Soluzione del Modello di Esame di Analisi II

ESERCIZIO 1. *Data la serie di funzioni* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n+1}$:

1. *determinare $f(x)$ la somma della serie :*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n+1}=\left(\frac{x}{8}-2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n}$$

Ponendo $t=\left(\frac{x}{8}-2\right)^2$ si ottiene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$, valida per $|t|<1$.

Si conclude quindi che : $\quad f(x)=\dfrac{\left(\frac{x}{8}-2\right)}{1-\left(\frac{x}{8}-2\right)^2}$.

2. *determinare il dominio di convergenza puntuale della serie :*

Come visto al punto precedente la serie converge per $|t|<1$ e quindi per

$$\left|\left(\frac{x}{8}-2\right)^2\right|<1 \leftrightarrow \left|\frac{x}{8}-2\right|<1 \leftrightarrow -1<\left(\frac{x}{8}-2\right)<1 \leftrightarrow 1<\frac{x}{8}<3 \leftrightarrow 8<x<24.$$

3. *determinare un intervallo in cui la serie converge totalmente :*

Siccome per la teoria delle serie di potenze la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}t^n$ converge uniformemente in ogni $[a,b]\subset(-1,1)$ allora la serie in questione converge uniformemente in ogni $[a,b]\subset(8,24)$.

4. *calcolare per serie* $\displaystyle\int_{16}^{20}f(x)\,dx$:

$$\int_{16}^{20}f(x)\,dx=\int_{16}^{20}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n+1}\,dx$$

Siccome nell'intervallo $[16,20]$ la serie converge uniformemente posso applicare il teorema di integrazione per serie e ottenere

$$\int_{16}^{20}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n+1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{16}^{20}\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n+1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[8\;\frac{\left(\frac{x}{8}-2\right)^{2n+2}}{2n+2}\right]_{16}^{20}=$$

$$=8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{n+1}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{n}$$

Dallo sviluppo del logaritmo $\log(1+t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$ (valido per $t\in(-1,1]$) si ottiene per sostituzione $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}=-\log(1-t)$ e quindi si conclude che : $\displaystyle\int_{16}^{20}f(x)\,dx=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n}=-4\log\left(1-\frac{1}{4}\right)=4\log\left(\frac{4}{3}\right)$.

ESERCIZIO 2.

Data la funzione : $f(x,y) = xy - \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2}$

1. *determinare le direzioni lungo le quali la derivata direzionale di* f *calcolata in* $P_0 = (1,2)$ *è massima, minima, minima in valore assoluto.*

   Le derivate parziali di f sono: $f_x = y - x^2$ e $f_y = x - y$. Dunque il gradiente di f in P_0 vale: $\overrightarrow{\nabla_{P_0}} f = (1,-1)$

   La derivata direzionale di f nel punto P_0 risulta:

   massima se è calcolata nella direzione e nel verso di $\overrightarrow{\nabla_{P_0}} f = (1,-1)$, e dunque scegliendo il versore $\vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   minima se è calcolata nella direzione di $\overrightarrow{\nabla_{P_0}} f = (1,-1)$ e nel verso opposto , e dunque scegliendo il versore $\vec{\mathbf{u}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   minima in valore assoluto se è calcolata nella direzione ortogonale a quella di $\overrightarrow{\nabla_{P_0}} f = (1,-1)$, e dunque scegliendo i versori $\vec{\mathbf{w}} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2. *determinare i punti di stazionarietà di* f *e indicarne la natura*

   Cerchiamo i punti del dominio di f in cui si annulla il gradiente:

   $$\begin{cases} f_x = y - x^2 = 0 \\ f_y = x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

   Poiché Dom(f)=$\mathbb{R}^2$, i punti O=$(0,0)$ e A=$(1,1)$ sono entrambi punti di stazionarietà di f.

   Per capirne la natura studiamo i segni degli autovalori della matrice hessiana di f calcolata in O e in A. Calcoliamo le derivate paziali seconde di f: $f_{xx} = -2x$, $f_{yy} = -1$ e $f_{xy} = 1$

   Pertanto:

   $$\mathrm{H}_O(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{H}_A(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   $\mathrm{H}_O(f)$ è indefinita e quindi **O è un punto di sella**. $\mathrm{H}_A(f)$ invece è definita negativa a quindi **A è un punto di massimo**.

3. *Sia* $g(x,y) = \mid f(x,y) \mid$. *Dire se esiste il gradiente di* g *nel punto* $O = (0,0)$*, e, in caso affermativo, quanto vale. Dire se* $O = (0,0)$ *è un punto di stazionarietà per* g.

   Calcoliamo le derivate parziali di $g(x,y)$ in $O = (0,0)$ mediante la definizione:

   $$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_O = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mid -\frac{t^3}{3} \mid -0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{3}\frac{\mid t \mid}{t} = 0$$

   $$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_O = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mid -\frac{t^2}{2} \mid -0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t} = 0$$

   Pertanto esiste il gradiente di g nel punto O= $(0,0)$ e vale $\overrightarrow{\nabla_O} g = (0,0)$. Poiché dom$(g) = \mathbb{R}^2$, il punto O= $(0,0)$ è un punto di stazionarietà per g.

ESERCIZIO 3.
Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale :

$$\begin{cases} x'' + tx' - 2x = 1 \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Facendo la trasformata di Laplace di ambo i membri si ottiene

$$s^2\mathcal{L}[x] - sx(0) - x'(0) - \frac{d}{ds}\big(s\mathcal{L}[x] - x(0)\big) - 2\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[1]$$

e quindi

$$s^2\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[x] - s\frac{d}{ds}\big(\mathcal{L}[x]\big) - 2\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s}.$$

Ponendo $y(s) = \mathcal{L}[x](s)$ e dividendo per $-s$ l'equazione differenziale diventa

$$y' + (\frac{3}{s} - s)y = -\frac{1}{s^2}.$$

Essendo quest'ultima una equazione lineare del primo ordine con coefficienti $a(s) = 3/s - s$ e $b(s) = -s^{-2}$, si risolve determinando una primitiva $A(s) = 3\log s - s^2/2$ di $a(s)$ e utilizzando la formula risolutiva. Così facendo si ottiene

$$y(s) = \frac{e^{s^2/2}}{s^3}\left(c + \int(-\frac{1}{s^2})\ e^{-s^2/2}s^3\ ds\right) = \frac{e^{s^2/2}}{s^3}\left(c + \int(-s\ e^{-s^2/2})\ ds\right) = \frac{e^{s^2/2}}{s^3}\left(c + e^{-s^2/2}\right) = c\frac{e^{s^2/2}}{s^3} + \frac{1}{s^3}$$

Infine, ricordando che $y(s) = \mathcal{L}[x]$ e che ogni trasformata di Laplace ha la proprietà di essere infinitesima per s che tende a $+\infty$, si deduce che c deve essere uguale a 0 . La soluzione della equazione differenziale in $y(s)$ risulta quindi essere :

$$y(s) = \frac{1}{s^3},$$

e quindi, determinando l'antitrasformata di Laplace, l'unica soluzione dell'equazione iniziale risulta essere :

$$x(t) = \frac{t^2}{2}.$$

ESERCIZIO 4.
Risolvere l'equazione $z^4 + i = 0$ e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni.

$z^4 = -i = e^{i3\pi/2}$ e quindi le soluzioni sono $z = e^{i3\pi/8 + k\pi/2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$ e cioè :

$z_1 = e^{i3\pi/8} = \cos(3\pi/8) + i\sin(3\pi/8)$, $z_2 = e^{i3\pi/8} = \cos(7\pi/8) + i\sin(7\pi/8)$,
$z_3 = e^{i3\pi/8} = \cos(11\pi/8) + i\sin(11\pi/8)$ e $z_4 = e^{i3\pi/8} = \cos(15\pi/8) + i\sin(15\pi/8)$.

Le soluzioni si trovano ai vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro O $= (0, 0)$ e raggio 1.

ESERCIZIO 5.

1. *Stabilire se l'integrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+t-2}\, dt$ *è convergente*

   CONVERGE. Utilizzando $|\cos t| \le 1$ si ha che

$$\left|\frac{\cos t}{t^2+t-2}\right| \le \frac{1}{t^2+t-2} = g(t).$$

   La funzione maggiorante $g(t)$ è continua e positiva su $[2, +\infty)$ e tende a zero di ordine 2 per t che tende ad infinito. $g(t)$ risulta quindi integrabile sull'intervallo $[2, +\infty)$ e quindi per il teorema del confronto l'itegrale del testo risulta assolutamente convergente, e quindi convergente.

2. *Sia* $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\cos t}{t^2+t-2}\, dt.$ *Dire se* $F(x)$ *ha un asintoto orizzontale destro.*

   SI. Per definizione di $F(x)$ e per definizione di integrale improprio si ha

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{\cos t}{t^2+t-2}\, dt = \int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+t-2} = l \in \mathbf{R},$$

   essendo l'integrale improprio convergente come visto al punto precedente.

TEORIA. *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Definire la matrice esponenziale di A*
2. *Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza le soluzioni del sistema di equazioni differenziali* $X' = AX$ *mediante un'opportuna matrice esponenziale.*

   (Vedi i complementi di teoria di Equazioni e Sistemi Differenziali)

3. *Dire a quale sistema di equazioni differenziali è equivalente l'equazione differenziale* $x''' - 3x'' + 3x - 1 = (4t-1)e^t$.

   L'equazione differenziale è equivalente al seguente sistema di equazioni differenziali :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(t),$$

   dove: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + (4t-1)e^t \end{pmatrix}$ e $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

   Le funzioni incognite del sistema $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ sono legate alla funzione incognita $x(t)$ dell' equazione differenziale di partenza mediante le relazioni:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x'(t) \\ x_3(t) = x''(t) \end{cases}$$

   Trovare la prima funzione incognita $x_1(t)$ del sistema $\dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(t)$ equivale dunque a risolvere la nostra equazione differenziale.