Esercizi di

Algebra di Boole

(con *Appendice*)

Esercizio 1

Esprimere in forma simbolica la seguente proposizione logica: il passaggio di un astronauta da una nave di servizio ad un satellite artificiale è permesso se:

- la nave ed il satellite sono uniti e alla stessa pressione interna, oppure se

- sono separati e l’astronauta indossa una tuta pressurizzata.

In entrambi i casi occorre inoltre che:

- le pile solari del satellite funzionino e giunga il consenso del controllo a terra.

Risoluzione:

Determinazione delle variabili che rappresentano il problema:

- *P*, passaggio dell’astronauta;
- *U*, nave e satellite uniti;
- *I*, stessa pressione interna;
- *T*, l’astronauta indossa la tuta pressurizzata;
- *S*, pile solari funzionanti;
- *C*, consenso da terra.

NB: veicoli separati = non uniti (U = 0).

$$P = UISC + \overline{U}TSC =$$
$$= SC(UI + \overline{U}T)$$

Esercizio 2

Si esprima sotto forma simbolica la seguente proposione logica: l'avanzamento di un nastro trasportatore può avvenire secondo due modi di funzionamento:

1. È inserito l'interruttore di alimentazione e vi sono pezzi da trasportare;

2. è inserito l’interruttore, vi sono pezzi da trasportare e il numero dei pezzi già trasportati è inferiore ad un limite prefissato N.

Inoltre l’avanzamento si deve arrestare automaticamente non appena qualche incidente, per esempio la caduta di un pezzo, altera il funzionamento.

Risoluzione:

Determinazione delle variabili che rappresentano il problema:

- *M*, modo di funzionamento ($M = 1$, primo modo; $M = 0$, secondo modo);
- *I*, posizione interruttore;
- *P*, ci sono pezzi da portare;
- *N*, i pezzi trasportati sono meno di N;
- *C*, c’è stato un incidente;

- A, avanzamento del nastro.

$$A = (IPM + IP\overline{M}N)\overline{C} = IP\overline{C}(M + N\overline{M}) =$$
$$= IP\overline{C}(M + N)$$

Esercizio 3

Facendo uso dei teoremi fondamentali dell'algebra booleana, minimizzare la seguente espressione logica:

$$x + xy + zy + z\overline{y}$$

Risoluzione:

$$x + xy + zy + z\overline{y} =$$

$$x(1 + y) + z(y + \overline{y}) =$$

$$x + z$$

Esercizio 4

Facendo uso dei teoremi fondamentali dell’algebra booleana, dimostrare che l’espressione:

$$\overline{\overline{A}CB+\overline{A}C\overline{B}+\overline{A}\,\overline{D}+\overline{B}CD+\overline{B}C+\overline{B}\,\overline{D}}$$

assume il valore VERO solo quando *A* e *B* sono contemporaneamente VERE oppure quando *D* è VERA e contemporaneamente *C* è FALSA.

Risoluzione:

Occorre dimostrare che l’espressione data è equivalente all’espressione:

$$AB+\overline{C}D$$

Minimizzando l’espressione data si ottiene:

$$\overline{\overline{A}CB+\overline{A}C\overline{B}+\overline{A}\overline{D}+\overline{B}CD+\overline{B}C+\overline{B}\overline{D}}=$$

$$\overline{\overline{A}C(B+\overline{B})+\overline{A}\overline{D}+\overline{B}C(D+1)+\overline{B}\overline{D}}=$$

$$\overline{\overline{A}C+\overline{A}\overline{D}+\overline{B}C+\overline{B}\overline{D}}=$$

$$\overline{\overline{A}(C+\overline{D})+\overline{B}(C+\overline{D})}=$$

$$\overline{(\overline{A}+\overline{B})(C+\overline{D})}=$$

$$\overline{(\overline{A}+\overline{B})}+\overline{(C+\overline{D})}=$$

$$AB+\overline{C}D$$

Esercizio 5

Trovare le espressioni per le funzioni booleane

$$f(x_1, x_2) \text{ e } g(x_1, x_2)$$

definite come segue:

$f(x_1, x_2) = 0$ se e solo se $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$

$$
g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{se } x_2 = 0 \\ \overline{x}_1 & \text{se } x_2 = 1 \end{cases}
$$

Determinare inoltre se $g(x_1, x_2)$

è equivalente alla funzione

$$
h(x_1, x_2) = \overline{f(x_1, x_2) \bullet f(x_2, x_1)}
$$

Risoluzione:

La tavola di verità di $f(x_1, x_2)$ è:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Da cui:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2 \\
&= \overline{x}_1(\overline{x}_2 + x_2) + x_1 x_2 \\
&= \overline{x}_1 + x_1 x_2 \\
&= \overline{x}_1 + x_2
\end{aligned}
$$

$g(x_1, x_2)$ si determina applicando direttamente la definizione:

$$g(x_1, x_2) = x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 = x_1 \oplus x_2$$

Infine:

$$
\begin{aligned}
h(x_1, x_2) &= \overline{f(x_1, x_2) \bullet f(x_2, x_1)} \\
&= \overline{(\overline{x}_1 + x_2)(\overline{x}_2 + x_1)} \\
&= \overline{(\overline{x}_1 + x_2)} + \overline{(\overline{x}_2 + x_1)} \\
&= x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1 \\
&= x_1 \oplus x_2 = g(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

Scrivere, utilizzando gli operatori booleani AND, OR e NOT, la funzione logica che riceve in ingresso un numero binario puro su quattro bit e restituisce il valore VERO se e solo se il numero in ingresso è compreso tra quattro e sette.

Risoluzione:

Siano x_3, x_2, x_1, x_0 le variabili d'ingresso, dalla cifra più significativa alla meno significativa.

La funzione logica f che si vuole determinare deve valere 1 quando in ingresso si presentano i numeri 4, 5, 6 e 7.

Si ha pertanto:

	x_3	x_2	x_1	x_0	f
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1

Le configurazioni d'ingresso che devono produrre in uscita il valore 1 sono quelle che hanno

$$x_3 = 0, \quad x_2 = 1$$

indipendentemente dai valori assunti da x_1 e x_0

(lo si desume dal fatto che x_1 e x_0 assumono tutte le combinazioni possibili).

La funzione richiesta è:

$$f = \overline{x}_3 x_2$$

Appendice

Metodo sistematico per passare dalla descrizione di un problema alla funzione booleana che lo esprime.

Nota: il metodo garantisce di trovare una soluzione "buona", non quella "ottima" (minima).

Sia dato il problema proposto nel libro di testo: *al Politecnico di Torino ci si laurea se si sono superati tutti gli esami e si è data la tesi o la prova di sintesi*. Si eseguono i seguenti passi.

1) Si identificano le variabili logiche (E = superati gli esami, T = data la tesi, S = data la prova di sintesi, L = ci si laurea);

2) Si crea la parte sinistra della tavola di verità, che ha un numero di righe pari a 2^N, dove N è il numero di variabili indipendenti. Si scrivono tutte le combinazioni possibili delle variabili indipendenti, seguendo la numerazione binaria. Nel caso in esame:

E	T	S	L
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

3) Si "interpreta" ogni riga in base al problema e si stabilisce il valore della variabile dipendente. Ad esempio, la prima riga significa che non sono stati superati tutti gli esami (E = 0), non si è data la tesi (T = 0) e non si è data la sintesi (S = 0), quindi mancano le condizioni per laurearsi (L = 0); la seconda riga significa che non sono stati superati tutti gli esami e non è stata data la tesi (E = T = 0) ed è stata data la sintesi: non ci si laurea (L = 0); e così via. Si ottiene:

E	T	S	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

4) Si considerano solo le righe in cui la variabile dipendente vale 1 e si scrive la funzione come somma di prodotti (logici):

$$L = E\overline{T}S + ET\overline{S} + ETS$$

5) Si minimizza con la seguente modalità:

a) Si numerano i termini da 1 in poi;

b) Si confronta ciascun termine con tutti i successivi, cioè si considerano le coppie di termini 1-2, 1-3, 1-4,.. 2-3, 2-4,…, 3-4, 3-5, …(n-1).esimo-n.esimo;

c) Si considera ciascuna coppia. Se i due termini differiscono per una sola lettera, si fondono insieme riportando solo le lettere che non cambiano e si marcano i due termini come "usati" (in pratica si applica la relazione $xY + \overline{x}Y = Y$, dove Y sta per un generico gruppo di variabili in AND); altrimenti si passa alla coppia successiva;

d) Si riportano nell'espressione risultante i termini non marcati come "usati"

e) Si ripete il procedimento sull'espressione risultanto finché non ci sono più "fusioni".

f) Si analizza l'espressione finale risultante ed eventualmente si individuano elementi da mettere in evidenza (espressioni AND di OR) o casi di EX-OR (questo passo non semplifica l'espressione: si tratta di una riscrittura).

Nell'esempio trattato si ha:

da 1-3 ES

da 2-3 ET

quindi:

$$L = ES + ET = E(S + T)$$

Esercizio 7

Un dispositivo logico riceve in ingresso un numero binario nella rappresentazione modulo e segno su 3 bit `I(`$i_3 i_2 i_1$`)` (dove i_3 è il bit di segno) e un bit di controllo `C`. Esso produce in uscita un numero binario `O` ($o_3 o_2 o_1$) equivalente a `I` ma nella rappresentazione:

- complemento a 1 se C = 0
- complemento a 2 se C = 1

Determinare le espressioni booleane delle uscite `O` e semplificarle utilizzando i teoremi dell'algebra booleana.

Soluzione (limitata all'uscita O_3):

Il problema suggerisce quali sono le variabili in gioco. Si può determinare la tavola di verità (per ogni riga, si interpretano i valori $I_3 \div I_1$ come numeri in modulo e segno e, in base al valore assunto da C, si scrive il valore in compl. a 1 o in compl. a 2 in $O_3 \div O_1$):

C	I_3	I_2	I_1	Valore	O_3	O_2	O_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	2	0	1	0
0	0	1	1	3	0	1	1
0	1	0	0	-0	1	1	1
0	1	0	1	-1	1	1	0
0	1	1	0	-2	1	0	1
0	1	1	1	-3	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	2	0	1	0
1	0	1	1	3	0	1	1
1	1	0	0	-0	0	0	0
1	1	0	1	-1	1	1	1
1	1	1	0	-2	1	1	0
1	1	1	1	-3	1	0	1

Osservazione: è stata aggiunta la colonna *Valore* per comodità, cioè per facilitare la corretta valutazione delle uscite.

Per l'uscita O_3, considerando le righe in cui questa uscita vale 1, si ha:

(i termini sono numerati in apice)

$$O_3 = \overline{C}I_3\overline{I}_2\overline{I}_1{}^{1} + \overline{C}I_3\overline{I}_2 I_1{}^{2} + \overline{C}I_3 I_2\overline{I}_1{}^{3} + \overline{C}I_3 I_2 I_1{}^{4} + CI_3\overline{I}_2 I_1{}^{5} + CI_3 I_2\overline{I}_1{}^{6} + CI_3 I_2 I_1{}^{7} =$$

si possono fondere i termini 1-2, 1-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-6, 4-7, 5-7, 6-7 e si ottiene:

$$= \overline{C}I_3\overline{I}_2{}^{1} + \overline{C}I_3\overline{I}_1{}^{2} + \overline{C}I_3 I_1{}^{3} + I_3\overline{I}_2 I_1{}^{4} + \overline{C}I_3 I_2{}^{5} + I_3 I_2\overline{I}_1{}^{6} + I_3 I_2 I_1{}^{7} + CI_3 I_1{}^{8} + CI_3 I_2{}^{9} =$$

si possono fondere i termini 1-5, 2-3, 3-8, 4-7, 5-9, 6-7 e si ottiene:

$$= \overline{C}I_3 + \overline{C}I_3 + I_3 I_1 + I_3 I_1 + I_3 I_2 + I_3 I_2 =$$

da cui, eliminando i termini doppi (teorema: X+X=X):

$$= \overline{C}I_3 + I_3 I_1 + I_3 I_2 = I_3(\overline{C} + I_1 + I_2)$$

Osservazione

Nel creare tutte combinazioni delle variabili indipendenti, invece della numerazione binaria è più conveniente usare la codifica Gray: così se la funzione che si cerca ha 2 (o 4 o 8 ecc.) uni contigui, sicuramente tra i termini c'è un solo bit che cambia, per cui la fusione può essere verificata più facilmente sulla stessa tavola di verità.

Nell'esercizio 7 si avrebbe:

C	I_3	I_2	I_1	Valore	O_3	O_2	O_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	3	0	1	1
0	0	1	0	2	0	1	0
0	1	1	0	-2	1	0	1
0	1	1	1	-3	1	0	0
0	1	0	1	-1	1	1	0
0	1	0	0	-0	1	1	1
1	1	0	0	-0	0	0	0
1	1	0	1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-3	1	0	1
1	1	1	0	-2	1	1	0
1	0	1	0	2	0	1	0
1	0	1	1	3	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0

I primi 4 uni della funzione O_3 (marcati in grigio chiaro) forniscono, tenendo conto delle sole variabili che non cambiano il termine:

$\overline{C}I_3$

Il gruppo di 3 uni successivo è da considerare come costituito da due gruppi di 2 uni come mostrato qui di seguito, prendendo l'uno centrale due volte. Questi due gruppi forniscono (considerando solo le variabili che non cambiano) i termini:

$$\mathrm{CI_3I_1 + CI_3I_2}$$

C	I_3	I_2	I_1	Valore	O_3	O_2	O_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	3	0	1	1
0	0	1	0	2	0	1	0
0	1	1	0	-2	1	0	1
0	1	1	1	-3	1	0	0
0	1	0	1	-1	1	1	0
0	1	0	0	-0	1	1	1
1	1	0	0	-0	0	0	0
1	1	0	1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-3	1	0	1
1	1	1	0	-2	1	1	0
1	0	1	0	2	0	1	0
1	0	1	1	3	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0

C	I_3	I_2	I_1	Valore	O_3	O_2	O_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	3	0	1	1
0	0	1	0	2	0	1	0
0	1	1	0	-2	1	0	1
0	1	1	1	-3	1	0	0
0	1	0	1	-1	1	1	0
0	1	0	0	-0	1	1	1
1	1	0	0	-0	0	0	0
1	1	0	1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-3	1	0	1
1	1	1	0	-2	1	1	0
1	0	1	0	2	0	1	0
1	0	1	1	3	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0

Si ottiene dunque:

$$\mathrm{O_3 = \overline{C}I_3 + CI_3I_1 + CI_3I_2 = I_3(\overline{C} + C(I_1 + I_2)) =}$$

$$\mathrm{= I_3(\overline{C} + I_1 + I_2)}$$

dove si è utilizzato il teorema $\mathrm{X + \overline{X}Y = X + Y}$