Serie di potenze

1.1 Definizioni

Assegnati una successione $\{a_n\}$ di numeri reali e un punto x_0 dell'asse reale si dice *serie di potenze* un'espressione del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{1.1}$$

Il punto x_0 viene detto *centro* della serie e i numeri a_n *coefficienti* della serie.

In particolare concentriamo la nostra attenzione sulle serie di potenze con centro nell'origine, che hanno la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.2}$$

Le definizioni e i risultati che seguono sono riferiti al caso di serie centrate nell'origine; le modifiche necessarie per adattarle al caso generale sono del tutto evidenti e sono lasciate al lettore.

Definizione 1 *Assegnato un punto x_1 si dice che la serie (1.2)*

- **converge puntualmente** *in x_1 se risulta convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$;*
- **converge assolutamente** *in x_1 se risulta convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$.*

Tra le due nozioni di convergenza introdotte sussiste la relazione già vista nel caso delle serie numeriche: la convergenza assoluta implica la convergenza, mentre non vale il viceversa.

1.2 L'insieme di convergenza

Assegnata la serie di potenze (1.2) si pone il problema di determinare i punti dell'asse reale in cui essa converge.

È immediato notare che **la serie (1.2) converge sempre in almeno un punto, nel punto** $x = 0$.

Prima di affrontare teoricamente il problema della convergenza in punti diversi dall'origine, esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.3}$$

e fissiamo un punto x_1. Studiamo la convergenza assoluta in x_1, vale a dire il comportamento di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_1|^n}{n!}.$$

Per questa serie numerica reale a termini positivi possiamo utilizzare il criterio del rapporto; si tratta di calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_1|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x_1|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_1|}{n+1} = 0.$$

Il risultato è ovviamente indipendente dal punto scelto; possiamo concludere che la serie (1.3) converge assolutamente (e quindi puntualmente) in ogni punto dell'asse reale. ■

Esempio 2. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \tag{1.4}$$

e studiamo la convergenza assoluta in $x_1 \neq 0$. Utilizzando ancora il criterio del rapporto calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x_1|^{n+1}}{n!|x_1|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x_1| = +\infty.$$

La serie (1.4) non converge assolutamente in nessun punto dell'asse reale, eccetto l'origine.

Può restare il dubbio che la serie converga semplicemente per $x < 0$, dove è una serie a segni alterni. Per dimostrare che questo non avviene basta fare vedere che il valore assoluto del termine generale della serie non tende a zero per $n \to \infty$. La successione $n \mapsto n!|x_1|^n$ è a termini positivi ed è (almeno a partire da un certo punto in poi) monotona crescente e quindi non può tendere a zero. Infatti la disuguaglianza

$$(n+1)!|x_1|^{n+1} > n!|x_1|^n$$

equivale alla disuguaglianza

$$n+1 > \frac{1}{|x_1|}$$

che è verificata almeno da un certo valore n_0 in poi.

Possiamo quindi concludere che la serie (1.4) converge solo per $x = 0$. ■

Esempio 3. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{1.5}$$

Fissiamo $x_1 \neq 0$ e studiamo la convergenza assoluta, utilizzando il criterio della radice. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_1|}{\sqrt[n]{n}} = |x_1|.$$

Quindi la serie (1.5) converge assolutamente per $|x_1| < 1$; per $x_1 = 1$ si riduce alla serie armonica (e quindi diverge), mentre per $x_1 = -1$ si riduce alla serie armonica a segni alterni, che converge semplicemente, ma non assolutamente. Con considerazioni analoghe a quelle dell'esempio precedente si può far vedere che la serie non converge per $|x| > 1$ in quento il suo termine generale non tende a zero. Possiamo concludere che la serie di potenze (1.5) converge nell'intervallo $[-1, 1)$. ■

Esempio 4 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \tag{1.6}$$

Procedendo come negli esempi precedenti possiamo dimostrare che questa serie converge assolutamente per $|x_1| < 1$, converge in $x_1 = 1$ e $x_1 = -1$ e non converge per $|x_1| > 1$. L'insieme di convergenza della serie (1.6) quindi l'intervallo $[-1, 1]$. ■

Gli esempi appena visti riassumono le possibili situazioni che si presentano: il comportamento di una serie di potenze è determinato dalla proprietà presentata nel seguente teorema.

Teorema 1 *Si consideri la serie di potenze (1.2) e due punti $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$. Allora*

- *se la serie converge in x_1 allora essa converge assolutamente per tutti i punti x tali che $|x| < |x_1|$;*
- *se la serie non converge in x_2 allora essa non converge in tutti i punti x tali che $|x| > |x_2|$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la serie converga in $x_1 \neq 0$; consideriamo un punto $x \neq 0$, tale che $|x| < |x_1|$. Si ha che

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \frac{|x^n|}{|x_1^n|} = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n .$$

L'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che la serie converge, per ipotesi, nel punto x_1; il suo termine generale è quindi infinitesimo e la quantità $|a_n x_1^n|$ è limitata.

La disuguaglianza che abbiamo ottenuto ci dice che il termine generale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

è maggiorato da quello della serie

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n .$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione minore di uno e quindi convergente. Il criterio del confronto ci permette di concludere che la serie (1.2) è assolutamente convergente per ogni x tale che $|x| < |x_1|$.

Per dimostrare la seconda parte, basta osservare che, per la prima parte del teorema, se la serie convergesse in x tale che $|x| > |x_2|$, allora dovrebbe convergere anche nel punto x_2, contrariamente all'ipotesi. ■

Osservazione Si osservi che nel teorema precedente la convergenza (o la non convergenza) della serie in x_1 non fornisce nessuna informazione sul comportamento della serie nel punto $-x_1$. ■

Osservazione Il teorema precedente si può interpretare intuitivamente dicendo che la convergenza in un punto $x_1 \neq 0$ ci "fa guadagnare" la convergenza in tutti i punti dell'intervallo di centro l'origine di cui x_1 è un estremo, mentre la non convergenza in $x_2 \neq 0$ ci "fa perdere" la convergenza nelle due semirette $|x| > |x_2|$.

Quando dobbiamo determinare la convergenza di una serie di potenze, si hanno due casi:

1. non si ha la convergenza per nessun $x_1 \neq 0$;
2. si ha la convergenza in un $x_1 \neq 0$; allora possiamo provare con un valore maggiore (in modulo) e ampliare l'intervallo di convergenza; e anche qui abbiamo due casi:
   (a) possiamo verificare che c'è convergenza per una successione di punti che diventa arbitrariamente grande in modulo (e quindi c'è convergenza in tutto l'asse reale) oppure
   (b) a un certo punto troviamo un valore per cui la serie non converge; allora necessariamente la convergenza è limitata a un intervallo.

Possiamo concludere affermando che si presentano tre possibili situazioni per la convergenza di una serie di potenze:

- la serie converge solo in $x = 0$;
- la serie converge all'interno di un intervallo $(-R, R)$ e non converge per $x > R$ e per $x < -R$;
- la serie converge in ogni punto dell'asse reale. ■

Per descrivere queste tre situazioni si introduce il concetto di *raggio di convergenza* della serie di potenze.

Definizione 2 *Il raggio di convergenza R della serie (1.2) è l'estremo superiore dell'insieme dei numeri reali in cui la serie converge:*

$$R = \sup\{x \in \mathbf{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge } \}.$$

Se è noto il raggio di convergenza, sono note le principali caratteristiche della serie di potenze; infatti vale il seguente risultato.

Teorema 2 *Se la serie (1.2) ha raggio di convergenza R, allora*

1. *Se $R = 0$ la serie converge solo per $x = 0$*
2. *Se $R > 0$ allora la serie converge assolutamente in $(-R, R)$ e converge totalmente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-R, R)$;*
3. *Se $R = \infty$ allora la serie converge assolutamente per ogni x reale e converge totalmente in ogni intervallo $[a, b]$.*

Osservazione Se la serie di potenze è centrata in $x_0 \neq 0$ il teorema precedente può essere riformulato nei seguenti termini:

1. Se $R = 0$ la serie converge solo per $x = x_0$
2. Se $R > 0$ allora la serie converge assolutamente in $(x_0 - R, x_0 + R)$ e converge totalmente in ogni intervallo $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$;
3. Se $R = \infty$ allora la serie converge assolutamente per ogni x reale e converge totalmente in ogni intervallo $[a, b]$. ■

1.3 Determinazione del raggio di convergenza

Il risultato precedente ci mostra l'utilità della conoscenza del raggio di convergenza per la determinazione delle proprietà di una serie. Per questo motivo, è importante trovare dei metodi che permettono di calcolarlo, senza ricorrere allo studio diretto della convergenza della serie nei vari punti dell'asse reale. A questo scopo, si hanno i seguenti teoremi.

Teorema 3 (Criterio della radice) *Data la serie di potenze (1.2), se esiste* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ *allora*

- $R = 0$ *se* $l = \infty$
- $R = \infty$ *se* $l = 0$
- $R = 1/l$ *se* l *è finito e non nullo.*

Teorema 4 (Criterio del rapporto) *Data la serie di potenze (1.2), se* $a_n \neq 0$ *ed esiste* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ *allora*

- $R = 0$ *se* $l = \infty$
- $R = \infty$ *se* $l = 0$
- $R = 1/l$ *se* l *è finito e non nullo.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima delle proposizioni; la dimostrazione della seconda può essere svolta in modo analogo.

Applichiamo il criterio della radice alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo, per l'ipotesi del teorema,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x|;$$

Se $l = 0$ il limite precedente è sempre nullo e quindi, per il criterio della radice per le serie numeriche, la serie è assolutamente convergente per ogni x.

Se invece l è infinito la serie non converge per nessun x diverso da zero. Se infine l è un numero reale si ha la convergenza assoluta se

$$l|x| < 1, \qquad \text{vale a dire} \qquad |x| < \frac{1}{l},$$

mentre non si ha convergenza nel caso in cui

$$l|x| > 1, \qquad \text{vale a dire} \qquad |x| > \frac{1}{l}.$$

■

Esempio 1. Determiniamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{n!}.$$

Conviene applicare il criterio del rapporto e calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\frac{1}{n+1}=0.$$

Il raggio di convergenza della serie è quindi infinito. ■

Esempio 2. Determiniamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^n}{n+1}.$$

In questo caso conviene utilizzare il metodo della radice; si tratta di calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}=+\infty,$$

in quanto il numeratore tende all'infinito, mentre il denominatore tende a uno. La serie di potenze considerata ha quindi raggio di convergenza nullo. ■

Esempio 3. Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{4n}}{3^n}.$$

Questo esempio mostra come in alcuni casi il teorema precedente non sia applicabile direttamente, ma richieda una sostituzione preliminare nella serie.

Nella serie proposta compaiono solo le potenze di x con esponenti che sono multipli di 4. La successione dei coefficienti comprende dei valori nulli, ripetuti con legge periodica. In particolare essa risulta (a partire dal termine costante)

$$0,0,0,0,1/3,0,0,0,2/9,0,0,0,3/27,\ldots.$$

Il calcolo del limite della radice è difficile, mentre quello del rapporto non ha senso per la presenza di coefficienti nulli. Per ovviare a questa difficoltà si può operare un cambiamento di variabile e porre $z=x^4$, per cui la serie assegnata si trasforma nella

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{3^n},$$

il cui raggio di convergenza può essere determinato calcolando

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3};$$

la serie nella variabile z converge per $|z|<3$; sostituendo si ottiene che la serie assegnata converge per $|x|^4<3$, cioè per $|x|<\sqrt[4]{3}$. ■

1.4 Operazioni sulle serie di potenze

Vogliamo qui esaminare la possibilità di sommare e moltiplicare serie di potenze e determinare il raggio di convergenza delle serie ottenute. A riguardo della somma, si ha il seguente risultato.

Teorema 5 *Assegnate due serie di potenze*

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad\qquad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

con raggio di convergenza R_1 ed R_2 rispettivamente, si ha che la serie somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

ha raggio di convergenza maggiore o uguale al minimo tra R_1 ed R_2.

Osservazione Nel caso in cui R_1 ed R_2 siano diversi (ad esempio $R_1 < R_2$) allora la serie somma ha come raggio di convergenza proprio il minimo dei due.

Infatti, preso un punto x_1 tale che $R_1 < |x| < R_2$ la serie Σ_1 non converge in x, mentre la serie Σ_2 converge; per i risultati visti sulle serie numeriche, la serie somma non è convergente.

Nel caso in cui $R_1 = R_2$ si possono invece avere, fuori dall'intervallo di convergenza, delle cancellazioni in modo tale che la somma converga. Non approfondiamo questo argomento. ■

Assegnate due serie di potenze si può definirne il prodotto, detto *prodotto alla Cauchy* delle due serie.

Teorema 6 *Assegnate due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

con raggio di convergenza R_1 ed R_2 rispettivamente, si ha che la serie prodotto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \Big) x^n$$

ha raggio di convergenza maggiore o uguale al minimo tra R_1 ed R_2.

1.5 Serie di potenze, derivazione e integrazione

In questo paragrafo vediamo le relazioni che esistono tra le serie di potenze e le operazioni di derivazione e integrazione.

Definizione 3 *Assegnata la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si dice sua serie derivata *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

ottenuta derivando formalmente termine a termine la serie.

Vale il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 7 *Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Una importante conseguenza del teorema precedente è data dal seguente risultato, che ci dice che la somma di una serie di potenze è una funzione molto regolare.

Teorema 8 *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ e sia $f(x)$ la sua somma in $(-R, R)$. Allora la funzione $f(x)$ è derivabile con derivate continue di ogni ordine in $(-R, R)$ (vale a dire $f(x) \in C^{\infty}(R, R)$) e la derivata n-esima di $f(x)$ può essere calcolata derivando n volte la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Esempio 1. Sappiamo che vale la relazione

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \text{per } |x| < 1.$$

Il teorema precedente ci dice la funzione $f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$ ammette per $|x| < 1$ lo sviluppo ottenuto derivando termine a termine la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, mentre la la funzione $f''(x)$ ammette lo sviluppo $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ e così via. ■

Possiamo anche integrare una serie di potenze.

Teorema 9 *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ e sia $f(x)$ la sua somma in $(-R, R)$. Allora, per ogni $x \in (-R, R)$ vale la relazione*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Esempio 2. Sempre dalla relazione

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \text{per } |z| < 1,$$

con la sostituzione $z = -x^2$ otteniamo lo sviluppo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad \text{per } |x| < 1.$$

Applicando il teorema precedente ottenuiamo lo sviluppo della funzione arcotangente:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

che vale per $|x| < 1$. ■

Osservazione Il teorema specifica che i raggi di convergenza coincidono, ma non dice niente sul comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza. Si può, in modo impreciso, affermare che l'operazione di derivazione può "peggiorare" il comportamento della serie agli estremi, mentre l'operazione di integrazione lo può "migliorare".

Consideriamo la serie

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

e la sua serie derivata

$$\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};$$

entrambe hanno raggio di convergenza uguale a uno. La serie Σ_1 converge in $[-1,1)$, mentre la Σ_2 converge in $(-1,1)$. ■