TRASFORMATA DI LAPLACE

Esercizi svolti

1. Determinare le trasformate di Laplace delle funzioni: $e^{-t/2}\cosh 3t$, $(e^t+\cos t)^2$, $t\sin t$.

2. Determinare le antitrasformate di Laplace delle funzioni:

$$f(s)=\frac{3s+7}{s^2-2s-3}, \qquad g(s)=\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$$

3. (a) Verificare che $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t\,dt=(1-e^{-2\pi s})\mathcal{L}\left[\sin t\right](s)$.

(b) Sia $F(t)$ la funzione 2π-periodica, uguale a $\sin t$ su $(0,\pi]$ e 0 su $(\pi,2\pi]$. Determinare $\mathcal{L}\left[F\right]$.

4. Determinare la trasformata $f(s)$ della funzione $F(t)=\begin{cases}(1+t)^2, & 0<t<1\\ 1+t^2, & 1\leqslant t.\end{cases}$

Per quali valori di s è $f(s)$ definita?

5. Calcolare (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-4t}\sin t\,dt$, (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\,\frac{1-\cos t}{t}\,dt$.

6. (a) Data $\mathcal{L}\left[t^n\right]=n!/s^{n+1}$, trovare $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^n\,dt$.

(b) Dimostrare che $\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right](s)=c\,s^{-3/2}$ dove c è una costante.

7. Partendo da $\mathcal{L}\left[\sin t\right]=1/(s^2+1)$, usare le formule per trasformare una derivata o un integrale per determinare le antitrasformate di

$$f(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}, \qquad g(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}, \qquad h(s)=\frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

8. Usare la trasformata di Laplace per trovare le soluzioni di

$$\text{(a)}\ \begin{cases}x_1'=2x_1-4x_2\\ x_2'=x_1-2x_2\end{cases} \text{con} \begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=0,\end{cases} \qquad \text{(b)}\ \begin{cases}x''+2x'+5x=e^{-t}\sin t\\ x(0)=0,\ x'(0)=0.\end{cases}$$

9. Determinare la soluzione del problema $\begin{cases}x''+x=f(t)\\ x(0)=0=x'(0)\end{cases}$ per $t>0$, nei casi in cui $f(t)$ è uguale a:

(a) $\cos t$, (b) $\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-\varepsilon)$, (c) $\delta(t)$.

TRASFORMATA DI LAPLACE
Esercizi svolti – SOLUZIONI

1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t/2}\cosh t\right] &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2-1} = \frac{4s+2}{4s^2+4s-3}.\\
\mathcal{L}\left[(e^t+\sin t)^2\right] &= \mathcal{L}\left[e^{2t}+2e^t\sin t+\sin^2 t\right]\\
&= \mathcal{L}\left[e^{2t}\right]+\mathcal{L}\left[2e^t\sin t\right]+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[1-\cos 2t\right]\\
&= \frac{1}{s-2}+\frac{2}{(s-1)^2+1}+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\Big)\\
&= \frac{1}{s-2}+\frac{2}{s^2-2s+2}+\frac{2}{s(s^2+4)}.\\
\mathcal{L}\left[t\sin t\right] &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

2.

$$f(s) = \frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3)+B(s+1)}{(s+1)(s-3)}$$

Il modo più rapido per determinare i coefficienti A e B è quello di moltiplicare la precedente equazione per $(s+1)$ e porre $s=-1$, ottenendo $A=-1$, e moltiplicare per $(s-3)$ e porre $s=3$, ottenendo $B=4$.

$$\Rightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}[f] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}+\frac{4}{s-3}\right] \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}[f] = -e^{-t}+4e^{3t}.$$

Analogamente

$$g(s) = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s+2} =$$

$$\frac{As(s+1)(s+2)+B(s+1)(s+2)+Cs^2(s+2)+Ds^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}.$$

Moltiplicando la precedente equazione per s^2 e ponendo $s=0$ si ottiene $B=\frac{1}{2}$, moltiplicando per $(s+1)$ e ponendo $s=-1$ si ottiene $C=1$ e infine moltiplicando per $(s+2)$ e ponendo $s=-2$ si ottiene $D=\frac{1}{4}$.

Quindi

$$g(s) = \frac{A}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{s+2}.$$

Ponendo inoltre $s=1$ si ha $\frac{1}{6}=A+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}$ e quindi $A=-\frac{3}{4}$.

In conclusione si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}[g] = -\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}.$$

3. (a) Sia $I = \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt$. Integrando per parti,

$$\begin{aligned} I &= \Big[- e^{-st} \cos t \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (-se^{-st}) \cos t \, dt \\ &= 1 - e^{-2\pi s} + \big[-se^{-st} \sin t \big]_0^{2\pi} + s \int_0^{2\pi} (-se^{-st} \sin t \, dt \\ &= 1 - e^{-2\pi s} + 0 - s^2 I. \end{aligned}$$

Quindi, $I(1+s^2) = 1 - e^{-2\pi s}$, e il risultato segue dal fatto che $\mathcal{L}[\sin] = 1/(s^2+1)$.

(b) Si applichi la formula

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt}{1 - e^{-2\pi s}}.$$

L'integrale risulta uguale a $(1 + e^{-s\pi})/(s^2+1)$ (vedi punto (a)) e quindi

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s^2+1} \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{1}{(s^2+1)(1 - e^{-\pi s})}.$$

4.

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^1 e^{-st}(1+2t+t^2) dt + \int_1^{\infty} e^{-st}(1+t^2) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-st} \, 2t \, dt \\ &= \mathcal{L}\left[1+t^2\right] + \Big[-\frac{1}{s} e^{-st} 2t\Big]_0^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st} 2 \, dt \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \Big[-\frac{1}{s} e^{-st} 2\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2}{s^2}(1 - e^{-s}). \end{aligned}$$

L'integrale improprio converge se $e^{-st} \to 0$ per $t \to \infty$, quindi $f(s)$ è definita per $s > 0$.

5. (a) L'integrale è uguale a $\mathcal{L}[t \sin t](4) = \dfrac{8}{(4^2+1)^2} = \dfrac{8}{289}$.

(b) L'integrale è uguale a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right](1) = \int_1^{\infty} \mathcal{L}[1 - \cos t] \, ds &= \int_1^{\infty} \Big(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\Big) ds \\ &= \left[\ln s - \tfrac{1}{2} \ln(s^2+1)\right]_1^{\infty} \\ &= \left[\tfrac{1}{2} \ln \frac{s^2}{1+s^2}\right]_1^{\infty} = \tfrac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

6. (a) L'integrale è il valore $\mathcal{L}[t^n](1)$ della trasformata di Laplace per $s = 1$, uguale a $n!$

(b) Ponendo $u = st$,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sqrt{t} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \sqrt{\frac{u}{s}} \, \frac{1}{s} du = \frac{c}{s^{3/2}},$$

dove $c = \int_0^{\infty} e^{-u} \sqrt{u} \, du$.

7.

$$f(s) = -\tfrac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,\frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[g] = \tfrac{1}{2}\,t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \tfrac{1}{2}\,t\sin t.$$

$$g(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\tfrac{1}{2}\sin 2t\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[g]\,(t) = \int_0^t \tfrac{1}{2}\sin 2u\,du = \left[-\tfrac{1}{4}\cos 2u\right]_0^t = \tfrac{1}{4}(1-\cos 2t).$$

$$h(s) = \frac{1}{s}\,f(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[h] = \int_0^t \tfrac{1}{2}u\sin u\,du = \tfrac{1}{2}\left[\sin u - u\cos u\right]_0^t = \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2}\,t\cos t.$$

8. (a) Se $g_1 = \mathcal{L}[x_1]$ e $g_2 = \mathcal{L}[x_2]$, allora

$$\begin{cases} sg_1 - 1 = 2g_1 - 4g_2 \\ sg_2 = g_1 - 2g_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (s-2)g_1 + 4g_2 = 1 \\ -g_1 + (s+2)g_2 = 0 \end{cases}.$$

Ne segue

$$\begin{cases} g_1(s) = \dfrac{s+2}{s^2} \\[2ex] g_2(s) = \dfrac{1}{s^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = 1 + 2t \\ x_2(t) = t \end{cases}.$$

(b) La trasformata della equazione è

$$(s^2+2s+5)g(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(s) = \frac{1}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+2)}.$$

È possibile scrivere

$$\frac{1}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s^2+2s+5} + \frac{B}{s^2+2s+2},$$

visto che la frazione coinvolge solo $S = s^2 + 2s$. Allora,

$$\begin{aligned} &\text{moltiplicando per } S+5 \text{ e ponendo } S=-5 \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{3} = A \\ &\text{moltiplicando per } S+2 \text{ e ponendo } S=-2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{3} = B. \end{aligned}$$

Quindi

$$g(s) = -\tfrac{1}{3}\,\frac{1}{(s+1)^2+4} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t}(-\tfrac{1}{6}\sin 2t + \tfrac{1}{3}\sin t).$$

9. (a) Ponendo $g = \mathcal{L}[x(t)]$, si ha $\mathcal{L}[x''] + \mathcal{L}[x] = 1/(s^2+1)$. Quindi,

$$s^2 g(s) + g(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = (\text{da q}\,1)\ \tfrac{1}{2}\,t\sin t.$$

(b) Dato $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$, si ha

$$s^2 g(s) + g(s) = \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{s} \quad \Rightarrow \quad g(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} - e^{-\varepsilon s}\frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 1 - \cos t - (1-\cos(t-\varepsilon))\mathcal{U}(t-\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \cos t, & t < \varepsilon \\ \cos(t-\varepsilon) - \cos t, & \varepsilon < t, \end{cases}$$

poichè $\mathcal{L}[1-\cos t] = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

(c) Dato che $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$, questa volta

$$g(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \sin t, \qquad t > 0.$$

Questa soluzione corrisponde al limite (per $\varepsilon \to 0$) di $\dfrac{1}{\varepsilon}x(t)$ dove $x(t)$ è la soluzione (b).