

Trasformata di Fourier

Definizioni:

- $\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x} dx$; dove f è assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$ e derivabile a tratti su ogni intervallo limitato.
- $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$, funzione (gradino) di Heaviside;
- $p_T(x) = H\left(x + \frac{T}{2}\right) - H\left(x - \frac{T}{2}\right)$.

Nei seguenti esercizi calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni utilizzando le tavole di trasformazione e le opportune proprietà:

Esercizio 1:

- 1.a) $\mathcal{F}[H(x-3)e^{-(x-3)}]$
- 1.b) $\mathcal{F}\left[H\left(x + \frac{a}{2}\right) - H\left(x - \frac{a}{2}\right)\right]$
- 1.c) $\mathcal{F}\left[p_a\left(x - \frac{a}{2}\right)\right]$

Esercizio 2:

- 2.a) $\mathcal{F}\left[e^{ix}[H(x) - H(x-4)]\right]$
- 2.b) $\mathcal{F}[p_4(x) \cos 3x]$

Esercizio 3:

- 3.a) $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}H(x-5)\right]$
- 3.b) $\mathcal{F}[(x-1)p_2(x)]$
- 3.c) $\mathcal{F}[3x[H(x) - H(x-4)]]$

Esercizio 4:

- 4.a) $\mathcal{F}\left[5\frac{\sin 4x}{2x}\right]$
- 4.b) $\mathcal{F}\left[3\frac{\sin 2x}{5x}\right]$

Esercizio 5:

- 5.a) $\mathcal{F}\left[-2p_1\left(x + \frac{5}{2}\right) + p_4(x) - 2p_1\left(x - \frac{5}{2}\right)\right]$
- 5.b) $\mathcal{F}\left[-2(x+2)[H(x+2) - H(x+1)] + 2x[H(x+1) - H(x-1)] - 2(x-2)[H(x-1) - H(x-2)]\right]$

Esercizio 6:

- 6.a) $\mathcal{F}[(x+1)p_2(x) + (3-x)[H(x-1) - H(x-3)]]$
- 6.b) $\mathcal{F}[xH(x) - H(x) - xH(x-1) + H(x-1)]$

Esercizio 7:

$$\mathcal{F}[H(x+2) + H(x) - 2H(x-2)]$$

Esercizio 8:

8.a) $\mathcal{F}[e^{-|x|}]$

8.b) $\mathcal{F}[[H(x+1) - H(x-1)] \cos \pi x]$

Esercizio 9:

9.a) $\mathcal{F}[H(x-1)e^{-3(x+1)}]$

9.b) $\mathcal{F}[(x-2)[H(x-1) - H(x-2)]]$

Esercizio 10:

10.a) $\mathcal{F}[\frac{1}{2}x[H(x) - H(x-2)] + (3-x)[H(x-2) - H(x-3)]]$

10.b) $\mathcal{F}[p_1(x - \frac{1}{2}) - (x-2)p_1(x - \frac{3}{2})]$

Esercizio 11

11.a) $\mathcal{F}[p_2(x) \cos \nu_0 t]$

11.b) $\mathcal{F}[\frac{1}{3} \frac{n/\pi}{1+n^2 x^2}]$

11.c) $\mathcal{F}[e^{\frac{-|x|}{n}}]$

11.d) $\mathcal{F}[p_1(x-7) * \delta(x-4)]$

11.e) $\mathcal{F}[p_4(x+5)\delta(x)]$

11.f) $\mathcal{F}[p_T(x)\delta(x-9)] = \quad (T > 0)$

11.g) $\mathcal{F}[H(x+x_0) - H(x-x_0)]$