Esercizi su integrali multipli

1. Calcolare i seguenti integrali doppi :

   (a) $\int_A xy\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ [1/4];

   (b) $\int_A xy\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1+x\}$ [5/8];

   (c) $\int_A x+y\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\}$ [39/35];

   (d) $\int_A \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le x/\pi\}$ [$2/\pi$];

   (e) $\int_A \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi,\ x \le y \le \pi\}$ [2];

   (f) $\int_A x+2y\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, \min\{x^2,x\} \le y \le \max\{x^2,x\}\}$ [11/2];

   (g) $\int_A x\sin|x^2-y|\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ [$1-\sin 1$];

   (h) $\int_A |\sin x - y|xy\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\}$ [$\pi - 2$];

   (i) $\int_A x^2\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) : y \le -x^2 + x/2 + 3, y \ge -x^2 - x, y \ge -x^2 + 2x\}$ [56].

2. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse x della regione di piano A racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,1)$ e $A_3 = (2,0)$ e il momento di inerzia rispetto all'asse y della regione di piano B racchiusa nel nel triangolo di vertici $B_1 = (0,0)$, $B_2 = (0,1)$ e $B_3 = (1,0)$. [1/6 e 1/12]

3. Calcolare il baricentro delle regioni di piano $A = \{(x,y) : x^2 \le y \le 1\}$ e $B = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.
   $\left[\left(0, \frac{3}{5}\right) \text{ e } \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)\right]$

4. Calcolare i seguenti integrali doppi :

   (a) $\int_D y^2\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ [$\pi/8$];

   (b) $\int_D x^2+y^2\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ [$\pi/16$];

   (c) $\int_D x^2\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$ [$15\pi/8$].

5. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r,0)$ e raggio r. Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D.

6. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine della lamina piana $C = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 9, x^2+y^2-2x \ge 0\}$ essendo la densità $\mu(x,y)$ uguale alla distanza da $(0,0)$. [39π]

7. Calcolare i seguenti integrali tripli :

   (a) $\displaystyle\int_A xye^{xz}\,dx\,dy\,dz,\ A = [0,2]\times[1,3]\times[0,1]\quad [4(e^2-3)]$;

   (b) $\displaystyle\int_A x\,dx\,dy\,dz,\ A = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}\quad [1/24]$;

   (c) $\displaystyle\int_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz, A = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x+1, 0 \leq z \leq x+y\}\quad [13/8]$;

   (d) $\displaystyle\int_D x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\ D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2 \geq y^2+z^2, x \geq 0\};\ [\pi/48]$

   (e) $\displaystyle\int_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz,\ D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2+y^2\}\quad [\pi/2\ \log 2]$.

8. Calcolare il baricentro e il volume dei seguenti solidi omogenei:

   (a) $\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1,\ (z-1)^2 \geq x^2+y^2\};\quad [(0,0,1/4),\ \pi/3]$
   (b) prisma di vertici $A = (0,0,1)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ e $(0,0,0)$; $\quad [(1/4,1/4,1/2),\ 1/6]$
   (c) solido del primo ottante limitato da $z = x^2/3,\ z = 0,\ y = 0,\ 2x+3y-18 = 0;\quad [(27/5,6/5,27/5),\ 243/2]$

9. Sia A il solido generato dalla rotazione attorno all'asse z della regione piana :
   $C = \{(x,y,z) : y = 0,\ x^2-1 \leq z \leq (x-1)^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$.
   Determinare il volume e il baricentro di A. $\quad [V_A = 2\pi/3, B_A = (0,0,37/10)]$

10. Dato il solido $C_r = \{x^2+y^2 \geq r^2, x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$ determinare il valore del parametro r in modo che il volume di C sia $\pi/12$. $\quad [r = 1/\sqrt{2}]$

11. Determinare il volume dei seguenti solidi di rotazione :

    (a) T triangolo di vertici $(0,0,2)$, $(0,-1,1)$ e $(0,1,1)$ attorno all'asse y; $\quad [8\pi/3]$

    (b) $D = \{(x,y,z) : y = 0, x^2-4z^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse z; $\quad [2\pi/3]$

    (c) $D = \{(x,y,z) : z = 0, 0 \leq y \leq |-1/4+x^2|, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse x; $\quad [23\pi/240]$

12. Calcolare i seguenti integrali impropri :

    (a) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha}\,dx\ dy\,,\ D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2\},\quad [\pi(\alpha-1)^{-1}$ per $\alpha > 1$, divergente per $\alpha \leq 1]$

    (b) $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^4+y^4)}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : 4 \leq x^2+y^2\};\quad$ [divergente]

    (c) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.\quad [1]$

    (d) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.\quad [\sqrt{2}/2]$

    (e) $\displaystyle\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,\ D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.\quad$ [divergente]