

Simulazione di Analisi Matematica II VERSIONE **A**

27 aprile 2001

ESERCIZIO 1. Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

E' data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{5^n(3+4^n)} x^n$$

1. Trovarne il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza , precisando il comportamento delle serie negli estremi

2. Provare che è possibile calcolare per serie l'integrale :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{5^n(3+4^n)} x^n dx$$

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ è possibile calcolare per serie l'integrale :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{5^n(3+4^n)} t^n dt$$

e calcolarlo (per serie)

ESERCIZIO 3.

Data la funzione :

$$f(x, y) = x \log(x + 4y^2)$$

1. Descrivere algebricamente e rappresentare nel piano (Oxy) l'insieme $D = \text{Dom}(f)$. Dire se D è aperto, chiuso (o nessuno dei due), connesso (per archi).

2. Dire se f è differenziabile nel punto $P_0 = (1, 0)$. In caso affermativo, scrivere la formula di Taylor di ordine 2 di f centrata in P_0 .

3. Determinare i punti di stazionarietà di f e indicarne la natura.

ESERCIZIO 4.

E' dato il polinomio $p(z) \in \mathbf{C}[z]$:

$$p(z) = iz^4 + z^3 - z^2 + iz$$

1. Verificare che $z = i$ è una radice di $p(z)$.

Si può affermare che $z = -i$ sia un'altra radice di $p(z)$?

2. Scomporre $p(z)$ in fattori irriducibili.

3. Si considerino gli insiemi:

$$A = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)\}$$

$$R = \{z \in \mathbf{C} : p(z) = 0\}$$

(dove $p(z)$ è il polinomio sopra definito). Rappresentare R e A sul piano di Gauss . Dire se $R \subseteq A$.

ESERCIZIO 5.

1. Provare che il seguente integrale improprio è convergente, e calcolarlo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x^2} dx$$

2. Si provi che la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2}$ è convergente e si trovi una limitazione per la sua somma.