Matrice esponenziale e sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti

1.1 Matrice esponenziale

Sia $A \in \mathbf{R^{n,n}}$ una matrice quadrata $n \times n$. Per definire l'esponenziale di A, prendiamo spunto dall'identità

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k \ ,$$

valida per ogni $a \in \mathbf{R}$.
Consideriamo allora la serie di matrici

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ . \tag{1.1}$$

Occorre innanzitutto intendersi su cosa significa convergenza di una serie di matrici. Diciamo allora che, data una serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k$$

di matrici $B_k \in \mathbf{R^{n,n}}$, tale serie converge se per ogni coppia (i,j) converge la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} \ .$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 1 *Per ogni $A \in \mathbf{R^{n,n}}$ la serie* (1.1) *è convergente.*

Per studiare le proprietà della matrice esponenziale è conveniente considerare la funzione $F_A : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R^{n,n}}$ data da

$$F_A(t) = e^{tA} \ ,$$

dove $A \in \mathbf{R^{n,n}}$ è una matrice assegnata.

Teorema 2 *La funzione F_A è derivabile su $\mathbf{R}$ e*

$$F_A'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A \ .$$

Dimostrazione. Per ogni coppia (i, j) si consideri la componente $(F_A)_{ij}$ di F_A. Allora

$$(F_A)_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k)_{ij}t^k \ .$$

Questa è una serie di potenze che converge per ogni $t \in \mathbf{R}$, e dunque ha raggio di convergenza infinito. Ne consegue che essa è derivabile termine a termine su tutto $\mathbf{R}$. Perciò

$$\frac{d(F_A)_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}(A^k)_{ij}t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{k+1})_{ij}t^k \ .$$

Mettendo insieme le varie componenti sotto forma di matrice, si ottiene

$$F_A'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{k+1})t^k \ .$$

Si può ora raccogliere un fattore A e metterlo in evidenza o a sinistra o a destra della serie per ottenere la tesi. □

Corollario 1 *Valgono le seguenti proprietà:*

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA} \ , \qquad e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \ .$$

In particolare l'esponenziale di una qualunque matrice è sempre invertibile.

Dimostrazione. Si consideri, per s fissato, la funzione $G(t) = e^{-tA}e^{(t+s)A}$. Allora

$$G'(t) = -e^{-tA}Ae^{(t+s)A} + e^{-tA}Ae^{(t+s)A} = 0 \ .$$

Essendo $G(0) = e^{sA}$, vale l'identità

$$e^{-tA}e^{(t+s)A} = e^{sA}$$

per ogni s e t. Posto $s = 0$, si ottiene la prima identità. A questo punto, con s generico, si porti e^{-tA} a secondo membro per ottenere la seconda. □

Le regole di calcolo della matrice esponenziale sembrano dunque essere molto simili a quelle dell'esponenziale di numeri (reali o complessi). Una differenza molto importante è tuttavia costituita dal fatto che il prodotto tra matrici non è commutativo. Le formule viste finora riguardano operazioni tra matrici che commutano fra loro. Si osservi infatti che il Teorema 2 implica che A commuta con e^{tA}. Inoltre dal Corollario 1 segue che

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} = e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA} \ ,$$

ossia e^{tA} e e^{sA} commutano fra loro.

Le cose cambiano se si introducono più matrici che non commutano fra loro. Per esempio, la formula $e^{A+B} = e^A e^B$ *non vale in generale.* Si può dimostrare che essa vale se A e B commutano fra loro.

1.2 Sistemi differenziali lineari

Consideriamo il *sistema differenziale lineare a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \ , \end{cases}$$

dove le incognite sono n funzioni $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ di una variabile $t \in \mathbf{R}$. I coefficienti $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sono costanti reali. Se indichiamo con A la matrice dei coefficienti, il sistema può essere scritto più brevemente nella forma

$$X' = AX \ , \tag{1.2}$$

dove X è il vettore (colonna) delle incognite

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Il sistema (1.2) è un caso particolare del tipo più generale di sistema lineare a coefficienti costanti, che ha la forma

$$X' = AX + B(t) \ , \tag{1.3}$$

dove $B(t)$ è un vettore colonna di funzioni assegnate, detto *termine forzante.* Il sistema (1.2), caratterizzato dunque dal fatto che $B(t) = 0$, si dice *omogeneo.*

Teorema 3 *Le soluzioni del sistema $X' = AX$ sono tutte e sole le funzioni*

$$X(t) = e^{tA}c \ ,$$

dove $c \in \mathbf{R^n}$ è un vettore arbitrario.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $X(t) = e^{tA}c$ è soluzione. Per il Teorema 2,

$$X'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}c\right) = \frac{d\,e^{tA}}{dt}c + e^{tA}\frac{dc}{dt} = Ae^{tA}c = AX(t) \ .$$

Mostriamo ora che una qualunque soluzione $X(t)$ del sistema (1.2) è necessariamente della forma indicata. Si ponga infatti $Y(t) = e^{-tA}X(t)$ e se ne calcoli la derivata:

$$Y'(t) = \frac{d\,e^{-tA}}{dt}X(t) + e^{-tA}X'(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}AX(t) = 0 \ .$$

Quindi $Y(t)$ è costante, poniamo uguale a $c \in \mathbf{R^n}$. Dal Corollario 1 segue che $X(t) = e^{tA}c$. □

Indichiamo con $e_1, \ldots, e_n$ i vettori della base canonica di $\mathbf{R^n}$. Allora le n funzioni

$$X_j(t) = e^{tA}e_j$$

sono soluzioni del sistema (1.2). Ogni altra soluzione è combinazione lineare delle $X_j(t)$. Infatti, se $c = (c_1, \ldots, c_n)$ è un vettore generico, si ha $c = \sum c_j e_j$, per cui

$$e^{tA}c = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{tA} e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t) \ .$$

Possiamo a questo punto affermare quanto segue.

Corollario 2 *Le soluzioni del sistema* (1.2) *formano uno spazio vettoriale di dimensione n, una cui base è costituita dalle funzioni $X_j(t) = e^{tA}e_j$.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che le soluzioni del sistema non sono altro che le combinazioni lineari delle $X_j(t)$. Esse formano dunque uno spazio vettoriale con n generatori. Rimane da dimostrare che le n funzioni X_j sono linearmente indipendenti tra loro.
Consideriamo allora una loro combinazione lineare e imponiamo che sia nulla:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R} \ .$$

Ponendo $t = 0$ e osservando che $X_j(0) = e_j$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0 \ ,$$

da cui $c_j = 0$ per ogni j. □

Si dice che le funzioni $X_j(t)$ formano un *sistema fondamentale di soluzioni* del sistema. Tale nome viene dato a una qualunque base dello spazio delle soluzioni. Si noti che le X_j non sono altro che le colonne della matrice e^{tA}.

Corollario 3 *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione, uguale a

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 \ .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3, una qualunque soluzione del problema di Cauchy ha la forma $X(t) = e^{tA}c$. Imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$e^{t_0 A} c = X_0 \ ,$$

ossia

$$c = e^{-t_0 A} X_0 \ .$$

Quindi

$$X(t) = e^{tA} e^{-t_0 A} X_0 = e^{(t-t_0)A} X_0$$

è l'unica soluzione possibile. □

Teorema 4 *Sia $B(t)$ un vettore colonna di funzioni continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbf{R}$. Le soluzioni del sistema $X' = AX + B(t)$ sono tutte e sole le funzioni della forma*

$$X(t) = e^{tA}\left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, ds\right) \ ,$$

dove $c \in \mathbf{R^n}$ e t_0 è un punto fissato in I.

Dimostrazione. Se $X(t)$ è una soluzione del sistema (1.3), si ponga $Y(t) = e^{-tA}X(t)$. Allora

$$Y'(t) = -e^{-tA}AX(t) + e^{-tA}X'(t) = -e^{-tA}AX(t) + e^{-tA}\left(AX(t) + B(t)\right) = e^{-tA}B(t)\ .$$

Per il Teorema Fondamentale del calcolo integrale, fissato un punto $t_0 \in I$, si ha

$$Y(t) = c + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds\ ,$$

da cui segue la tesi. □

Possiamo allora evidenziare le proprietà dei sistemi lineari a coefficienti costanti nel modo seguente:

Sistema omogeneo: le soluzioni hanno la forma

$$X(t) = e^{tA}c = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t)\ ,$$

dove $c \in \mathbf{R^n}$ e le $X_j(t)$ sono le colonne di e^{tA}.

Sistema non omogeneo: per il Teorema 4, l'integrale generale si scrive come

$$X(t) = e^{tA}c + X_0(t)\ ,$$

dove abbiamo posto

$$X_0(t) = e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds\ .$$

In altri termini: ogni soluzione del sistema non omogeneo si ottiene sommando a una generica soluzione del sistema omogeneo associato la soluzione particolare $X_0(t)$.

1.3 Regole di calcolo della matrice esponenziale

In generale il calcolo della matrice esponenziale non è immediato. Vediamo come si risolve il problema in alcuni casi particolarmente semplici.

Caso 1. Supponiamo che la matrice A sia diagonale, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\ .$$

Si ha

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\ .$$

Caso 2. Supponiamo che la matrice A abbia un unico autovalore λ. Ovviamente λ sarà reale, perché altrimenti anche $\bar{\lambda}$ sarebbe un autovalore. Possiamo allora decomporre A come

$$A = \lambda I + N\ ,$$

dove N è una matrice la cui serie esponenziale contiene al massimo i primi n termini. Allora

$$e^{tA} = e^{t(\lambda I+N)} = e^{\lambda t}e^{tN} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k \ .$$

Esempio 1 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

L'unico autovalore di A è 4 (con molteplicità 3). Allora

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{4t}\left(I + (A-4I)t + \frac{1}{2}(A-4I)^2t^2\right) \\ &= e^{4t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + 0\right] \\ &= e^{4t}\begin{pmatrix} 1-t & t & t \\ -t & 1+t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Quindi se si considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(1) = X_0 \end{cases}$$

dove

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

la soluzione è

$$X(t) = e^{(t-1)A}X_0 = e^{4(t-1)}\begin{pmatrix} 1-2(t-1) \\ 1-2(t-1) \\ -2 \end{pmatrix} = e^{-4}e^{4t}\begin{pmatrix} 3-2t \\ 3-2t \\ -2 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

1.4 Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine superiore

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_nx = b(t) \ . \tag{1.4}$$

Essa viene detta *lineare a coefficienti costanti.* Se $b(t) = 0$, si dice che l'equazione è *omogenea.* La funzione $b(t)$ si chiama il *termine forzante.*

Secondo un metodo generale, valido per ogni equazione differenziale di ordine superiore al primo, essa può essere ricondotta a un sistema del primo ordine. Esso consiste nell'introdurre n funzioni incognite $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ corrispondenti, nell'ordine, a $x(t)$ e alle sue derivate $x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$. Le $x_j(t)$ sono allora legate dalle seguenti relazioni:

$$x_1'(t) = x_2(t) \ , \qquad \ldots\ldots \qquad x_{n-1}'(t) = x_n(t)$$
$$x_n'(t) + a_1x_n(t) + \cdots + a_nx_1(t) = b(t) \ .$$

La prima riga contiene le ovvie relazioni tra una funzione e la sua derivata, mentre l'equazione nella seconda riga non è altro che la (1.4) riscritta in altra forma.
Si perviene così al sistema del primo ordine

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + b(t). \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$X' = AX + B(t) \ , \tag{1.5}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & \\ -a_n & & \dots & & -a_1 & \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} .$$

Se $X(t)$ è soluzione del sistema (1.5), la sua prima componente $x_1(t)$ è soluzione dell'equazione (1.4), come si verifica facilmente. Viceversa, se $x(t)$ è soluzione dell'equazione (1.4), la funzione vettoriale

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

è soluzione del sistema (1.5). In questo senso si dice che l'equazione (1.4) e il sistema (1.5) sono *equivalenti.*

Queste considerazioni ci consentono di dedurre alcune conseguenze da quanto già visto per i sistemi del primo ordine.

Equazione omogenea

Cominciamo con l'equazione omogenea

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0 \ . \tag{1.6}$$

Per ricavare l'espressione esplicita delle soluzioni dell'equazione non è necessario studiare tutte le volte il sistema associato. Valgono infatti alcune regole generali, cui si può fare appello per ottenere rapidamente la risposta. Ci limiteremo ad enunciare queste regole senza dimostrazione.

Teorema 5 *Ogni soluzione dell'equazione omogenea* (1.6) *è combinazione lineare delle* n *funzioni*

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t} \ , \ te^{\lambda_1 t} \ , \ \dots \ , \ t^{m_1 - 1}e^{\lambda_1 t} \\ \dots\dots\dots \\ e^{\lambda_k t} \ , \ te^{\lambda_k t} \ , \ \dots \ , \ t^{m_k - 1}e^{\lambda_k t} \end{array}$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono le radici (eventualmente complesse) distinte con molteplicità rispettivamente $m_1, \ldots, m_k$ del polinomio caratteristico della matrice A

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \ .$$

In altri termini, ogni soluzione ha la forma

$$\sum_{j=1}^{k} p_j(t)e^{\lambda_j t} \ ,$$

dove ciascun p_j è un polinomio di grado minore o uguale a $m_j - 1$. □

Si osservi che in generale le soluzioni indicate sono a valori complessi, in quanto le radici caratteristiche λ_j possono non essere reali. Per ottenere soluzioni reali, occorre separare le parti reali dai coefficienti immaginari. Sia

$$\lambda_j = a_j + ib_j \ , \ \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$$

una coppia di radici complesse coniugate. Alle corrispondenti coppie di soluzioni complesse

$$t^h e^{\lambda_j t} \ , \ t^h e^{\bar{\lambda}_j t}$$

$(h \leq m_j - 1)$ sostituiamo le parti reali

$$t^h e^{a_j t} \cos b_j t$$

e i coefficienti dell'immaginario

$$t^h e^{a_j t} \sin b_j t \ .$$

Si ottengono in questo modo n soluzioni reali linearmente indipendenti.

Equazione non omogenea

Come per i sistemi, vale il seguente criterio.

Teorema 6 *Nota una soluzione particolare $x_0(t)$ dell'equazione* (1.4)*, ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa una qualunque soluzione dell'equazione omogenea* (1.6)*. Quindi l'integrale generale sarà dato da*

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{j=1}^{k} p_j(t)e^{\lambda_j t} \ ,$$

dove i λ_j e i p_j sono descritti nel Teorema 5. □

Vediamo come si ottiene una soluzione particolare $x_0(t)$ in alcuni casi speciali.

Teorema 7 *Sia $b(t) = p(t)e^{\alpha t}$, dove p è un polinomio di grado k e $\alpha \in C$. Allora l'equazione* (1.4) *ammette una soluzione particolare del tipo*

$$x_0(t) = q(t)t^m e^{\alpha t} \ ,$$

dove q è un polinomio di grado k e m è la molteplicità di α come radice caratteristica (si intende $m = 0$ se α non è radice caratteristica). □

Più in generale, se
$$b(t) = p_1(t)e^{\alpha_1 t} + \cdots + p_s(t)e^{\alpha_s t}$$
è una somma di termini forzanti del tipo considerato nel Teorema 7, si può applicare il *principio di sovrapposizione*: note s soluzioni $x_j(t)$ dell'equazione con termine forzante $b_j(t) = p_j(t)e^{\alpha_j t}$, la loro somma è soluzione dell'equazione con termine forzante $b(t)$.

Esempio 2 Si consideri l'equazione
$$x'' - x = e^t + 2t^2 \ .$$
Il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ ha soluzioni ± 1. L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Per trovare una soluzione particolare, consideriamo le due equazioni
$$x'' - x = e^t \ , \qquad x'' - x = 2t^2 \ .$$
Una soluzione particolare della prima equazione va cercata nella forma $x_1(t) = kte^t$. Inserendo nell'equazione, si ricava
$$2ke^t + kte^t - kte^t = e^t \ ,$$
da cui $k = 1/2$.

Passando alla seconda equazione, la soluzione particolare avrà la forma $x_2(t) = at^2 + bt + c$, in quanto 0 non è radice caratteristica. Si ha dunque
$$2a - at^2 - bt - c = 2t^2 \ ,$$
da cui $a = -2$, $b = 0$, $c = -4$.

In definitiva l'integrale generale dell'equazione data è
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}te^t - 2t^2 - 4 \ . \qquad \square$$