, y_0) \cdot (at, bt) + o(t^2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b)t + o(t^2)}{t} = \lim_{t \to 0} (\nabla f(x_0, y_0) \cdot v + o(t)) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$