1.6 Serie di potenze - Esercizi risolti

Esercizio 1.6.1

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+2)2^n}. \tag{1.1}$$

Soluzione Per la determinazione del raggio di convergenza utilizziamo il criterio del rapporto, calcolando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2)2^n}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2}{n^2+2n+3} = \frac{1}{2}.$$

Il raggio di convergenza è quindi $R = 2$. Nel punto $x = 2$ la serie (1.1) si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)},$$

che converge (è equivalente a $\sum 1/n^2$), mentre per $x = -2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+2)},$$

che è (assolutamente) convergente. Quindi la serie (1.1) converge in $[-2, 2]$. ■

Esercizio 1.6.2

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^{3n}}{3^n}. \tag{1.2}$$

Soluzione Con la sostituzione $z = x^3$ ci riconduciamo alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{z^n}{3^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto, calcolando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3}\frac{n+2}{n+1}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

La serie (nella variabile z) ha raggio di convergenza $R_z = 3$; quindi converge per $|z| < 3$; ricordando la sostituzione fatta, la serie (1.2) converge per $|x^3| < 3$, cioè per $|x| < \sqrt[3]{3}$.

Ponendo nella (1.2) $x = \sqrt[3]{3}$, otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2},$$

che non converge in quanto il suo termine generale non tende a zero (condizione necessaria di convergenza delle serie numeriche). Ponendo invece nella (1.2) $x = -\sqrt[3]{3}$, otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n+2};$$

anche questa serie non converge in quanto il suo termine generale non ammette limite (per n pari la successione dei suoi termini tende a 1, mentre per n dispari tende a -1).

L'insieme di convergenza della (1.2) è quindi $(-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. ■

Esercizio 1.6.3

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a}, \tag{1.3}$$

dove a è un numero reale positivo.

Soluzione Determiniamo il raggio di convergenza con il criterio della radice. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^a}}$$

Possiamo scrivere $\sqrt[n]{n^a}$=$n^{a/n}$= $\exp \frac{a \ln n}{n}$. Ricordando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

abbiamo che $\frac{a \ln n}{n} \to 0$ e quindi $\exp \frac{a \ln n}{n} \to 1$. Il raggio di convergenza della (1.3) è quindi $R = 1$ per ogni valore $a > 0$.

Studiamo il comportamento nell'estremo $x = 1$; la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

converge se $a > 1$ e non converge se $a \leq 1$,

Sostituendo invece $x = -1$, abbiamo invece la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

Questa serie è convergente per ogni valore di $a > 0$, per il criterio di Leibniz. Infatti il termine generale è decrescente e infinitesimo.

L'insieme di convergenza della(1.3) è quindi $[-1, 1)$ se $a \leq 1$ e $[-1, 1]$ se $a > 1$. ■

Esercizio 1.6.4

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} = x + x^2 + x^6 + x^{24} + x^{120} + \dots \tag{1.4}$$

Soluzione La successione dei coefficienti (sempre a partire dal termine costante) è

$$0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0, ... ,$$

dove gli zeri non si ripetono con regolarità ma in blocchi "sempre più grandi" all'aumentare di n. Non è quindi possibile quindi operare una sostituzione $z = x^k$ allo scopo di ottenere una serie con coefficienti non nulli.

Per studiare l'insieme di convergenza della serie assegnata bisogna procedere direttamente. È immediato osservare che la serie diverge in $x = 1$ e in $x = -1$, mentre converge per $|x| < 1$. Infatti se $|x| < 1$ possiamo affermare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{n!}| = |x| + |x^2| + |x^6| + \ldots \leq |x| + |x^2| + |x^3| + |x^4| + |x^5| + \ldots ;$$

la serie maggiorante è la serie geometrica presa in modulo, che sappiamo essere convergente per $|x| < 1$. Dal criterio del confronto discende l'assoluta convergenza della (1.4), che ha quindi raggio di convergenza uguale a uno e insieme di convergenza $(-1, 1)$. ■

Esercizio 1.6.5

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1}. \tag{1.5}$$

Soluzione La serie assegnata non è della forma (**??**); per ricondurla a questa forma scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(x-1/2))^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-1/2)^n}{3^n+1}.$$

Con la sostituzione $z = x - 1/2$ ci riconduciamo a una serie centrata nell'origine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{3^n+1}.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 3/2$, come si verifica con il criterio del rapporto; agli estremi dell'intervallo la serie diverge (in entrambi i casi si ottiene una serie il cui termine generale non è infinitesimo), per cui l'insieme di convergenza risulta $\{z : -3/2 < z < 3/2\}$. Tenendo conto della sostituzione $z = x - 1/2$ la (1.5) ha come insieme di convergenza $\{x : -1 < x < 2\}$. ■

Esercizio 1.6.6

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni, centrato nei punti indicati, indicandone il raggio di convergenza:

a) $f(x) = \exp(1-x^2)\quad x_0 = 0$ *b)* $g(x) = \dfrac{1}{2x-3}\quad x_0 = 0$ *c)* $h(x) = \ln(1+x)\quad x_0 = 1$

Soluzione

a) Poichè $f(x) = \exp(1)\exp(-x^2)$, utilizzando lo sviluppo della funzione esponenziale

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

e operando la sostituzione $z = -x^2$, otteniamo

$$f(x) = \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

La serie esponenziale converge per ogni z reale e quindi la serie data converge per ogni x reale.

b) Possiamo calcolare lo sviluppo di $g(x)$, riconducendoci alla serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \text{per } |z| < 1. \tag{1.6}$$

Scriviamo

$$g(x) = \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{-3\left(1 - \frac{2x}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2x}{3}}$$

e sostituiamo $z = 2x/3$, ottenendo

$$g(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{3}\right)^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}\right)x^n.$$

Poichè la (1.6) converge per $|z| < 1$, tenendo conto della sostituzione effettuata, la serie che abbiamo ottenuto converge se $|\frac{2x}{3}| < 1$, vale a dire per $|x| < \frac{3}{2}$. È immediato verificare che la serie non converge nei punti $x = 3/2$ e $x = -3/2$.

c) Con la sostituzione $t = x - 1$ ci riconduciamo allo sviluppo centrato in $t_0 = 0$ della funzione $\ln(2+t)$, che scriviamo nella forma

$$\ln(2+t) = \ln\left(2\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right).$$

Utilizzando lo sviluppo della funzione

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \qquad \text{per } |z| < 1 \tag{1.7}$$

con la sostituzione $z = t/2$, otteniamo

$$\ln(2+t) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n 2^n},$$

che converge quando $|t/2| < 1$, cioè quando $|t| < 2$, e infine

$$\ln(1+x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n 2^n}.$$

Questa serie converge se $|x - 1| < 2$, cioè nell'intervallo $(-1, 3)$. Nel punto $x = 3$ converge, in quanto si riduce alla serie armonica a segni alterni. Nel punto $x = -1$ si ottiene invece la serie

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n 2^n}{n 2^n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che è divergente. ■

Esercizio 1.6.7

Sviluppare in serie di McLaurin la funzione

$$f(x) = \frac{2x-8}{x^2-8x+12}$$

precisando il raggio di convergenza. Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare $f^{(n)}(0)$ per n generico.
Soluzione Conviene decomporre la funzione $f(x)$ in fratti semplici e sviluppare le due funzioni ottenute:

$$f(x) = \frac{2x-8}{x^2-8x+12} = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-6(1-x/6)} + \frac{1}{-2(1-x/2)}$$

Utilizzando la serie geometrica (1.6), con le sostituzioni $z = x/6$ e $z = x/2$, rispettivamente, otteniamo

$$f(x) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

.

Ricordando la formula dello sviluppo in serie di Taylor, si ha che

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

e quindi

$$f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{6^{n+1}} - \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

■

Esercizio 1.6.8

Determinare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}.$$

Soluzione Con la sostituzione $z = 1 - x^2$ ci riconduciamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

che ha raggio di convergenza $R_z = 1$ e converge in $[-1, 1)$. La serie di funzioni converge allora negli x tali che $-1 \leq 1 - x^2 < 1$, vale a dire nell'insieme $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$; osserviamo che questo insieme NON è un intervallo. ■

Osservazione Nello studio degli integrali si è osservato che esistono delle funzioni elementari le cui primitive non possono essere espresse in termini di funzioni elementari. In alcuni casi, funzioni di questo tipo assumono grande importanza applicativa, ad esempio in elettronica, in ottica o nel calcolo delle probabilità. Risulta quindi conveniente definire delle nuove funzioni appunto come funzioni integrali, senza che sia possible esprimerle in termini di funzioni note.

Gli sviluppi in serie di potenze ci consentono di calcolare queste funzioni. Vediamo alcuni esempi di funzioni di questo tipo:

1. la funzione seno integrale di x, $\mathrm{Si}(x)$, che è definita come
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt;$$
2. la funzione degli errori, $\mathrm{Erf}(x)$, che è definita come
$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt;$$
3. la funzione integrale di Fresnel, $\mathrm{S}(x)$, che è definita come
$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

■

Esercizio 1.6.9

Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\mathrm{Si}(x)$ e calcolare $\mathrm{Si}(1)$ con un errore minore di 10^{-3}.

Soluzione Partiamo dallo sviluppo della funzione seno, che sappiamo essere convergente per ogni z reale:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.8}$$

Scrivendo questo sviluppo nella variabile t e dividendo per t otteniamo:

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Integriamo per serie (l'operazione è senz'altro possibile, perché lo sviluppo precedente ha raggio di convergenza infinito):

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Questo sviluppo ha raggio di convergenza infinito.

Per calcolare Si(1), calcoliamo la serie che abbiamo ottenuto per $x = 1$; otteniamo una serie numerica a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} + \dots$$

Affinché l'errore sia minore di 10^{-3}, per il teorema sulle serie a segno alterno, è sufficiente fermarci al terzo termine. Infatti il primo termine trascurato è minore di 10^{-3}, essendo $7!7 \approx 35000$.