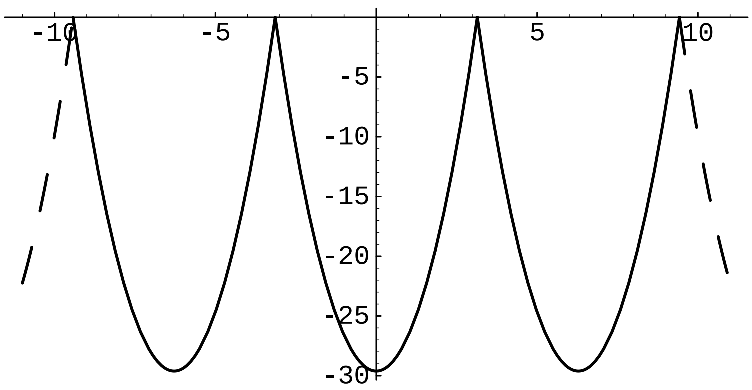
SVOLGIMENTO Esame di Analisi II - 4 Maggio 2001 - Compito B

ESERCIZIO 1. Sono dati:

- la funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **pari** e $2\pi-$ **periodica** che sull'intervallo $[0,\pi]$ coincide con la funzione $y=3(x^2-\pi^2)$;
- la serie di Fourier di f

$$c+12\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\ \cos(kx)$$

1. *Disegnare il grafico di f e dire se f è continua.*



f è continua perché la funzione $y=3(x^2-\pi^2)$ è continua e inoltre $f(\pi^-)=f(\pi^+)=0$.

2. *Determinare il valore di c*

$$c=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}3(x^2-\pi^2)\ dx=\frac{3}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}-\pi^2x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{3}-\pi^3\right]=-2\pi^2$$

3. *Calcolare la somma* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$

Poiché la serie converge puntualmente nel punto $x=0$, si ha $f(0)=c+12\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\ \cos(0)$. Pertanto:

$$-3\pi^2=-2\pi^2+12\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2},$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\ \frac{\pi^2}{12}$$

4. *Dire se la serie converge assolutamente nel punto $x=-\pi$.*

La serie converge assolutamente nel punto $x=-\pi$, in quanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(-k\pi)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

e la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ è convergente.

5. *Utilizzando la formula di Parseval, calcolare la somma della serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

Ricordiamo la formula di Parseval per una funzione pari:

$$2\int_0^{\pi} f^2(x)\ dx = \pi\left(2c^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2\right).$$

Nel nostro caso:

$$2\int_0^{\pi} 9(x^2-\pi^2)^2\ dx = \pi\left(8\pi^4 + \sum_{k=1}^{+\infty} 12^2\frac{1}{k^4}\right),$$

e quindi

$$\frac{48\pi^5}{5} = \pi\left(8\pi^4 + 144\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\right).$$

Ricaviamo infine

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

ESERCIZIO 2.

1. *Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni :*

$$f(t) = t\sin(2t) \qquad\qquad g(t) = t\cos(2t).$$

Dalla tabella delle trasformate di Laplace abbiamo che

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} \qquad\qquad \mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4}.$$

Utilizzando le regole di derivazione

$$\mathcal{L}[t\sin 2t] = -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} = \frac{4s}{(s^2+4)^2} \qquad\qquad \mathcal{L}[t\cos 2t] = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}.$$

2. *Mediante la trasformata di Laplace determinare le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ del sistema di equazioni differenziali :*

$$\begin{cases} x'' = 4y' + 4x \\ y'' = 4y - 4x' \end{cases} \qquad x(0)=0,\quad y(0)=0,\quad x'(0)=0,\quad y'(0)=3.$$

Posto $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, trasformiamo le equazioni, tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} s^2X(s) = 4sY(s) + 4X(s) \\ s^2Y(s) - 3 = 4Y(s) - 4sX(s) \end{cases}$$

Possiamo ricavare $X(s)$ dalla prima equazione, ottenendo $X(s) = \dfrac{4sY(s)}{s^2-4}$, e sostituirlo nella seconda. Così facendo si ottiene

$$Y(s) = \frac{3(s^2-4)}{(s^2+4)^2},$$

e quindi

$$X(s) = \frac{12s}{(s^2+9)^2}.$$

Tenendo conto dei risultati ottenuti al punto precedente, concludiamo che

$$x(t) = 3t\sin 2t, \qquad\qquad y(t) = 3t\cos 2t.$$

ESERCIZIO 3.

Data la funzione : $f(x,y)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}+2xy$

1. *Determinare e rappresentare graficamente D il dominio di $f(x,y)$.*

$$Dom(f)=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\neq 0 \wedge y\neq 0\}$$

Pertanto il dominio di f è costituito da tutto il piano (Oxy) eccetto i punti degli assi coordinati.

2. *Discutere l'esistenza del piano tangente al grafico di f nel punto $Q_0=(4,-1,-8)$. In caso affermativo, trovarne l'equazione.*

Il punto $Q_0=(4,-1,-8)$ è il punto del grafico di f corrispondente al punto $P_0=(4,-1)\in Dom(f)$. Pertanto si può trovare il piano tangente al grafico di f in Q_0 se e solo se f è differenziabile in P_0.
Calcoliamo le due derivate parziali di f :

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{4}{x^2}+2y \\[2ex] f_y=-\dfrac{1}{y^2}+2x \end{cases}$$

Poiché f_x e f_y sono continue in tutti i punti interni al dominio, f è differenziabile in P_0. L'equazione del piano tangente risulta:
$z=-8-\dfrac{9}{4}(x-4)+7(y+1)$ e dunque $9x-28y+4z-32=0$.

3. *Determinare i punti di critici di f e indicarne la natura.*

Cerchiamo i punti di stazionarietà di f:

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{x^2}+2y=0 \\[2ex] -\dfrac{1}{y^2}+2x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{2}{x^2} \\[2ex] -\dfrac{x^4}{4}+2x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{2}{x^2} \\[2ex] x(8-x^3)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque il punto A$=\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ è l'unico punto di stazionarietà di f. Calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$\begin{cases} f_{xx}=\dfrac{8}{x^3} \\ f_{xy}=2 \\ f_{yy}=\dfrac{2}{y^3} \end{cases}$$

Dunque la matrice hessiana di f calcolata in A risulta:

$$H_A(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $H_A(f)$ è $P(T)=T^2-17T+12$ e ha due radici positive. Dunque A è un punto di minimo relativo.

4. *Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di f.*

Non esistono punti di massimo o minimo assoluti di f, in quanto f non è limitata, né superiormente né inferiormente. Infatti, ad esempio, se consideriamo la funzione $f(x,y)$ ristretta alla retta di equazione parametrica $(x=t, y=t)$, otteniamo $f(t,t)=\left(\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{t}+2t^2\right)$, funzione non limitata di una variabile essendo

$$\lim_{t\to 0^{\pm}}\left(\frac{4}{t}+\frac{1}{t}+2t^2\right)=\pm\infty.$$

ESERCIZIO 4.

Determinare le radici di $P(x) = x^2 + 2x + 1 - 2i$ e rappresentarle sul piano di Gauss

$$x^2 + 2x + 1 - 2i = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1 - (1 - 2i)} = -1 \pm \sqrt{2i} = -1 \pm \sqrt{2}\sqrt{i}$$

Calcoliamo separatamente le due radici quadrate di i.

Poiché il numero complesso i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$, le sue radici hanno modulo 1 e argomenti $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4} + \pi$.

Pertanto $\sqrt{i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Dunque le soluzioni della nostra equazione sono i due numeri complessi:

$x_1 = -1 + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 + (1 + i) = i$

$x_2 = -1 - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 - (1 + i) = -2 - i$

Sul piano di Gauss sono rappresentate dai due punti A_1=(0,1) e A_2=(-2,-1).

ESERCIZIO 5.

1. *Sia $f(x) : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, continua tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}, l < 0$, allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ è :*

   $\boxed{\textbf{CONVERGENTE}}$ $\boxed{\textbf{DIVERGENTE}}$ $\boxed{\textbf{DIPENDE DA } f(x)}$

   L'integrale $I = \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ è divergente negativamente.

   Infatti, poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l < 0$, per il teorema di permanenza del segno la funzione $f(x)$ risulta definitivamente minore di una costante negativa, ad esempio, di $l/2$; in altri termini esiste un punto $\bar{x}$ per cui $f(x) < l/2$ per $x > \bar{x}$. Quindi

   $$I = \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\bar{x}} f(x)\, dx + \int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\, dx < \int_1^{\bar{x}} f(x)\, dx + \int_{\bar{x}}^{+\infty} \frac{l}{2}\, dx.$$

   Quest'ultimo integrale è divergente (a $-\infty$) e quindi, per il criterio del confronto, anche I è divergente a $-\infty$.

2. *Verificato che $f(x) = cx$ è soluzione su $\mathbf{R}$ dell'equazione $xy'(x) = y(x)$ per ogni $c \in \mathbf{R}$, determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy : $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} xy'(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$. I problemi considerati ammettono unica soluzione ?*

   Per verificare che la funzione $f(x) = cx$ è soluzione su $\mathbf{R}$ dell'equazione $xy'(x) = y(x)$ per ogni $c \in \mathbf{R}$ è sufficiente verificare che la funzione $f(x)$ risulta essere derivabile su $\mathbf{R}$ e che sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene un'identità valida per ogni $x \in \mathbf{R}$.

   Il primo problema di Cauchy ammette unica soluzione. Per la determinazione di una soluzione è sufficiente verificare che la condizione $y(1) = 2$ impone $c = 2$. Per verificarne l'unicità è necessario scrivere l'equazione in forma normale

   $$y' = \frac{1}{x} y(x)$$

   e utilizzare il teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy (vedi pag. 291 del libro di testo).

   Il secondo problema di Cauchy ammette invece le infinite soluzioni $f(x) = cx$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, essendo la condizione $y(0) = 0$ verificata per ogni scelta di c.

TEORIA. *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *una serie di potenze :*

1. *fornire la definizione di raggio di convergenza*
2. *dimostrare che se la serie converge in un punto* x_1 *allora converge in ogni* x *tale che* $|x| < |x_1|$

   Per la definizione di raggio di convergenza e la dimostrazione del teorema si faccia riferimento agli appunti integrativi del testo sulle serie di potenze.
3. *se la serie converge in* x_1 *allora converge in* $-x_1$
4. *se la serie converge in* x_1 *allora diverge in* $-x_1$

Entrambe le affermazioni sono false.
Per quanto riguarda la prima possiamo portare come controesempio la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

che converge in $x_1 = -1$ (dove si riduce alla serie armionica a segni alterni), mentre diverge in $-x_1 = 1$, dove si riduce alla serie armonica.

Come controesempio per la seconda affermazione possiamo considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},$$

che converge sia in $x_1 = 1$ che in $-x_1 = -1$.