COMPLEMENTI DI ANALISI E CALCOLO DELLE PROBABILITA'
Soluzione Modello di Compito

Esercizio 1 *Data la funzione :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 2t & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ 2 & \text{se } 1 < t < 3 \\ 8-2t & \text{se } 3 \le t \le 4 \\ 0 & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

1. *verificare che la trasformata di Fourier del segnale $f(t)$ è :*

$$\frac{2\ e^{-4\pi i\nu}}{\pi^2\nu^2}\ \sin(3\pi\nu)\ \sin(\pi\nu)$$

Essendo la funzione $f(t)$ continua e derivabile tranne che in finiti punti posso utilizzare la formula :

$$F(f)(\nu) = \frac{F(f')(\nu)}{2\pi i\nu},$$

dove $f'(t) = 2p_2\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2p_2\left(t - \frac{7}{2}\right)$ e quindi

$$F(f')(\nu) = 2\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-\pi i\nu} - 2\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-7\pi i\nu} = 4i\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-4\pi i\nu}\left[\frac{e^{3\pi i\nu} - e^{-3\pi i\nu}}{2i}\right] = 4i\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-4\pi i\nu}\sin(3\pi\nu).$$

Posso quindi colcludere che

$$F(f)(\nu) = \frac{2\ e^{-4\pi i\nu}}{\pi^2\nu^2}\ \sin(3\pi\nu)\ \sin(\pi\nu).$$

ESERCIZIO 2. *Si consideri una coppia di variabili (X, Y) avente densità congiunta*

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } (x,y) \in S \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin S, \end{cases}$$

dove $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x+y \le 3, -1 \le y-x \le 1\}$.

1. *si determini il valore da assegnare ad α affinchè f sia una funzione di densità.*

$$1 = \int_D f(x,y)\ dxdy = \alpha\left[\int_0^1 x\ \left(\int_{1-x}^{1+x} dy\right)\ dx + \int_1^2 x\ \left(\int_{x-1}^{3-x} dy\right)\ dx\right] =$$

$$\alpha\left[\int_0^1 2x^2\ dx + \int_1^2 (4x - 2x^2)\ dx\right] = 2\alpha$$

Quindi la scelta corretta risulta $\alpha = 1/2$.

2. *si calcolino le funzioni di ripartizione marginali di X ed Y rispettivamente.*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{1-x}^{1+x} x\ dy = x^2 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}\int_{x-1}^{3-x} x\ dy = 2x - x^2 & x \in [1,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{1-y}^{1+y} x\ dx = y & y \in [0,1] \\ \frac{1}{2}\int_{y-1}^{3-y} x\ dx = 2 - y & y \in [1,2] \\ 0 & y \notin [0,2] \end{cases}$$

3. *si dica se X ed Y sono stocasticamente indipendenti e/o incorrelate.*

   Non sono indipendenti perchè $f(x,y) \neq f_X f_Y$. Per determinare se sono o no correlate è necessario calcolare $E[XY]$, $E[X]$ e $E[Y]$:

$$E[XY] = \int_D xyf(x,y)\,dxdy = \int_D \frac{x^2y}{2}\,dxdy = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(\int_{1-x}^{1+x} y\,dy\right)dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2}\left(\int_{x-1}^{3-x} y\,dy\right)dx = \frac{7}{6},$$

$$E[X] = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x(2x-x^2)\,dx = \frac{7}{6},$$

$$E[Y] = \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^2 y(2-y)\,dy = 1.$$

   Quindi $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$. Le variabili aleatorie marginali X e Y sono non correlalte.

4. *si determini la probabilità che (X,Y) assuma valori in $A = [1,+\infty) \times [1,2]$.*

$$\mathbf{P}[(X,Y) \in A] = \int_A \frac{x}{2}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{x}{2}\,dy\right)dx = \frac{1}{3}$$

5. *si determini la probabilità dell'evento $\{Y \geq 1\}$ condizionato a $\{X \geq 1\}$.*

   Determino prima la probabilità che $X \geq 1$:

$$\mathbf{P}[X \geq 1] = \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}.$$

   Posso quindi concludere che :

$$\mathbf{P}[Y \geq 1 | X \geq 1] = \frac{\mathbf{P}[Y \geq 1, X \geq 1]}{\mathbf{P}[X \geq 1]} = \frac{\mathbf{P}[(X,Y) \in A]}{\mathbf{P}[X \geq 1]} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 3.

Una certa somma S_0 di denaro può essere investita in un titolo a reddito fisso oppure in azioni. Dopo un giorno la somma S_0, se investita a reddito fisso, diventa αS_0. Se invece viene investita in azioni essa diventa una quantità aleatoria S_1 che assume valore $1.2S_0$ con probabilità 0.6 oppure valore $0.9S_0$ con probabilità 0.4 .

1. *si disegni la funzione di ripartizione di S_1 e se ne calcolino valore atteso e varianza.*

$$F_{S_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0.9S_0 \\ 0.4 & x \in [0.9S_0, 1.2S_0] \\ 1 & x \geq 1.2S_0 \end{cases} \quad ,$$

$$E[S_1] = 0.4 \times 0.9\ S_0 + 0.6 \times 1.2\ S_0 = 1.08\ S_0,$$

$$V[S_1] = [(0.18)^2 0.4 + (0.12)^2 0.6] S_0^2 = 0.0216\ S_0^2.$$

   Se viene investita in azioni, dopo n giorni la somma S_0 diventa

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n X_i,$$

   dove ogni X_i è una variabile con $P[X_i = 1.2] = 0.6$ e $P[X_i = 0.9] = 0.4$. Si suppongano le variabili X_i stocasticamente indipendenti.

2. *si calcolino valore atteso e varianza di S_n.*

$$E[S_n] = E[X_1 \cdots X_n]\ S_0 = E[X_i]^n\ S_0 = (1.08)^n\ S_0,$$

$$V[S_n] = S_0^2\ V[X_1 \cdots X_n] = S_0^2\ \left(E[X_1^2 \cdots X_n^2] - E[X_1 \cdots X_n]^2\right) =$$
$$S_0^2\ \left(E[X_i^2]^n - E[X_i]^{2n}\right) = S_0^2\ \left((1.18)^n - (1.08)^{2n}\right).$$