

CLAUDIO BECCARI

# CIRCUITI ELETTRICI LINEARI

Analisi del comportamento dinamico



POLITECNICO DI TORINO  
3 ottobre 2001

Questo testo è in rete a disposizione degli studenti del corso 07AUO Elettrotecnica II per il corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione del Politecnico di Torino. Ogni studente ne può scaricare una copia e i successivi aggiornamenti e, se lo desidera, lo può stampare per proprio uso e consumo. Questo testo è di proprietà esclusiva dell'autore che ne concede licenza d'uso gratuita ai suoi studenti per uso strettamente personale. Essi possono trasferire ad altri il file trasferendo agli altri le stesse limitazioni e gli stessi diritti di cui godono.

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>v</b>
<b>1 Richiami di elettrotecnica</b>	<b>1</b>
1.1 Generalità . . . . .	1
1.2 Le equazioni costitutive . . . . .	2
1.3 Analogia elettromeccanica . . . . .	10
1.4 L'analogia di dualità . . . . .	10
1.5 Soluzione delle equazioni del sistema . . . . .	11
Esercizi . . . . .	12
<b>2 La trasformazione di Laplace</b>	<b>19</b>
2.1 Generalità . . . . .	19
2.2 Definizione . . . . .	19
2.3 Analiticità della L-trasformata . . . . .	21
2.4 La distribuzione impulsiva di Dirac . . . . .	23
2.5 Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	24
2.5.1 Alcuni esempi . . . . .	25
2.5.2 Trasformata della derivata di una funzione . . . . .	26
2.5.3 Trasformata dell'integrale . . . . .	27
2.5.4 Trasformata del prodotto di convoluzione . . . . .	27
2.5.5 Teorema del valore finale . . . . .	27
2.5.6 Teorema del valore iniziale . . . . .	28
2.5.7 Esempi . . . . .	29
2.6 Legame fra la trasformata di Laplace e quella di Fourier . . . . .	33
2.7 Tabella delle trasformate di Laplace . . . . .	34
2.8 L'antitrasformazione di Laplace . . . . .	34
2.9 Antitrasformazione delle funzioni razionali . . . . .	37
Esercizi . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Il metodo simbolico per l'analisi dei sistemi</b>	<b>43</b>
3.1	Generalità . . . . .	43
3.2	Trasformazione delle equazioni dinamiche . . . . .	43
3.2.1	Equazioni dell'induttore . . . . .	44
3.2.2	Equazioni del condensatore . . . . .	45
3.2.3	Equazioni del trasformatore . . . . .	45
3.2.4	Equazioni degli altri componenti privi di memoria . . . . .	48
3.3	Il metodo simbolico . . . . .	48
3.4	Normalizzazione . . . . .	59
3.5	Ancora esempi . . . . .	60
3.6	Commenti . . . . .	77
3.7	Significato fisico degli zeri e dei poli . . . . .	78
3.7.1	Significato fisico dei poli . . . . .	79
3.7.1.1	Polo di un sistema del primo ordine . . . . .	81
3.7.1.2	Poli di un sistema del secondo ordine . . . . .	82
3.7.2	Significato fisico degli zeri . . . . .	84
3.8	Risposta libera e risposta forzata da un impulso . . . . .	85
3.9	Risposta all'impulso e condizioni di stabilità . . . . .	86
	Esercizi . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Il regime sinusoidale e la risposta in frequenza</b>	<b>93</b>
4.1	Generalità . . . . .	93
4.2	Il regime sinusoidale . . . . .	93
4.3	Potenza in regime sinusoidale . . . . .	95
4.4	Adattamento energetico . . . . .	98
4.5	Risposta in frequenza . . . . .	102
4.6	I diagrammi di Bode . . . . .	104
4.6.1	Contributi delle radici reali . . . . .	106
4.6.2	Contributo della radice nell'origine . . . . .	108
4.6.3	Contributi delle coppie di radici complesse e coniugate . . . . .	108
	Esercizi . . . . .	115
<b>5</b>	<b>I doppi bipoli</b>	<b>119</b>
5.1	Generalità . . . . .	119
5.2	Il doppio bipolo . . . . .	119
5.3	Caratterizzazione del doppio bipolo . . . . .	121
5.3.1	Significato fisico dei parametri . . . . .	122
5.3.2	Trasformazione da una rappresentazione all'altra . . . . .	125
5.4	Condizioni di reciprocità e di simmetria . . . . .	127
5.5	Connessione di doppi bipoli . . . . .	132
5.5.1	Connessione in serie . . . . .	132
5.5.2	Connessione in parallelo . . . . .	134
5.5.3	Connessione in serie-parallelo . . . . .	134
5.5.4	Connessione in cascata . . . . .	135
5.5.5	Considerazioni sulla connessione di doppi bipoli . . . . .	135
5.6	Analisi a blocchi . . . . .	136
	Esercizi . . . . .	139

---

<b>A</b>	<b>Approfondimenti</b>	<b>143</b>
A.1	Premessa .....	143
A.2	Le matrici topologiche .....	143
A.3	Circuiti degeneri o patologici .....	151
A.4	La causalità e le funzioni di trasferimento .....	154
A.5	La passività .....	159
<b>B</b>	<b>Tabelle delle trasformate di Laplace</b>	<b>167</b>
<b>C</b>	<b>Componenti standard</b>	<b>173</b>
C.1	Resistori .....	174
C.2	Condensatori .....	177
<b>D</b>	<b>Soluzioni</b>	<b>179</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>197</b>
	<b>Indice analitico</b>	<b>199</b>



# Prefazione

Questo breve testo è dedicato agli studenti del corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione presso la III Facoltà del Politecnico di Torino che seguono il corso di Elettrotecnica II di soli 4 crediti.

È chiaro che un corso così breve deve essere dotato di ogni supporto possibile affinché gli allievi non debbano consumare tempo prezioso a cercare la necessaria documentazione nelle biblioteche, o, peggio ancora, perché non si limitino ai loro appunti, forzatamente sintetici, lacunosi e, probabilmente, non totalmente corretti.

Nello stesso tempo molte delle nozioni contenute in questo testo sono svolte parallelamente in altri corsi, talvolta con altro linguaggio; ciò che è presentato qui non vuole essere una ripetizione degli argomenti trattati in altri corsi, ma, ove essi siano davvero delle duplicazioni, servono per consentire allo studente di non dover consultare altrove ciò che serve loro subito.

Lo scopo complessivo è quello di fornire agli studenti le conoscenze teoriche e i metodi pratici per analizzare i circuiti e i sistemi lineari sia nel dominio del tempo sia in quello della frequenza, di padroneggiare i metodi di analisi nel dominio della pulsazione con particolare riguardo a quella complessa, di muoversi agevolmente con i doppi bipoli.

Alcune parti sono prese di peso da altri miei testi: un vecchio manualletto pubblicato presso Boringhieri (ora Bollati – Boringhieri) nel lontano 1977 [1], ora esaurito, e il testo Teoria dei Circuiti Elettronici del 1997 [2]. Il secondo era destinato agli allievi del corso di laurea in Elettronica del vecchio ordinamento precedente all'introduzione della laurea triennale e dei crediti. Ma per le esigenze degli studenti di oggi ho rivisto ogni parte e ho scritto ex novo quasi tutto.

Gli esercizi svolti come esempi e quelli proposti alla fine dei capitoli sono essenziali per acquisire la padronanza nei metodi di analisi. Degli esercizi proposti sono indicate in appendice le soluzioni sotto forma di risultati finali, non sotto forma di svolgimento completo. I risultati finali servono per avere una conferma di non avere commesso errori grossolani. Il procedimento invece è qualche cosa che lo studente deve imparare a scegliere da solo, svolgendo un'analisi critica del problema da affrontare alla luce delle conoscenze teoriche e della propria esperienza nonché, bene inteso, dei propri gusti. Questo è l'aspetto più creativo che non può venire insegnato, ma può essere appreso con l'allenamento e la buona comprensione della teoria.

Il libro è dotato di un indice generale piuttosto dettagliato e di un indice analitico; entrambi questi strumenti consentono di ritrovare facilmente gli argomenti che interessano. Per quanto riguarda i riferimenti elencati nell'indice analitico, ogni voce è marcata con un rettangolino nero al margine esterno della riga dove essa è contenuta. Per cui quando l'indice analitico rinvia a una certa pagina, non bisogna leggere tutta la pagina per trovare il riferimento ma solo le righe marcate con il rettangolino nero. Ritengo che l'uso attento degli indici consenta di utilizzare questo libro come un comodo e facile testo di riferimento. Spero che gli studenti condividano questa mia impressione.

La versione elettronica di questo testo presenta numerosi vantaggi, primo fra i quali quello di poter apportare le necessarie correzioni laddove siano sfuggiti refusi o, peggio ancora, veri errori. Gli studenti destinatari di questo testo sono vivamente invitati a "scatenarsi" nella caccia all'errore; più ne trovano, più se ne correggono, con il vantaggio che la copia in rete dovrebbe convergere verso un'edizione priva di errori. Ne beneficiano per primi gli studenti stessi.

Il sito dove è disponibile questo testo elettronico contiene anche un programma per la risoluzione di equazioni, eseguibile sulle macchine con sistema operativo Windows. Non dispongo ancora di eseguibili per le versioni Linux o Macintosh. Sempre per macchine con sistema operativo Windows sono disponibili i programmi freeware PSpice, sia la versione destinata ad operare in una finestra comandi come un normale applicativo DOS, sia la versione destinata ad operare come applicativo Windows. Sebbene la prima sia più rudimentale, viene preferita da chi la usa in modo intensivo. Il programma PSpice richiede di usare il libro scritto dall'amico e collega prof. Mario Biey, *Spice e PSpice — Introduzione all'uso* [3].



Molti esercizi inseriti in questo libro, marcati a margine con il simbolo che appare qui, contengono il suggerimento di essere elaborati anche con PSpice e vengono indicati anche i possibili esperimenti che si possono fare nel laboratorio virtuale costituito dall'ambiente di lavoro PSpice.

# Capitolo 1

## Richiami di elettrotecnica

### 1.1 Generalità

In questo testo si affronterà l'analisi dei circuiti e dei sistemi lineari autonomi (e talvolta anche non lineari o non autonomi), concentrati, con un numero finito di componenti, nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza. Per affrontare questo genere di problemi si userà a fondo la Trasformazione di Laplace.

Nel primo corso di Elettrotecnica si erano già visti metodi per l'analisi dei circuiti lineari in regime stazionario e in regime sinusoidale. I principi che regolano i circuiti sono evidentemente gli stessi, ma le equazioni dinamiche e il comportamento nel dominio della frequenza (non a una sola frequenza, ma al variare della frequenza) pongono delle ulteriori difficoltà che la trasformata di Laplace aiuta a superare.

In generale nel mondo reale è molto difficile trovare espressioni in forma chiusa che rappresentino fedelmente il comportamento degli oggetti reali. Per averne una buona approssimazione siamo costretti a inventare dei modelli, quali il *corpo rigido*, la *massa puntiforme*, la *capacità concentrata*, il *generatore ideale*, eccetera. È chiaro che questi oggetti sono frutto della nostra immaginazione, ma si tratta di una buona immaginazione, perché, pur ricordando i limiti dell'approssimazione di questi modelli, i risultati che si ottengono sono straordinariamente vicini a quanto si osserva nel mondo reale.

Anche il semplice concetto di *linearità* è un'ipotesi molto comoda, ma nessun oggetto reale ne è dotato! Ogni oggetto reale, per quanto le sue equazioni di funzionamento siano "quasi" lineari, è limitato superiormente dalle *sollecitazioni di rottura* e inferiormente dalla natura discontinua della materia.

Tuttavia se ci si limita a studiare il comportamento dei sistemi in un intorno non troppo ampio di una situazione di equilibrio o di riposo, è possibile trascurare le deviazioni rispetto alla linearità, è cioè possibile approssimare gli oggetti reali con modelli lineari, e studiare il comportamento del sistema *linearizzato*, detto anche *modello per piccoli segnali*, ottenendo una soluzione approssimata che nella grande maggioranza dei casi è più che soddisfacente.

Un altro concetto un po' tirato per i capelli è quello dei componenti *privi di perdite*; nessun oggetto reale può essere sede di trasformazioni energetiche, senza che una parte dell'energia sia degradata in calore in modo irreversibile; in sostanza nessun oggetto reale

può violare i principi della termodinamica. Eppure certi componenti hanno perdite così piccole che sembra lecito, almeno in prima approssimazione, trascurarle. Non dobbiamo

- però stupirci se questi componenti *ideali* presentano comportamenti un po' particolari.

Anche i generatori possono essere ideali; se li si è considerati tali perché si voleva trascurarne le perdite interne, non si si è fatto nulla di più di quello che si è fatto con i componenti passivi; ma se la loro idealizzazione si spinge a quella del *segnale* generato,

- fino a farlo diventare un *impulso ideale*, ecco che ci troviamo di fronte a difficoltà di tipo matematico, perché dobbiamo disporre di strumenti per trattare oggetti matematici strani, “funzioni” che sono ovunque nulle, tranne in un solo punto in cui valgono infinito. L'analisi matematica non ci offre nessuno strumento per usare utilmente questi oggetti con discontinuità così pronunciate, se non introducendo la *teoria delle distribuzioni*. In compenso, se ci ricordiamo che nel mondo reale siamo in grado di generare impulsi brevissimi e amplissimi (anche se continui), allora il passaggio al limite fino ad un impulso ideale non ci disturberà più di tanto, sapendo che la risposta ad un impulso ideale non sarà altro che un'approssimazione alla risposta ad un impulso reale; però dobbiamo essere pronti ad usare strumenti matematici che ci consentano di operare correttamente anche sugli impulsi ideali.

## 1.2 Le equazioni costitutive

Tutte le sollecitazioni come tutte le risposte di un sistema reale sono distribuite nello spazio che lo circonda e lo contiene. Quando però le dimensioni di questo spazio sono piccole rispetto a una lunghezza caratteristica associata al fenomeno in esame, allora è sufficiente approssimare il sistema con un oggetto puntiforme, al quale si associano le proprietà integrali dell'oggetto reale.

Ragionamenti simili si possono ripetere per le sorgenti reali di eccitazione, le quali occupano uno spazio finito, che, se è piccolo rispetto alla lunghezza caratteristica detta sopra, consente di considerarle idealmente puntiformi.

Se invece i volumi dove si manifestano i fenomeni oggetto del nostro studio non sono trascurabili rispetto alla lunghezza caratteristica indicata sopra, allora abbiamo sistemi distribuiti a una, due, oppure tre dimensioni. Il sistema è distribuito in una dimensione solo se una delle componenti del suo volume circoscritto non è trascurabile rispetto alla lunghezza caratteristica, se cioè esso è sostanzialmente filiforme, per esempio una fune tesa fra due punti, come una campata di elettrodotto o una corda di chitarra. Il sistema è distribuito a due dimensioni se il volume circoscritto è assimilabile a una superficie piana o anche incurvata, per esempio una membrana come quella degli strumenti a percussione o quella conica di un altoparlante.

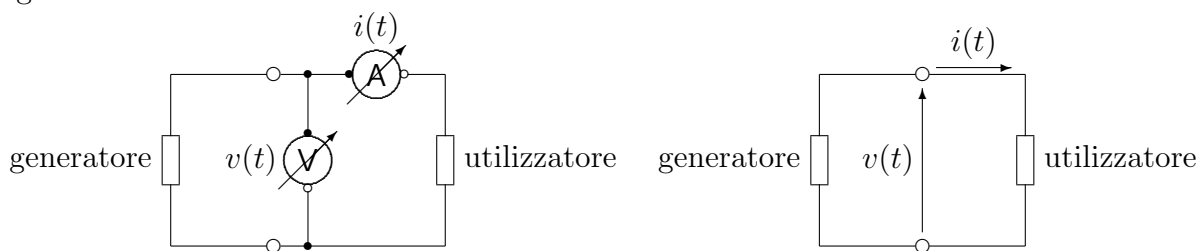
Per il momento ci occupiamo dei sistemi puntiformi, detti anche *a parametri con-*

- *centrati*; non importa quale sia la loro natura fisica, l'importante è che in ogni punto di sollecitazione siano definibili due grandezze atte a caratterizzare il comportamento dell'oggetto. Di queste due grandezze solitamente una è *estensiva* e l'altra è *intensiva*; la prima è una grandezza misurata (lungo una linea) *fra* due punti, mentre l'altra è un grandezza misurata *attraverso* una superficie; per esempio:

- ▷ la *tensione* è misurata fra due punti, la *corrente* è misurata attraverso la sezione di un conduttore;

- ▷ la *velocità* è misurata fra l'oggetto puntiforme in movimento e un punto della terna inerziale di riferimento; la *forza* è misurata attraverso la superficie di contatto fra l'oggetto che la esercita e l'oggetto che la subisce;
- ▷ la *temperatura* è misurata fra l'oggetto in esame e un altro oggetto di riferimento (tipica la situazione di una termocoppia); il *flusso di calore* si misura attraverso la superficie di scambio termico.

Per i circuiti elettrici, per ogni punto di sollecitazione saranno stati individuati due *morsetti* fra i quali si misurerà la tensione e un morsetto nel quale si misurerà la corrente entrante; la convenzione degli *utilizzatori* corrisponde a connettere un voltmetro con il suo morsetto “rosso” collegato al morsetto “rosso” dell'amperometro a sua volta connesso in modo da dare un'indicazione positiva quando la corrente è effettivamente positiva, cioè entrante nel morsetto dell'utilizzatore. Come noto, questa convenzione si *rappresenta* indicando il voltmetro e l'amperometro mediante due frecce; quella dell'amperometro indica il verso positivo della corrente, la quale entra nell'amperometro attraverso il morsetto “rosso”, mentre quella del voltmetro indica solo da che parte sta il morsetto “rosso”: figura 1.1.



**Figura 1.1.** Convenzione dei segni

Analogamente si possono definire le convenzioni di segno per la velocità e la forza, per la temperatura e il flusso di calore, eccetera. Per ora ci limitiamo ai sistemi elettrici; riprenderemo i sistemi non elettrici più avanti, ricorrendo all'analogia elettromeccanica e a quella elettrotermica.

In un sistema chiuso, ottenuto interconnettendo diversi generatori e diversi utilizzatori a una o più *porte*, le varie grandezze descrittive, cioè le tensioni e le correnti, sono legate da due serie di legami:

1. quelli che esprimono i vincoli reciproci imposti dal tipo di interconnessione; a me piace chiamarle *equazioni costitutive del connettore*; più tradizionalmente si chiamano *primo e secondo principio di Kirchhoff*, oppure *principi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti*, oppure *leggi delle tensioni e delle correnti*;
2. quelli che esprimono i vincoli imposti dai singoli bipoli o dai singoli componenti con più porte; sono le *equazioni costitutive dei componenti*.

Queste ultime dipendono solo dai componenti e non da come sono connessi fra di loro, mentre le prime non dipendono dai componenti, ma solo da come essi sono interconnessi.

È importante notare che tutte le equazioni debbono formare un sistema che ha tante equazioni quante incognite; non debbono esserci equazioni mancanti, né equazioni ridondanti, altrimenti o il sistema non ha soluzione (nel senso che ne ha infinite), oppure bisogna eliminare le equazioni ridondanti prima di trovare una soluzione.

Le equazioni del connettore sono sempre lineari:

$$\sum_{j=1}^L b_{kj} v_j = \sum_{j=1}^L b_{kj} e_{vj} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (1.1a)$$

$$\sum_{j=1}^L a_{kj} i_j = \sum_{j=1}^L a_{kj} e_{ij} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.1b)$$

- Le prime  $M$  equazioni sono la legge delle tensioni: esse esprimono il concetto che la somma delle tensioni lungo ciascuna delle  $M$  maglie è uguale alla somma delle eccitazioni di tensione; i coefficienti  $b_{kj}$  sono costanti che possono valere solo  $+1$ ,  $-1$ , oppure  $0$ , a seconda che il verso della tensione sia concorde o discorde con un verso arbitrario di percorrenza della maglia, oppure che la particolare tensione non sia lungo quella maglia.
- Le ultime  $N$  equazioni sono la legge delle correnti ed esprimono il fatto che la somma delle correnti uscenti da ciascun nodo sia uguale alla somma delle eccitazioni di corrente che vengono iniettate in quel nodo; analogamente i coefficienti  $a_{kj}$  sono semplici valori  $+1$ ,  $-1$ , oppure  $0$ , a seconda che il verso della corrente sia uscente o entrante o che la particolare corrente non abbia nulla a che fare con il nodo in esame.

Queste sono cose ben note; vale la pena però di rilevare che il numero dei nodi  $N$  e

- il numero delle maglie  $M$  rappresentano rispettivamente i numeri dei nodi e delle maglie *indipendenti*. Quanti sono questi nodi e queste maglie indipendenti? Dovrebbe essere già noto il modo di eseguire questo calcolo; in particolare dovrebbe essere noto il “trucco grafico” che fa ricorso al grafo del circuito.

Il grafo di un circuito in realtà è il grafo del connettore; si ridisegna ordinatamente il circuito togliendo tutti i componenti ma lasciando le frecce che rappresentano le tensioni dei componenti; i vari fili di interconnessione vengono contratti in un unico punto, o meglio, ciascun gruppo di fili “saldati assieme” viene contratto in un unico punto, che può essere disegnato in modo marcato. In questo modo il disegno del circuito si riduce ad un insieme di frecce che collegano tanti pallini neri.

Vorrei precisare una questione importante e sfatare una leggenda che si tramanda da generazioni:

**Precisazione** Il circuito di cui si vuole eseguire l’analisi *deve* essere una *rete chiusa*, cioè deve comprendere i generatori con cui è eccitato e i voltmetri e gli amperometri con cui si misurano le risposte; nessuna eccitazione è lasciata indicata come una generica freccia di tensione o di corrente e nessuna porta è lasciata aperta per trasferire il segnale ad un eventuale utilizzatore non precisato. Se così fosse, ci troveremmo di fronte ad una *rete aperta*. Il principio di sostituzione ci permetterebbe di trattare anche una rete aperta; come? Chiudendola con generatori e strumenti di misura che generano e misurano le stesse tensioni e le stesse correnti indicate come convenzioni di segno alla porte lasciate aperte; cioè chiudendola in un modo ben preciso.

**Leggenda** Da generazioni vige la leggenda che si chiama nodo un punto a cui convergono o da cui divergono almeno tre lati; tale leggenda risale ai tempi in cui i calcoli di analisi venivano svolti a mano, per cui era importante ridurre il numero di equazioni da risolvere al minimo possibile. In realtà nulla vieta che a un nodo converga anche un solo lato; non sarà molto efficace trattare un simile nodo, anche perché la rete così sarebbe aperta, ma non è inutile come potrebbe sembrare; infatti quel nodo può essere pensato collegato al nodo di riferimento o a qualunque altro nodo faccia

comodo mediante un generatore ideale di corrente *spento*, e così si avrebbe una rete chiusa; in un secondo tempo quel generatore può venire acceso, ma non occorre modificare la descrizione del circuito, perché basta solo modificare l'equazione costitutiva del generatore. Inoltre a quel nodo può sempre essere collegato un voltmetro, se ci interessa la tensione di quel nodo, e per gli amanti dei tre lati ecco costituita la terna di lati necessari per trattare quel nodo come un nodo perfettamente lecito per essere preso in considerazione. I programmi di analisi automatica, come per esempio Spice e PSpice, richiedono che siano inseriti eventuali generatori spenti affinché ad ogni nodo convergano almeno due lati, non tre. Per PSpice il voltmetro è sempre sottinteso, quindi anche in questo caso gli amanti della terna di lati sono soddisfatti.

Si noti che avendo deciso di usare la convenzione degli utilizzatori a tutte le porte di tutti i componenti, la freccia della tensione individua univocamente anche il verso della freccia della corrente; per ogni freccia di tensione che punta *verso* un nodo, la corrispondente freccia della corrente è diretta nel verso *uscendo* dal nodo.

Bene, ora si scelga un nodo qualsiasi da prendersi come nodo di riferimento e lo si numeri con il numero 0; si numerino tutti gli altri nodi da 1 a  $N$ , ed ecco contati i nodi indipendenti. Si contino ora i lati  $L$  del grafo, cioè il numero totale delle frecce nel disegno; il numero di maglie è semplicemente  $M = L - N$ . Se il grafo fosse fatto di tante parti staccate basta ripetere questa operazione per ciascuna parte.

Il grafo delle frecce aiuta anche a determinare quali sono le maglie indipendenti e a determinare correttamente i coefficienti  $b_{kj}$  e  $a_{kj}$ . Basta costruire un qualunque albero del grafo. Un albero è un insieme connesso di lati che connette tutti i nodi senza formare nessun percorso chiuso. Un ragionamento elementare consente di dire che i rami dell'albero sono tanti quanti i nodi indipendenti. Infatti il primo ramo dell'albero connette due nodi, mentre ogni ramo successivo aggiunge all'insieme un nuovo ramo e un nuovo nodo.

Evidentemente i lati restanti, presi uno alla volta, se vengono aggiunti all'albero non possono fare altro che essere connessi a due nodi che già appartengono a un insieme connesso, e quindi ogni lato aggiunto forma una maglia (una per ciascun lato aggiunto); i rami restanti sono appunto  $L - N$ , e quindi le maglie indipendenti sono nello stesso numero. Ogni maglia è indipendente dalle altre perché è associata a un lato che compare solo in quella maglia. I lati che identificano ognuna di queste maglie si dicono *corde*, così come i lati che formano l'albero si dicono *rami*.

Infine, identificate le maglie come suggerito sopra, si può prendere come verso (arbitrario) di percorrenza quello concorde con la freccia della corda che ha identificato la maglia  $k$ -esima, e i coefficienti  $b_{kj}$  associati al  $j$ -esimo lato valgono  $+1$  o  $-1$  a seconda che la freccia sia concorde o discorde con il verso assunto come positivo lungo la maglia. I lati che non appartengono alla maglia hanno il corrispondente coefficiente pari a 0.

Inoltre ogni coefficiente  $a_{kj}$  vale  $+1$  se la freccia  $j$ -esima (della tensione) punta verso il nodo  $k$ -esimo, vale  $-1$  se esce dal nodo e vale 0 se il lato corrispondente non è connesso al nodo.

Tutto ciò è stato richiamato molto succintamente, perché si tratta di concetti noti. Questo argomento è comunque ripreso nell'appendice A per ulteriori approfondimenti.

Le equazioni costitutive dei componenti possono essere in linea generale equazioni non lineari; tuttavia qui ci limiteremo al caso che esse siano lineari. Tutt'al più potremo pensare di avere sviluppato in serie dette funzioni arrestando gli sviluppi ai termini lineari e avendo scelto come punto di osculazione della serie un punto identificato da tensioni

e correnti che, insieme a quelle degli altri componenti, soddisfano anche alle equazioni del connettore; supponiamo, cioè, di avere sviluppato le serie attorno alle coordinate che

- rappresentano un punto di equilibrio *statico*.

A seconda dei componenti le equazioni linearizzate possono avere la tensione di ciascuna porta che dipende dalle correnti di tutte le porte, oppure la corrente di ciascuna porta che dipende dalle tensioni a tutte le porte, oppure ciascuna tensione o corrente di porta dipende dalla tensione *oppure* dalla corrente di tutte le porte; le equazioni più generali possono essere della forma

$$v_k = V_{k0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^R c_{kj} v_j + \sum_{j=R+1}^L c_{kj} i_j \quad (1.2a)$$

oppure

$$i_k = I_{k0} + \sum_{j=1}^R c_{kj} v_j + \sum_{\substack{j=R+1 \\ j \neq k}}^L c_{kj} i_j \quad (1.2b)$$

Nelle equazioni (1.2) i coefficienti  $c_{kj}$  sono nulli se la tensione o la corrente  $j$ -esima non influisce sulla grandezza  $k$ -esima. In ciascuna espressione l'una o l'altra sommatoria manca se  $R = 0$  oppure se  $R = L$ .

È ovvio che ogni porta di ciascun componente contribuisce con almeno due grandezze descrittive nuove, e che le porte sono tante quante sono le frecce nel grafo, quindi le equazioni costitutive contribuiscono all'intero sistema con  $L$  equazioni in  $2L$  incognite; le equazioni del connettore sono anch'esse in totale  $L$  nelle stesse  $2L$  incognite, per cui il sistema è completamente definito. Il fatto che esso abbia una sola soluzione, più soluzioni o nessuna soluzione, dipende da quali componenti sono connessi in quale modo. Senza entrare nei dettagli possiamo affermare che in generale basta il buon senso per stabilire se un sistema elettrico, meccanico o altro è ben definito e ha una sola soluzione, o se ha infinite soluzioni, oppure ancora se non ne ha alcuna. È chiaro che in questi

- ultimi due casi il sistema fisico sarebbe patologico; in questi casi lasciar cadere qualche ipotesi di idealità riporta il sistema matematico a rappresentare meglio il sistema fisico e ad eliminare ogni patologia. Nei sistemi non lineari, invece, non è semplice analizzare “a buon senso” la patologia di un sistema, ma anzi il sistema fisico stesso, non il suo modello, talvolta si comporta in modo patologico, dando luogo a comportamenti dinamici difficilmente comprensibili o prevedibili, lasciando intravedere il *caos deterministico*, che oggi rappresenta ancora un dominio di ricerca scientifica fra i più ardui da esplorare.

Ciò premesso conviene ricordare che se i coefficienti  $c_{kj}$  sono costanti, se non dipendono dall'unica variabile sempre sottintesa, cioè dal tempo, siamo in presenza di componenti autonomi o tempo-invarianti. A questi ci riferiremo nel seguito, salvo qualche semplice eccezione usata per mostrare come in alcuni casi si riescano a risolvere problemi di analisi mediante l'uso intelligente dei metodi a disposizione.

- Invece i coefficienti  $c_{kj}$  possono essere degli operatori integro-differenziali, e sono questi operatori che possono rendere difficile l'analisi del sistema.

I componenti elettrici più comuni sono i seguenti:

- **Resistore** — Il resistore lineare è governato dall'equazione

$$v(t) = Ri(t)$$

Versione del 3 ottobre 2001

oppure dall'equazione inversa

$$i(t) = Gv(t)$$

$R$  è la resistenza del resistore e  $G$  ne è la conduttanza. ■

**Condensatore** — Il condensatore lineare è governato dall'equazione ■

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

e  $C$  ne rappresenta la capacità. ■

**Induttore** — L'induttore è governato dall'equazione ■

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

e  $L$  ne rappresenta l'induttanza. ■

**Trasformatore induttivo** — Il trasformatore induttivo senza perdite è governato dal sistema di equazioni ■

$$\begin{cases} v_p(t) = L_p \frac{di_p(t)}{dt} + M \frac{di_s(t)}{dt} \\ v_s(t) = M \frac{di_p(t)}{dt} + L_s \frac{di_s(t)}{dt} \end{cases}$$

dove  $L_p$  è l'induttanza primaria,  $L_s$  è l'induttanza secondaria e  $M$  l'induttanza mutua fra i due induttori che costituiscono il primario e il secondario. Se, come abbiamo supposto, le convenzioni di segno delle tensioni e delle correnti primarie e secondarie sono in accordo con la convenzione degli utilizzatori, il valore di  $M$  può essere negativo o positivo a seconda che due correnti entranti negli avvolgimenti secondo il verso positivo assunto producano nel nucleo flussi di induzione che si contrappongono o che si rinforzano a vicenda. ■

È noto che per un trasformatore non troppo ideale vale la disuguaglianza

$$L_p L_s \geq M^2$$

e il rapporto

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_p L_s}}$$

è sempre minore di 1 in valore assoluto. Esso prende il nome di *coefficiente di accoppiamento*. Se il coefficiente di accoppiamento è molto prossimo a 1, ci troviamo di fronte a un caso abbastanza facile da idealizzare se si pone  $|k| = 1$ . ■

**Trasformatore ad accoppiamento unitario** — Se il coefficiente di accoppiamento soddisfa alla condizione  $|k| = 1$ , le due equazioni differenziali del primo ordine che governano

Versione del 3 ottobre 2001

il trasformatore induttivo degenerano in

$$\begin{cases} i_p(t) = \frac{1}{L_p} \int_{-\infty}^t v_p(\tau) d\tau - \frac{M}{L_p} i_s(t) \\ v_s(t) = \frac{M}{L_p} v_p(t) \end{cases}$$

- Il rapporto  $M/L_p$  rappresenta il *rapporto di trasformazione*. Si noti che mentre il trasformatore induttivo è caratterizzato da *due* equazioni differenziali indipendenti, il trasformatore ad accoppiamento unitario è caratterizzato da una sola equazione contenente un solo integrale.

**Trasformatore ideale** — Se inoltre la permeanza del nucleo del trasformatore ad accoppiamento unitario è grandissima, le induttanze  $M$  e  $L_p$  tendono entrambe a infinito, pur mantenendosi definito il loro rapporto; le equazioni costitutive diventano semplicemente

$$\begin{cases} i_p(t) = -\frac{M}{L_p} i_s(t) \\ v_s(t) = \frac{M}{L_p} v_p(t) \end{cases}$$

- e il trasformatore ideale cessa di essere un componente con memoria. È chiaro che il modello ideale del trasformatore può essere troppo “ideale” in certe circostanze; esso sarebbe capace di alterare il rapporto fra le tensioni e fra le correnti anche in regime stazionario o a frequenza idealmente infinita. Ciò è palesemente assurdo, quindi bisogna tenerne conto nel modellare i sistemi elettrici.
- **Generatori controllati** — I generatori controllati entrano in gioco molto spesso per creare modelli di componenti più complessi, come i transistori bipolari o quelli a effetto di campo. Sono sostanzialmente doppi bipoli, cioè componenti a due porte, spesso usati con un terminale di una porta collegato allo stesso nodo di un terminale dell'altra porta (per cui vengono usati come tripoli); sono essenzialmente quattro tipi distinti a seconda di quale sia la grandezza controllante e quale sia la grandezza controllata. Essi sono elencati qui di seguito insieme alle loro equazioni costitutive.

▷ *Generatore di tensione controllato in tensione*

$$\begin{cases} i_1(t) = 0 \\ v_2(t) = A_v v_1(t) \end{cases}$$

▷ *Generatore di tensione controllato in corrente*

$$\begin{cases} v_1(t) = 0 \\ v_2(t) = R_m i_1(t) \end{cases}$$

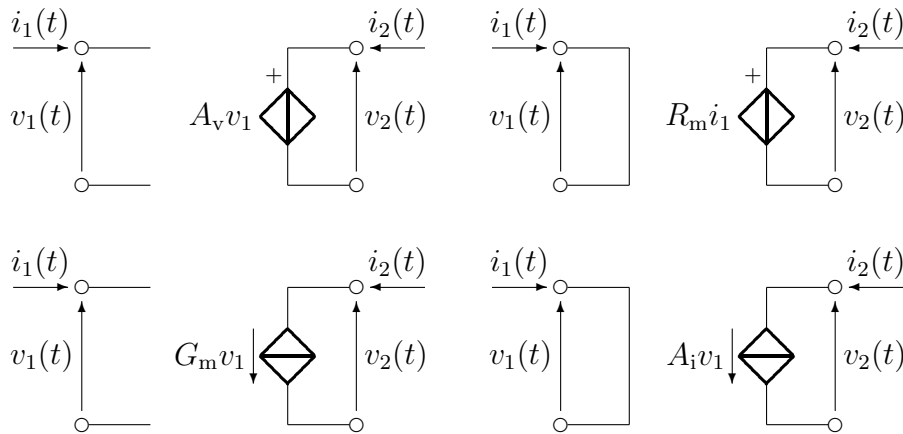
▷ *Generatore di corrente controllato in tensione*

$$\begin{cases} i_1(t) = 0 \\ i_2(t) = G_m v_1(t) \end{cases}$$

▷ *Generatore di corrente controllato in corrente*

$$\begin{cases} v_1(t) = 0 \\ i_2(t) = A_i i_1(t) \end{cases}$$

Si noti come tutti e quattro i generatori controllati siano governati da equazioni algebriche e quindi siano tutti e quattro privi di memoria. Essi sono rappresentati con i loro simboli grafici e le convenzioni di segno nella figura 1.2.



**Figura 1.2.** I quattro generatori controllati

**Amplificatore ideale o amplificatore operazionale** — Se nelle equazioni descrittive dei quattro generatori controllati si portano le grandezze descrittive della porta 1 al primo membro e si fa tendere il coefficiente  $A_v$ , o  $A_i$ , o  $R_m$ , o  $G_m$  a infinito, si ottengono le equazioni di un componente ideale, che amplifica “moltissimo”, cioè infinito, e che prende appunto il nome di amplificatore ideale o, in ricordo dei vecchi tempi dei calcolatori analogici, amplificatore operazionale. Le sue equazioni descrittive

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

ne fanno un componente estremamente patologico (due vincoli sulle grandezze della stessa porta e nessun vincolo sulle grandezze dell'altra porta) ma allo stesso tempo un componente ideale utilissimo per rappresentare con ottima approssimazione gli amplificatori integrati, oggi diffusissimi.

**Giratore** — Vale la pena di citare anche il giratore, governato dalle equazioni

$$\begin{cases} v_1(t) = R_g i_2(t) \\ v_2(t) = -R_g i_1(t) \end{cases}$$

Esso rappresenta il più semplice doppio bipolo passivo, non reciproco e privo di perdite, che trova alcune applicazioni nei circuiti elettrici, ma rappresenta molto bene certi fenomeni di interazione elettromeccanica, come i fenomeni piezoelettrici.

**Generatori indipendenti** — Ovviamente tutti i componenti sopra ricordati sono *inerti*, nel senso che le condizioni di equilibrio in cui tutte le grandezze descrittive sono nulle

soddisfano le equazioni costitutive, quindi sono compatibili con lo stato di quiete assoluta. Perché essi vengano “costretti” a reagire è necessario disporre di generatori di stimoli,

- cioè di generatori di tensione o di corrente, governati rispettivamente dalle equazioni<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}v(t) &= e(t) \\ i(t) &= -j(t)\end{aligned}$$

### 1.3 Analogia elettromeccanica

Le equazioni costitutive di un circuito elettrico sono matematicamente identiche alle equazioni costitutive del sistema meccanico analogo, e viceversa. Possono cambiare i nomi delle variabili e i simboli che rappresentano le varie grandezze in gioco, ma da un punto di vista matematico sono “la stessa cosa”. Talvolta il sistema meccanico analogo può essere d’aiuto per capire il funzionamento di un sistema elettrico, talvolta vale la situazione opposta; data la facilità con cui può essere costruito un circuito elettrico, spesso questo viene usato per simulare “sperimentalmente” il comportamento del corrispondente sistema meccanico. È vero che con i calcolatori oggi disponibili e i programmi di simulazione in commercio, oggi è spesso preferita la simulazione “software” piuttosto che quella “hardware”, ma ciò non toglie nulla alla validità dell’analogia elettromeccanica.

Questa analogia si basa sulla corrispondenza biunivoca fra le grandezze estensive e, rispettivamente, intensive dei due sistemi. Alla tensione corrisponde la velocità, alla corrente corrisponde la forza, e così via. Dalla premessa suddetta deriva che le grandezze del sistema si corrispondono in modo del tutto logico. Le corrispondenze biunivoche fra le grandezze e i concetti coinvolti nell’analogia elettromeccanica sono raccolti nella tabella 1.1.

Ecco dunque che grazie all’analogia e alle corrispondenze della tabella 1.1 non è particolarmente difficile passare dal sistema meccanico della figura 1.3 al corrispondente sistema elettrico; altri esempi saranno esaminati nei capitoli successivi.

### 1.4 L’analogia di dualità

- Esiste un’altra importante analogia che mette in relazione due sistemi elettrici che vengono detti *duali* l’uno dell’altro. L’analogia consiste nel fatto che le grandezze estensive dell’uno vengono associate alle grandezze intensive dell’altro, ma per il resto le equazioni del connettore e le equazioni costitutive dei componenti restano matematicamente identiche. Attenzione: il fatto che le equazioni siano matematicamente identiche, non vuol dire che i due circuiti siano identici, anzi essi sono solitamente molto diversi, non solo per l’interscambio di determinati componenti, ma anche per la struttura del connettore; i componenti, cioè, sono connessi in modo diverso.

L’analogia di dualità prevede che non solo le grandezze intensive e le grandezze estensive siano associate come indicato sopra, ma che tutti i concetti riguardanti i circuiti siano messi in corrispondenza in un modo ben preciso; la tabella 1.2 riporta le corrispondenze in questione.

---

<sup>1</sup> Ricordiamo che stiamo usando la convenzione dei segni degli utilizzatori. Ecco perché il segno negativo nella seconda equazione.

**Tabella 1.1.** Analogia elettromeccanica

Sistema meccanico	Sistema elettrico
Punto di cui si può misurare la velocità lineare o asse di cui si può misurare la velocità angolare	Nodo
Componente di velocità rispetto a una terna inerziale	Potenziale rispetto a un nodo di riferimento o “massa”
Differenza di velocità di due punti o di due assi	Differenza di potenziale fra due nodi, tensione fra due nodi
Inerzia (masse o momenti di inerzia)	Capacità con una armatura a massa
Elementi elastici	Induttori
Leve, accoppiamenti mediante ruote dentate, accoppiamenti non fluidi	Trasformatori ideali
Convertitori di moto lineare in moto rotatorio (a “braccio” costante)	Trasformatori ideali con rapporto di trasformazione non adimensionato ma pari al “braccio”
Forza esterna applicata a un punto o coppia esterna applicata a un asse	Generatore indipendente di corrente connesso fra nodo e massa
Spostamento traslatorio o rotatorio con velocità forzata	Generatore indipendente di tensione

Uno dei pregi della dualità consiste nel fatto che qualunque considerazione si faccia su un circuito elettrico, essa vale tale e quale per il circuito duale, bene inteso cambiando le parole come specificato nella tabella 1.2. In un certo senso essa permette di “dimezzare” il numero di circuiti da analizzare.

Si noti per altro, che non esiste un componente duale del trasformatore induttivo, ma il trasformatore ideale è il duale di se stesso (scambiando adeguatamente il rapporto di tensione con quello di corrente). Per cui, ricorrendo alle varie equivalenze fatte di soli bipoli, o meglio, di bipoli insieme a un trasformatore ideale, si possono gestire anche circuiti contenenti trasformatori induttivi; i loro duali saranno circuiti capacitivi, in generale non corrispondenti ad alcun modello di componente reale, ma pur sempre approssimabili nel mondo reale.

## 1.5 Soluzione delle equazioni del sistema

Le equazioni del sistema sono integro-differenziali; scegliendo adeguatamente le incognite è possibile fare sì che compaiano solo le derivate prime.

Però la soluzione del sistema, cioè la determinazione di tutte le variabili descrittive in funzione del tempo, delle condizioni iniziali e delle eccitazioni in gioco può essere un

*Versione del 3 ottobre 2001*

**Tabella 1.2.** Alcune delle corrispondenze fra gli elementi di due circuiti duali

Circuito	Circuito duale
tensione	corrente
corrente	tensione
resistenza	conduttanza
conduttanza	resistenza
induttanza	capacità
capacità	induttanza
impedenza	ammettenza
ammettenza	impedenza
cortocircuito	circuito aperto
circuito aperto	cortocircuito
generatore di tensione	generatore di corrente
generatore di corrente	generatore di tensione
serie	parallelo
parallelo	serie
taglio	maglia
maglia	taglio
amplificazione di corrente	amplificazione di tensione
amplificazione di tensione	amplificazione di corrente
trasformatore ideale	trasformatore ideale

lavoro formidabile, anche nel caso “semplice” di sistemi fisici lineari governati da sistemi di equazioni lineari.

Si tratta di trovare un metodo che ci offra non solo una riduzione della laboriosità dei calcoli, ma anche che ci consenta di interpretare i risultati intermedi, senza che sia necessario terminare i calcoli in ogni dettaglio.

Vorremmo che il nuovo metodo ci consentisse di conservare tutti, o quasi tutti, i concetti che ci sono già familiari, compresi quelli di impedenza, ammettenza, funzione di trasmissione, l’interpretazione dei risultati in regime sinusoidale, eccetera.

Questo metodo ci è fornito dall’applicazione della trasformazione di Laplace, con la sua antitrasformazione. A questo procedimento sarà integralmente dedicato il prossimo capitolo.

## Esercizi

In alcuni degli esercizi proposti in questo capitolo, molti dei quali sono solo dei semplici ripassi di nozioni acquisite in corsi precedenti, è fornita un’indicazione temporale del tipo [4 min] per dire che quel particolare esercizio deve potersi svolgere agevolmente in 4 minuti. Se l’esercizio richiede un tempo considerevolmente maggiore, diciamo superiore del 50%, può essere un indizio che le nozioni che dovrebbero essere già acquisite o non lo sono, o richiedono un ripasso molto più profondo.

**1.1 Partitore di corrente** Dato il circuito della figura E–1.1 si calcolino le correnti nei quattro resistori sfruttando la formula del partitore di corrente. [4 min]

**1.2 Equivalente di Thevenin** Usando l'equivalenza di Thevenin ai morsetti 1-2, determinare la tensione di uscita  $V_u$  e la resistenza di uscita  $R_u$  del circuito della figura E-1.2; il generatore controllato abbia un'amplificazione di corrente  $K = 100$ . [9 min]

**1.3 Amplificazione e resistenza di uscita** Nel circuito della figura E-1.3 determinare l'amplificazione  $V_u/E$  e la resistenza di uscita ( $K = 100$ ). [10 min]

**1.4 Resistore non lineare** Il bipolo non lineare della figura E-1.4 ha una caratteristica tensione corrente che presenta una pendenza superiore vicino all'origine rispetto alla pendenza che essa ha lontano dall'origine. Si desidera determinare le resistenze dei resistori  $R_1$  ed  $R_2$  in modo che la resistenza apparente (pendenza della corda) del bipolo non lineare valga  $R_0 = 9,4 \text{ k}\Omega$  quando la tensione applicata al bipolo abbia un valore il più prossimo possibile a 10 V, tenendo conto che entrambi i valori delle resistenze devono essere scelti nella serie E 24 (vedi l'appendice C) e che quello di  $R_2$  deve essere il minore possibile. I diodi sono al silicio ed hanno  $V_\gamma = 0,7 \text{ V}$ .

**1.5 Bipoli contenenti diodi** Tracciare i diagrammi tensione-corrente relativi ai bipoli della figura E-1.5 supponendo che i diodi siano ideali.

**1.6 Generatore di corrente (2)** Per il circuito della figura E-1.6, supponendo che l'amplificatore sia ideale, determinare la relazione fra la tensione d'entrata  $V_i$  e la corrente di uscita  $I_L$  nell'ipotesi che le varie resistenze soddisfino alla relazione

$$R_3/R_2 = R_F/R_1$$

Discutere la dipendenza della resistenza di uscita  $R_u$  da rapporti diversi delle quattro resistenze suddette.

**1.7 Amplificatore non lineare (1)** Il circuito della figura E-1.7 è un amplificatore non lineare, o meglio, lineare a tratti; supponendo che i diodi siano ideali ( $V_\gamma = 0$ ,  $r_d = 0$ ), determinare la "funzione di trasmissione".

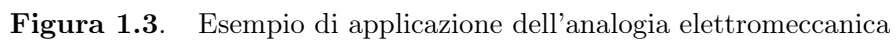
**PS** PSpice Analizzare con PSpice il circuito della figura E-1.7 esaminando i due casi in cui i diodi siano ideali ( $V_\gamma = 0$ ,  $r_d = 0$ ) e in cui non si trascuri la tensione di soglia ( $V_\gamma \neq 0$ ).

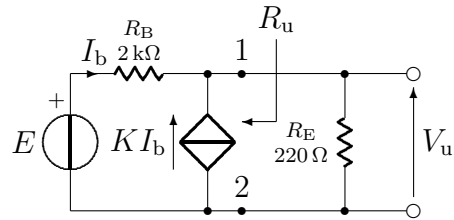
**1.8 Amplificatore non lineare (2)** Il circuito della figura E-1.8 è un amplificatore non lineare, o meglio, lineare a tratti; supponendo che i diodi siano ideali ( $V_\gamma = 0$ ,  $r_d = 0$ ), determinare la "funzione di trasmissione".

**PS** PSpice Analizzare con PSpice il circuito della figura E-1.8 esaminando i due casi in cui i diodi siano ideali ( $V_\gamma = 0$ ,  $r_d = 0$ ) e in cui non si trascuri la tensione di soglia ( $V_\gamma \neq 0$ ).

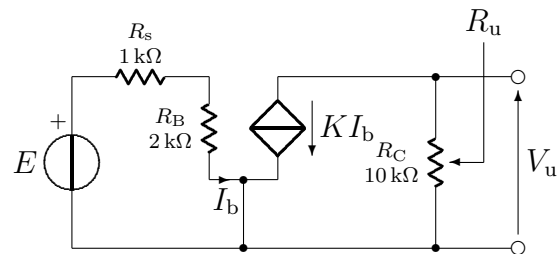
**1.9 Amplificatore non lineare (3)** Il circuito della figura E-1.9 è un amplificatore non lineare, o meglio, lineare a tratti; supponendo che i diodi siano ideali ( $V_\gamma = 0$ ,  $r_d = 0$ ), determinare la "funzione di trasmissione".

**PS** PSpice Analizzare con PSpice il circuito della figura E-1.9 esaminando i due casi in cui i diodi siano ideali ( $V_\gamma = 0$ ,  $r_d = 0$ ) e in cui non si trascuri la tensione di soglia ( $V_\gamma \neq 0$ ).

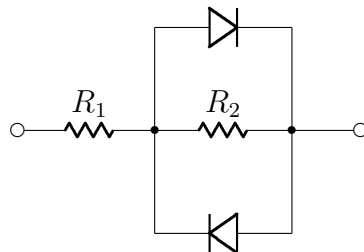




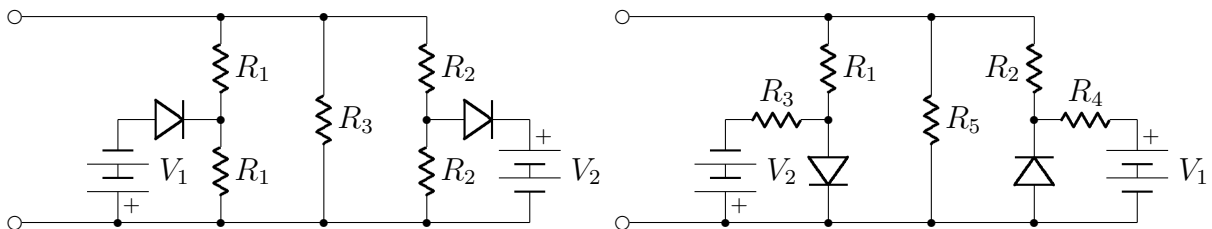
**Figura E-1.2.** Per l'esercizio 1.2



**Figura E-1.3.** Per l'esercizio 1.3



**Figura E-1.4.** Per l'esercizio 1.4



**Figura E-1.5.** Per l'esercizio 1.5

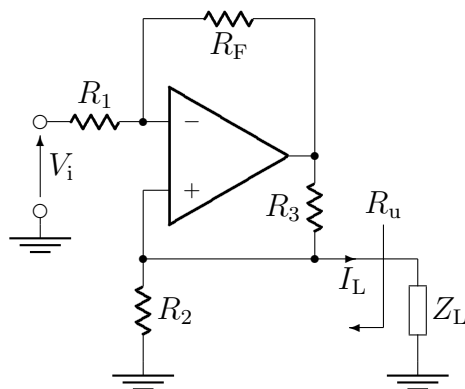


Figura E-1.6. Per l'esercizio 1.6

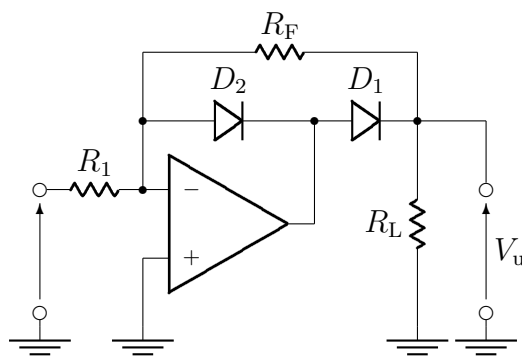


Figura E-1.7. Per l'esercizio 1.7

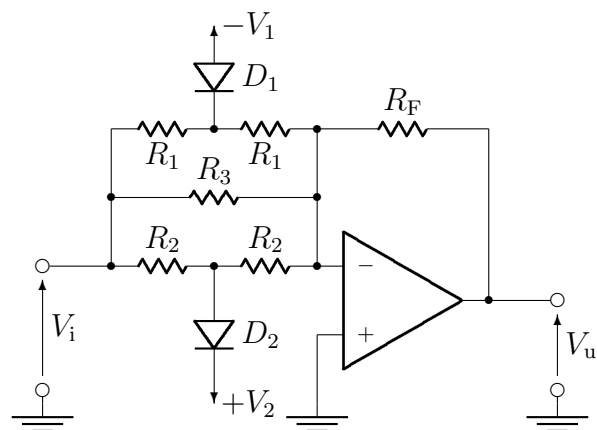
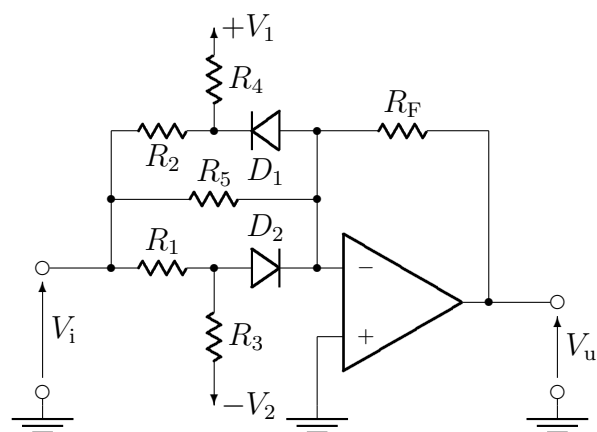


Figura E-1.8. Per l'esercizio 1.8



**Figura E-1.9.** Per l'esercizio 1.9



## Capitolo 2

# La trasformazione di Laplace

### 2.1 Generalità

In questo capitolo daremo la definizione e illustreremo le proprietà dell'operazione chiamata "trasformazione di Laplace". Poiché il risultato di questa trasformazione è una funzione analitica, dovremo ricordare anche le proprietà delle funzioni analitiche. ■

Quello però che dovrebbe rimanere ben saldo dopo lo studio di questo capitolo sono le proprietà operative di questa trasformazione, le proprietà del risultato di questa trasformazione, le proprietà dell'antitrasformazione e, infine, i pochi limiti che ne ostacolano l'applicabilità.

Le conclusioni a cui si perverrà permetteranno di conservare tutti i vantaggi a cui eravamo abituati con l'analisi dei sistemi in regime stazionario e in regime sinusoidale, con l'aggiunta di numerose informazioni supplementari che ci consentiranno di determinare la soluzione completa del problema che ci eravamo posti alla fine del capitolo precedente. Troveremo appunto i legami con il regime sinusoidale, ma non solo quello; potremo definire il regime cisoidale di cui quello sinusoidale e quello stazionario sono solo casi particolari.

Insomma, i risultati che otterremo e applicheremo ai sistemi lineari tempo-invarianti saranno tanto importanti che non potremo più fare a meno di usare la trasformazione di Laplace in tutti i problemi dinamici che dovremo affrontare.

### 2.2 Definizione

Sia  $f(t)$  una funzione continua o continua a tratti o una distribuzione;  $t$  d'ora in poi avrà il significato fisico di *tempo*; matematicamente questo non è un limite, ma da un punto di vista fisico avremo a che fare con grandezze dimensionate, quindi le successive elaborazioni che faremo saranno suscettibili di analisi dimensionale. Purtroppo non sempre le notazioni ormai tradizionalmente usate consentono di ricordare agevolmente la dimensionalità delle grandezze, delle funzioni e, specialmente, delle distribuzioni con le quali avremo a che fare. All'occorrenza verrà richiamata l'attenzione del lettore sui casi più critici. ■

Per quanto riguarda le distribuzioni, lo studente non si allarmi; noi useremo solo la distribuzione impulsiva e le sue derivate, ma le useremo tutte come idealizzazione di fenomeni brevissimi e intensissimi, dei quali non ci interesseranno gli effetti nel breve intervallo di tempo in cui questi fenomeni si sviluppano, ma ci interesseranno gli effetti integrali che detti fenomeni impulsivi provocano.

Supponiamo inoltre che  $f(t)$  sia definita da  $t = 0-$  fino a  $t = +\infty$ ; non ci interessa che cosa possa avere fatto la funzione prima dell'istante iniziale della nostra osservazione del sistema fisico. Per semplicità supporremo che la funzione sia stata nulla prima dell'istante iniziale, ma la cosa importante è che si conosca quanto vale  $f(0-)$  e tutta la funzione da lì in avanti<sup>1</sup>.

Se esiste un numero positivo  $n \geq 0$  e un numero reale  $\alpha$  tale che per  $t$  sufficientemente grande sia sempre

$$|f(t)| = \mathcal{O}(e^{\alpha t} t^n)$$

- allora il seguente integrale, detto *integrale di Laplace*, dipendente dal parametro complesso  $p$  può esistere sotto condizioni piuttosto blande

$$\int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{per ogni } p = \sigma + j\omega \text{ con } \sigma > \alpha \quad (2.1)$$

Se l'integrale esiste, l'intera operazione prende il nome di trasformazione di Laplace e il risultato, funzione della variabile complessa  $p$ , prende il nome di trasformata di

- Laplace o L-trasformata e viene indicata con il simbolo

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2.2)$$

Nel seguito (come per altro si è già fatto nel capitolo precedente) si indicheranno le funzioni del tempo con lettere minuscole e le loro L-trasformate con le corrispondenti lettere maiuscole.

La variabile complessa  $p = \sigma + j\omega$  viene spesso indicata con la lettera  $s$  o con altre lettere; la cosa è del tutto indifferente. Qui userò la lettera  $p$  sia perché è l'iniziale della parola *parametro*, ma ancor più perché essa è dimensionalmente omogenea con una

- pulsazione<sup>2</sup> e le assegniamo il nome di *pulsazione complessa*. Infatti è

$$e^{pt} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

per cui  $p$  è omogenea con  $\sigma$  ed entrambe sono omogenee con la pulsazione  $\omega$ ; le dimensioni fisiche pertanto sono

$$[p] = [\sigma] = [\omega] = [t]^{-1}$$

<sup>1</sup> In molti testi sulla trasformazione di Laplace si parla solo della funzione  $f(t)$  da  $t = 0+$  in avanti; nella grande maggioranza dei casi la cosa è del tutto indifferente; io ritengo che sia più produttivo ragionare da  $t = 0-$  in avanti, cosicché si tengono meglio in conto le discontinuità che avvengono all'istante iniziale.

<sup>2</sup> Più avanti si esaminerà il significato fisico di questa variabile; vorrei che fin d'ora lo studente si abituasse a considerare tutte le grandezze che verranno usate come *quantità fisiche* e non semplicemente come variabili matematiche. Sulle grandezze non si possono eseguire tutte le operazioni che si possono eseguire sulle variabili matematiche:  $\log d$  ha significato in matematica, ma in fisica, se  $d$  è una distanza, un diametro, una densità, una ..., quell'operazione non ha significato proprio perché non è definito il logaritmo dell'unità di misura. Le operazioni trascendenti si potranno eseguire solo su espressioni fra grandezze che risultino adimensionate.

e, si noti bene, i radianti non vi trovano nessun posto; sono quindi da respingere le denominazioni anglosassoni del tipo di *radian frequency* o le corrispondenti espressioni nostrane del tipo *frequenza angolare*; gli angoli e la loro unità di misura di radiante non intervengono né nella pulsazione ordinaria né in quella complessa.

Si noti che, se l'integrale di Laplace (2.1) esiste, esiste solo quando la parte reale della pulsazione complessa è sufficientemente grande,  $\sigma > \alpha$ ; l'integrale può esistere anche per  $\sigma = \alpha$ , ma non per qualunque valore di  $p$ , quindi in questi casi la cosa va analizzata più dettagliatamente. La funzione matematica  $F(p)$  può esistere anche in punti del semipiano  $\sigma < \alpha$ , ma in questo semipiano *non* ha il significato di integrale di Laplace, né di L-trasformata. Il semipiano destro dove l'integrale di Laplace converge si chiama, ovviamente, *dominio di convergenza*, e il limite inferiore dei valori di  $\alpha$  per il quale l'integrale di Laplace converge si chiama *ascissa di convergenza*.

Se l'ascissa di convergenza vale  $-\infty$ , l'integrale di Laplace esiste sempre; ciò succede se la funzione  $f(t)$  è sufficientemente regolare ed è a supporto limitato, cioè è diversa da zero solo in un intervallo finito  $0- \leq t \leq T < +\infty$ . In questi casi la funzione  $F(p)$  o si riduce a una costante o presenta un qualche tipo di singolarità all'infinito.

## 2.3 Analiticità della L-trasformata

Nel dominio di convergenza la funzione  $F(p)$  è analitica; che cosa vuol dire? Vuol dire che essa appartiene a quella piccola ma importantissima schiera di funzioni di variabile complessa per le quali valgono le condizioni di Cauchy–Riemann in ogni punto in cui esse sono regolari.

Ricapitoliamo le proprietà delle funzioni di variabile complessa.

Siano  $z = x + jy$  e  $w = u + jv$  due variabili complesse; scrivere

$$w = f(z) \quad \text{cioè} \quad u + jv = \mathbf{Re}[f(x + jy)] + j \mathbf{Im}[f(x + jy)]$$

vuol dire stabilire una corrispondenza fra ogni punto del piano  $z$ , quindi fra ogni coppia  $(x, y)$  con uno o più punti del piano  $w$ , cioè con una o più coppie  $(u, v)$ . Queste corrispondenze possono essere le più varie, ma fra queste spiccano quelle per le quali in un piccolo intorno di ogni punto  $z$  la trasformazione è una rotoamplificazione. Questo implica che ogni breve linea che si diparte da  $z$  viene trasformata in un'altra breve linea che si diparte da  $w$  e che risulta scalata per una costante e ruotata dello stesso angolo, indipendentemente da quale breve linea si consideri uscente da  $z$ , cioè indipendentemente dalla direzione del segmentino che esce da  $z$ . Passando al limite, questo significa che il limite del rapporto incrementale al tendere a zero della lunghezza del segmentino non dipende dall'angolo del segmentino. In formule il segmentino sia rappresentato da  $r e^{j\varphi}$ ; allora se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z + r e^{j\varphi}) - f(z)}{r e^{j\varphi}} = f'(z) \quad (2.3)$$

esiste e non dipende da  $\varphi$ , allora nel punto  $z$  la funzione è analitica. Si noti che il limite del rapporto incrementale definisce la derivata della funzione; non è un caso, quindi, che il risultato del limite sia stato indicato con  $f'(z)$ . Si noti ancora che questa rotoamplificazione presenta parametri di amplificazione  $|f'(z)|$  e di rotazione  $\arg[f'(z)]$  che variano da punto a punto del piano  $z$ , ma per ogni punto  $z$  nel quale si incrociano due linee curve, formando un angolo di intersezione pari a  $\psi$ , le due linee trasformate nel piano

$w$  avranno una forma in generale completamente diversa, ma nel punto di intersezione formeranno lo stesso angolo  $\psi$ . Le trasformazioni fra due piani, o più in generale fra due

- superfici, che conservano gli angoli, si chiamano *trasformazioni conformi* e trovano molte interessanti applicazioni.

Traducendo la condizione (2.3) in termini delle componenti reali e immaginarie delle

- variabili  $z$  e  $w$  si ottengono le celebri condizioni di Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.4)$$

È facile verificare che molte comuni operazioni eseguibili su una variabile complessa, come ad esempio  $|z|$ , oppure  $z^*$ , *non* sono analitiche, mentre le potenze lo sono, lo sono i polinomi, lo sono le espressioni razionali in tutti i punti in cui il denominatore è diverso da zero, lo sono le funzioni trascendenti più comuni, mentre le loro inverse lo sono quasi ovunque, purché si scelga una delle loro determinazioni.

Le condizioni (2.4) consentono di ricavare ancora che le due funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$

- soddisfano all'equazione di Poisson<sup>3</sup>

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \nabla^2 v = 0 \end{cases}$$

- in tutto il dominio in cui  $f(z)$  è analitica e perciò sono funzioni *armoniche*; ne segue che se A e B sono due punti del piano  $(x, y)$  collegati mediante due percorsi  $\ell_1$  e  $\ell_2$  tali che uno possa essere deformato fino a coincidere con l'altro senza “scavalcare” punti in cui  $f(z)$  non è analitica<sup>4</sup>, allora sono uguali i due integrali di linea

$$\int_{\ell_1} f(z) dz = \int_{\ell_2} f(z) dz$$

Da ciò segue che l'integrale di  $f(z)$  lungo il percorso chiuso  $\gamma = \ell_1 \cup -\ell_2$  è nullo, purché  $f(z)$  sia analitica dentro tutto il dominio racchiuso da  $\gamma$ ; vale quindi l'importante relazione che

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (2.5)$$

- Si noti che il contorno  $\gamma$  definito sopra è *semplicemente connesso*.

Ne segue anche che tutti i valori all'interno del dominio sono definiti dai valori che la funzione assume sul contorno; in formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.6)$$

dove  $\zeta$  è la variabile corrente lungo il perimetro  $\gamma$  del dominio in questione.

Un'altra conseguenza delle condizioni di Cauchy–Riemann è che se la funzione  $f(z)$  è analitica in un dominio tranne nei punti  $z_1, z_2, \dots$  dove è singolare, allora è possibile

<sup>3</sup> L'equazione  $\nabla^2 f = 0$  viene spesso anche scritta  $\Delta f = 0$  e viene anche chiamata *equazione di Laplace*.

<sup>4</sup> Per semplicità supponiamo anche che tale deformazione non porti uno dei due percorsi a incrociarsi con l'altro.

applicare l'equazione (2.5) ad un percorso che ritaglia il dominio escludendo gli intorni infinitesimi dei punti singolari; vale la relazione<sup>5</sup>

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_k R_k \quad (2.7)$$

dove ogni  $R_k$  è associato a ciascun punto singolare  $z_k$  e si chiama *residuo* nel punto  $z_k$ . Se la funzione fosse singolare all'infinito allora il residuo all'infinito si otterrebbe calcolando l'integrale a primo membro dell'equazione (2.7) lungo un percorso che lasciasse alla sinistra solo la singolarità all'infinito; se questo percorso è una circonferenza centrata nell'origine e di raggio sufficientemente grande da lasciare all'esterno solo la singolarità all'infinito, deve essere percorsa in senso orario per lasciare il dominio esterno alla sua sinistra. Lo stesso contorno circolare percorso in verso antiorario dà per risultato la somma dei residui nelle singolarità al finito. Siccome è cambiato solo il verso di percorrenza, e quindi il segno del risultato, vale la relazione che lega il residuo all'infinito con i residui al finito

$$R_{\infty} = - \sum_k R_k \quad (2.8)$$

Se la funzione integranda è regolare in tutti i punti al finito, come per esempio l'esponenziale o il coseno, il residuo all'infinito vale zero, nonostante la presenza di una singolarità all'infinito.

## 2.4 La distribuzione impulsiva di Dirac

Come si è preannunciato, qui non si farà nessuna teoria delle distribuzioni; si accenna solo alla distribuzione di Dirac, detta anche impulso unitario e indicata con il simbolo  $\delta(x)$ , dove  $x$  è una variabile matematica adimensionata.

Prendiamo la cosa alla lontana; sia  $d(x)$  una funzione reale a supporto limitato, per esempio nell'intervallo  $[0-, x_0]$ , sia nulla all'esterno di detto intervallo, e sia tale che, indipendentemente dalla sua forma, l'area sottesa fra la funzione  $d(x)$  e l'asse reale sia unitaria

$$\int_{0-}^{x_0} d(x) dx = 1$$

Si esamini ora l'integrale

$$\int_{0-}^{\infty} f(x) d(x) dx = \int_{0-}^{x_0} f(x) d(x) dx$$

dove  $f(x)$  è una funzione continua all'interno dell'intervallo  $[0-, x_0]$ ; un noto teorema di analisi ci assicura che è

$$\int_{0-}^{x_0} f(x) d(x) dx = f(\xi) \int_{0-}^{x_0} d(x) dx = f(\xi)$$

dove  $f(\xi)$  è il valore che  $f(x)$  assume in un punto  $\xi$  interno all'intervallo  $[0-, x_0]$ .

<sup>5</sup> L'integrale di linea si intende percorso in senso diretto se il dominio che esso racchiude si trova a sinistra del percorso.

Ammessi che sia lecito, si faccia tendere  $x_0$  a  $0+$ ; il risultato dei precedenti integrali non cambia, ma il restringimento dell'intervallo fino a contenere “solo” l'origine, implica che  $\xi = 0$  e che il risultato dell'integrale sia semplicemente  $f(0)$ .

Siccome al tendere a zero dell'intervallo, la funzione  $d(x)$  tende a essere nulla ovunque tranne nell'origine dove assumerebbe il valore infinito, il precedente passaggio al limite non sarebbe lecito in termini dei concetti dell'analisi matematica di base, ma serve per definire una nuova entità, detta *distribuzione di Dirac*, definita operativamente mediante l'espressione

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx \quad (2.9)$$

Nello stesso modo operativo si possono definire le derivate della distribuzione di Dirac; derivando formalmente ambo i membri dell'equazione (2.9) si ottiene

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)\delta(x) + f(x)\delta'(x)] dx$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x) dx = -f'(0) \quad (2.10)$$

Ripeto, i passaggi matematici eseguiti assomigliano solo formalmente a quelli dell'ordinaria analisi matematica, ma ne differiscono sostanzialmente nel senso che servono solo per dare delle definizioni operative, che non avrebbero senso nell'ambito della analisi matematica di base<sup>6</sup>.

Che cosa succederebbe se  $x$  fosse una variabile dimensionata, per esempio il tempo  $t$ ? La tradizione vorrebbe che la definizione operativa (2.9) continuasse a valere senza cambiare una virgola. La logica e l'algebra delle grandezze vorrebbero che prima di eseguire il calcolo di definizione (2.9) si eseguisse un cambiamento di variabile in modo da rendere tutta l'espressione adimensionata. Per non violare la tradizione ci accontenteremo di considerare dimensionata anche la distribuzione  $\delta(x)$  assumendo che

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

In questo modo riusciamo a mantenere il controllo dimensionale senza cambiare nulla di quello che la teoria delle distribuzioni ci insegna.

## 2.5 Proprietà della trasformata di Laplace

### Analiticità

I richiami del paragrafo precedente erano necessari per determinare le proprietà della trasformata di Laplace; è chiaro innanzi tutto che per  $\sigma > \alpha$  l'integrale di Laplace è derivabile rispetto a  $p$ , nel senso che il limite del rapporto incrementale esiste e non dipende dalla direzione in cui si prende l'incremento

$$\frac{dF(p)}{dp} = - \int_{0-}^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt$$

<sup>6</sup> Scambiare il segno di limite con il segno di integrale sarebbe lecito se il limite e l'integrale convergessero uniformemente, ma ciò non avviene; ecco perché la teoria delle distribuzioni non rientra in generale nell'ambito dell'analisi matematica di base.

E se  $F(p)$  è analitica in un dominio, il dominio di convergenza  $\sigma > \alpha$ , essa può essere continuata analiticamente anche fuori del dominio, ma come funzione, non come L-trasformata, essa esisterà e sarà analitica in tutto il piano complesso escluse, ovviamente, le singolarità. Per quanto riguarda la linea  $\sigma = \alpha$  la L-trasformata può avere ancora significato, tranne nei punti in cui  $F(p)$  è singolare.

### Linearità

La L-trasformata è un'operazione lineare ■

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] \quad \forall \sigma > \max(\alpha_1, \alpha_2)$$

### Traslazione nel tempo o teorema del ritardo

Sia  $F(p)$  la L-trasformata di  $f(t)$  con ascissa di convergenza  $\alpha$  e si supponga che sia  $f(t) \equiv 0$  per valori negativi del tempo. Se si trasla  $f(t)$  nel tempo della quantità positiva  $T$  la funzione diventa  $f(t - T)$  ed è nulla per ogni valore del tempo inferiore a  $T$ . La sua L-trasformata vale

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-pT} F(p) \quad \forall \sigma > \alpha$$

### Modulazione o traslazione in frequenza

Sia  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$  con ascissa di convergenza  $\alpha$ ; allora se si moltiplica la funzione trasformanda per  $\exp(p_0 t)$  si ha<sup>7</sup>

$$\mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)] = F(p - p_0) \quad \forall \sigma > \alpha + \sigma_0$$

### Cambiamento di scala del tempo

Sia  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$  con ascissa di convergenza  $\alpha$  e sia  $k$  una costante numerica oppure anche dimensionata come un tempo; allora

$$\mathcal{L}[f(t/k)] = kF(kp) \quad \forall \sigma > \alpha/k$$

### Cambiamento di scala in frequenza

L'espressione precedente può essere invertita per ottenere

$$F(kp) = \frac{\mathcal{L}[f(t/k)]}{k}$$

## 2.5.1 Alcuni esempi

1. Se  $f(t) = \delta(t)$  l'integrale di Laplace e la definizione operativa della distribuzione di Dirac forniscono

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad \forall \sigma > -\infty$$

---

<sup>7</sup> La parola modulazione nasce dal fatto che se  $\text{Re}[p_0] = \sigma_0 = 0$  l'operazione indicata corrisponde a moltiplicare la funzione trasformanda per un seno e un coseno corrispondenti alla pulsazione  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ; questa è una delle modulazioni che si possono fare sul segnale  $f(t)$ ; su questo tipo di modulazione si basano molti sistemi di trasmissione.

2. Sia  $u(t)$  una funzione nulla per  $t < 0$  e pari a 1 per  $t \geq 0$ ; essa può essere anche pensata come l'integrale della distribuzione di Dirac

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Risulta

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p} \quad \forall \sigma > 0$$

3. Viceversa la trasformata della derivata dell'impulso di Dirac si ricava ricorrendo alla definizione

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = \int_{0-}^{+\infty} e^{-pt} \delta'(t) dt = - \int_{0-}^{+\infty} (-p e^{-pt}) \delta(t) dt = p$$

Lo stesso risultato si può ottenere con l'applicazione della successiva regola (2.11).

4. Sia  $f(t) = \exp(at)$ ; l'integrale di Laplace dà

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a} \quad \forall \sigma > \operatorname{Re}[a]$$

5. Se  $a = j\omega_0$  la linearità e il risultato precedente forniscono

$$\mathcal{L}[\cos \omega_0 t] = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \quad \forall \sigma > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\sin \omega_0 t] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad \forall \sigma > 0$$

Si noti che il dominio di convergenza e l'ascissa di convergenza di ciascuno degli esempi precedenti lascia a sinistra tutte le singolarità della funzione analitica del secondo membro; questo non è un caso e sarà sempre così.

### 2.5.2 Trasformata della derivata di una funzione

Se si sa quanto vale la trasformata di una funzione  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ , possiamo determinare una volta per tutte che relazione c'è fra questa L-trasformata e la L-trasformata della derivata della funzione; integrando per parti l'integrale di Laplace otteniamo

$$\int_{0-}^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_{0-}^{+\infty} - \int_{0-}^{+\infty} (-p) f(t) e^{-pt} dt$$

e sviluppando

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0-) \quad (2.11)$$

L'espressione precedente, come si vede, trasforma l'operazione di derivazione nel dominio del tempo in un'operazione algebrica nel dominio della pulsazione complessa; questa proprietà è di fondamentale importanza per risolvere le equazioni dinamiche di un sistema fisico (lineare).

Si noti che l'equazione (2.11) contiene direttamente le condizioni iniziali, per cui, come vedremo, essa consentirà di determinare la soluzione completa del sistema integro-differenziale che modella il comportamento di un sistema fisico.

Versione del 3 ottobre 2001

### 2.5.3 Trasformata dell'integrale

Sia conosciuta la L-trasformata  $F(p)$  della funzione  $f(t)$  calcolata come sempre da 0–all'infinito, ma ora non supponiamo che  $f(t)$  sia nulla per tempi negativi; sia ancora

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0-} f(\tau) d\tau + \int_{0-}^t f(\tau) d\tau = g(0-) + \int_{0-}^t f(\tau) d\tau$$

La L-trasformata di  $g(t)$  è legata a quella di  $f(t)$  da

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{g(0-)}{p} + \frac{F(p)}{p} \quad (2.12)$$

come si deduce direttamente integrando la definizione di  $g(t)$  e ricorrendo all'inversione dell'ordine delle integrazioni. Nuovamente si osserva che la trasformata dell'integrale non si cura di che cosa la funzione trasformanda abbia fatto “nel passato”, ma ne conserva l'intera storia con il valore  $g(0-)$ , cioè con il valore che la funzione assume immediatamente prima dell'istante iniziale di osservazione.

Si noti che l'ascissa di convergenza della trasformata della derivata può cambiare se la moltiplicazione per  $p$  elimina l'eventuale singolarità di  $F(p)$  nell'origine, mentre l'ascissa di convergenza della trasformata dell'integrale in generale cambia perché viene introdotta una singolarità nell'origine (tranne nel caso che  $F(p)$  abbia uno zero nell'origine di molteplicità non inferiore a 1).

### 2.5.4 Trasformata del prodotto di convoluzione

Si definisce *prodotto di convoluzione* l'operazione seguente

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad (2.13)$$

Il limite inferiore di integrazione generalmente è indicato con  $-\infty$ ; qui abbiamo indicato direttamente “zero”, perché come al solito supponiamo che le funzioni in gioco siano nulle per  $t < 0$ . Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t) \star g(t)] = F(p)G(p) \quad \forall \sigma > \max(\alpha_f, \alpha_g) \quad (2.14)$$

Ancora la trasformazione di Laplace consente di trasformare operazioni integro-differenziali in operazioni algebriche.

Il prodotto di convoluzione gioca un ruolo importante nell'analisi dei sistemi lineari e non è un caso che la trasformazione di Laplace lo gestisca in modo così semplice.

### 2.5.5 Teorema del valore finale

Sia  $F(p)$  la L-trasformata di  $f(t)$  ed abbia ascissa di convergenza  $\alpha < 0$ ; vale il seguente teorema

$$f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0+} pF(p) \quad (2.15)$$

dove  $p \rightarrow 0+$  significa che  $p$  deve avvicinarsi all'origine provenendo dal semipiano destro.

Se invece l'ascissa di convergenza fosse positiva, il valore finale sarebbe infinito, proprio in virtù dell'ipotesi che per tempi sufficientemente grandi sia  $|f(t)| = \mathcal{O}(\exp(\alpha t)t^n)$ .

Con  $\alpha = 0$  si presentano diversi casi. Se la funzione  $pF(p)$  presentasse una singolarità nell'origine, questo sarebbe indice del fatto che l'integrale di Laplace non converge, perché in questo caso per tempi sufficientemente grandi sarebbe  $|f(t)| = \mathcal{O}(t^n)$ . Ma anche qualora  $pF(p)$  fosse regolare nell'origine, l'applicazione del teorema non sarebbe sicura e potrebbero ottenersi risultati errati. In conclusione il teorema del valore finale può essere usato solo quando  $\alpha < 0$ .

Il teorema espresso mediante l'equazione (2.15) si ricava direttamente calcolando il limite indicato nell'espressione (2.11).

### 2.5.6 Teorema del valore iniziale

La funzione  $f(t)$  per  $t \rightarrow 0+$  può avere tre comportamenti sostanzialmente distinti:

1.  $|f(0+)| = \infty$
2.  $f(0+) = f(0-) = 0$
3.  $f(0+) \neq f(0-)$

In tutti e tre i casi, però, vale il teorema del valore iniziale espresso mediante il limite seguente

$$f(0+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) \quad (2.16)$$

dove  $p \rightarrow +\infty$  significa che  $p$  tende a infinito mantenendosi nel semipiano di convergenza, cioè con parte reale alla lunga positiva. Agli effetti pratici basta porre  $p = \sigma + j0$  e far tendere  $\sigma$  a infinito per valori positivi.

Nel primo caso la funzione presenta una discontinuità infinita integrabile, almeno nel senso delle distribuzioni; l'ascissa di convergenza potrebbe essere un valore finito qualsiasi, ma l'infinito non sarebbe un punto regolare della funzione  $pF(p)$  e quindi il risultato che si ottiene calcolando il limite indicato nel teorema (2.16) sarebbe in accordo con il comportamento di  $f(0+)$ .

Nel secondo caso la funzione  $pF(p)$  tende a zero; il calcolo del limite indicato sui due membri dell'espressione (2.11), tenendo conto che  $f(0-) = 0$ , porta direttamente al risultato, pur di invertire il calcolo del limite con quello dell'integrale.

Nel terzo caso siamo di fronte a una discontinuità: all'istante iniziale la funzione  $f(t)$  presenta una discontinuità di ampiezza  $f(0+) - f(0-)$ ; essa può quindi essere pensata come la sovrapposizione di un gradino e di una funzione  $\bar{f}(t)$  che nell'origine è continua e vale 0, come quella esaminata nel caso precedente; poniamo allora

$$f(t) = (f(0+) - f(0-))u(t) + \bar{f}(t)$$

cosicché la sua derivata vale

$$f'(t) = (f(0+) - f(0-))\delta(t) + \bar{f}'(t)$$

L'applicazione del limite per  $p \rightarrow +\infty$  all'equazione (2.11) porta a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = (f(0+) - f(0-)) \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt + 0 + f(0-) = f(0+)$$

il che prova l'assunto.

### 2.5.7 Esempi

1. La distribuzione di Dirac e i suoi successivi integrali formano la successione

$$\delta(t) \quad u(t) \quad t \quad \frac{t^2}{2} \quad \frac{t^3}{3!} \quad \cdots \quad \frac{t^n}{n!}$$

con tutti i termini che sono identicamente nulli prima dell'istante iniziale. L'applicazione della regola della trasformata dell'integrale (2.12) porta alla successione di trasformate

$$1 \quad \frac{1}{p} \quad \frac{1}{p^2} \quad \frac{1}{2!p^3} \quad \frac{1}{3!p^4} \quad \cdots \quad \frac{1}{n!p^{n+1}}$$

per cui la trasformata della generica potenza  $t^n$  diventa

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

2. La trasformazione di una serie uniformemente convergente da 0 a  $\infty$  diventa perciò

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{p^{k+1}}$$

3. L'applicazione della regola precedente alla serie corrispondente a

$$e^{p_0 t} = \sum_{k=0}^{\infty} [(p_0 t)^k / k!]$$

diventa

$$\mathcal{L}[e^{p_0 t}] = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} (p_0/p)^k$$

L'ultima serie non è altro che la serie geometrica (convergente per  $|p| > |p_0|$ ), per cui il risultato finale è

$$\mathcal{L}[e^{p_0 t}] = \frac{1}{p - p_0}$$

come si era già ottenuto; si noti che la funzione matematica converge per  $|p| > |p_0|$ , mentre l'integrale di Laplace converge nel semipiano delimitato a sinistra dalla retta verticale passante per il punto  $p = p_0$ ; i due domini non sono tali che il dominio di convergenza di Laplace è sempre contenuto nel dominio di convergenza della serie geometrica; questo è un aspetto che ci deve far meditare sulla differenza fra la L-trasformata e la funzione analitica che la rappresenta in quanto hanno significati fisici e matematici diversi.

4. Le trasformate delle funzioni circolari (già ricavate) e delle funzioni iperboliche si ottengono applicando la proprietà della linearità; in particolare

$$\mathcal{L}[\sinh \sigma_0 t] = \frac{\sigma_0}{p^2 - \sigma_0^2}$$

$$\mathcal{L}[\cosh \sigma_0 t] = \frac{p}{p^2 - \sigma_0^2}$$

5. La trasformata di un impulso rettangolare unitario definito come

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0- \\ 1 & \text{per } 0 \leq t < T- \\ 0 & \text{per } T < t \end{cases}$$

cioè

$$f(t) = u(t) - u(t - T)$$

vale

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1 - e^{pT}}{p}$$

6. Sia  $g(t)$  una funzione nulla ovunque tranne nell'intervallo  $0 \leq t < T$  dove non presenta discontinuità non integrabili, e sia  $G(p)$  la sua trasformata, convergente ovunque, poiché la funzione trasformanda è a supporto limitato. La trasformata della funzione periodica, di periodo  $T$ , ottenuta replicando la stessa funzione  $g(t)$  ritardata di multipli interi del suo intervallo di definizione, è data da

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g(t - kT)\right] = G(p) \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT}\right) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}}$$

Si noti che la trasformata della funzione periodica presenta infiniti poli sull'asse  $\omega$  nelle posizioni  $\omega_r = 2\pi r/T$ . Sapendo questo, non sarebbe difficile ricavare la serie di Fourier corrispondente alla funzione periodica in esame.

7. Il valore iniziale della funzione  $\sin \omega_0 t$  vale

$$\sin 0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} = 0$$

come ben si sa; analogamente per il coseno

$$\cos 0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} = 1$$

e gli stessi risultati valgono per le corrispondenti funzioni iperboliche.

8. Il valore finale del seno non si può calcolare usando il teorema del valore finale, perché l'ascissa di convergenza vale zero. Se li si volesse applicare lo stesso, si otterrebbe

$$\sin \infty = \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{p\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} = 0$$

che è evidentemente errato, perché il seno non raggiunge nessun limite per  $t \rightarrow \infty$ .

9. Per le funzioni iperboliche il problema non si pone, in quanto la loro ascissa di convergenza è positiva ( $\alpha = +\sigma_0$ ) e impedisce l'applicazione del teorema del valore finale, perché l'origine è fuori dal dominio di convergenza. Nello stesso tempo l'ascissa di convergenza  $\alpha = +\sigma_0$  implica che per  $t$  sufficientemente grande sia

$$\sinh \sigma_0 t = \mathcal{O}(e^{\sigma_0 t})$$

come del resto si sa bene dalla definizione

$$\sinh \sigma_0 t = \frac{e^{\sigma_0 t} - e^{-\sigma_0 t}}{2}$$

10. Invece in alcuni casi si possono ottenere risultati validi con il teorema del valore finale; si consideri la funzione di Bessel di prima specie  $J_0(t)$  la cui trasformata vale<sup>8</sup>

$$\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

La presenza della radice quadrata qualifica questa funzione come polidroma, e per sceglierne una determinazione bisogna eseguire opportuni tagli nel (foglio del) piano  $p$  in modo da evitare di poter girare attorno ai punti singolari, detti in questo caso *punti di diramazione*. Se si esegue un taglio che congiunge i punti  $+j$  e  $-j$  lungo l'asse  $\omega$ , la funzione viene resa monodroma e viene identificata una sola determinazione della funzione; l'ascissa di convergenza era e rimane  $\alpha = 0$ . Ora il punto  $0+$  cade sul bordo del taglio e quindi è raggiungibile nel calcolo del limite previsto dal teorema del valore finale; si ottiene

$$J_0(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = 0$$

e questa volta, contrariamente a quanto succedeva con le funzioni circolari, il risultato è esatto. Il fatto che il risultato sia corretto non deve però far pensare che allora il teorema del valore finale si può usare sempre, quando è  $\alpha = 0$ , perché abbiamo visto che non è vero in generale.

11. Se nella definizione della L-trasformata si derivano ambo i membri rispetto a  $t$  si ricava una nuova regola

$$\frac{dF(p)}{dp} = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

Tale regola può essere utile per risolvere alcuni problemi di equazioni differenziali a coefficienti non costanti, come nell'esempio seguente.

12. Vogliamo ora trovare la trasformata di Laplace della funzione di Bessel di prima specie  $J_0(t)$ ; detta funzione è soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti *non costanti*<sup>9</sup>

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} + (t^2 - n^2)x = 0$$

La particolare soluzione chiamata  $x(t) = J_0(t)$  corrisponde a  $n = 0$  e soddisfa alle condizioni iniziali  $J_0(0) = 1$  e  $J'_0(0) = 0$ ; con queste ipotesi l'equazione differenziale si semplifica in

$$t \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + tx = 0$$

<sup>8</sup> Più avanti se ne eseguirà la determinazione.

<sup>9</sup> Questo è uno dei pochi casi trattati in questo testo in cui vengono considerati problemi differenziali con coefficienti dipendenti dal tempo.

Se trasformiamo secondo Laplace entrambi i membri otteniamo

$$\mathcal{L}\left[t\frac{d^2x}{dt^2}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] + \mathcal{L}[tx] = 0$$

Usiamo ora la regola ricavata nell'esempio precedente e otteniamo

$$-\frac{d}{dp}[p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0)] + pX(p) - x(0) - \frac{dX(p)}{dp} = 0$$

cioè

$$(p^2 + 1)\frac{dX(p)}{dp} = -pX(p)$$

Si noti che così facendo le informazioni sulle condizioni iniziali nel dominio del tempo sono svanite, ma è comparsa un'altra equazione differenziale nel dominio della pulsazione complessa; quest'ultima equazione è a variabili separabili

$$\frac{dX}{X} = -\frac{p dp}{p^2 + 1}$$

e può essere integrata facilmente ottenendo

$$X(p) = \frac{K}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$$

Ora la costante di integrazione  $K$  deve essere determinata in modo che le condizioni iniziali nel dominio del tempo siano soddisfatte; siccome deve essere  $x(0) = J_0(0) = 1$ , applichiamo il teorema del valore iniziale e otteniamo

$$1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{pK}{\sqrt{(p^2 + 1)}} = K$$

che ci lascia infine con

$$\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$$

Ma che fine ha fatto la seconda condizione iniziale  $\dot{x}(0) = 0$ ? Visto che non ci sono errori nei calcoli eseguiti, controlliamo almeno che questa condizione iniziale sia soddisfatta. In fondo l'equazione differenziale di Bessel ammette due soluzioni indipendenti con le cui costanti moltiplicative si possono soddisfare i due vincoli iniziali, ma nell'applicare la regola della derivata della L-trasformata, ci siamo ritrovati con un'equazione differenziale del primo ordine che ci consente di specificare una sola condizione iniziale. Non indaghiamo oltre, ma verifichiamo la condizione mancante. Se applichiamo il teorema del valore iniziale all'espressione della trasformata della derivata otteniamo

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p(pX(p) - x(0))$$

che è una forma indeterminata del tipo  $0 \cdot \infty$ ; applicando la regola di De l'Hopital si ricava che il valore iniziale della derivata vale

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \left( \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 1)}} - 1 \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{(p^2 + 1)^{3/2}} \right) = 0$$

proprio come era richiesto.

Chiaramente si potrebbero sviluppare molti altri esempi; qui ci si è limitati a esempi puramente matematici; gli altri esempi nasceranno spontaneamente quando applicheremo la trasformazione di Laplace alle equazioni dinamiche dei sistemi fisici.

## 2.6 Legame fra la trasformata di Laplace e quella di Fourier

Finora noi abbiamo supposto che le funzioni trasformande fossero identicamente nulle per  $t < 0$ . Nulla vieta di far cadere quell'ipotesi e di estendere l'intervallo di integrazione da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ottenendo un'altra trasformata di Laplace chiamata *bilatera* ■

$$\hat{\mathcal{L}}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

È chiaro che una simile trasformazione può dare dei risultati solo se la funzione integranda soddisfa a particolari requisiti, che necessariamente implicano pesanti vincoli sulla funzione  $f(t)$ , oppure se si ricorre alla teoria delle distribuzioni in modo massiccio. In ogni caso le informazioni relative ai valori iniziali non sono più disponibili, perché l'istante iniziale si è spostato a  $-\infty$  e il tempo  $t = 0$  è un valore come tutti gli altri, non è più un valore speciale come nel caso della trasformazione monolatera. ■

Detta trasformazione si può pensare ottenuta sovrapponendo due trasformazioni monolateri

$$\begin{aligned} \hat{F}(p) = \hat{\mathcal{L}}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} f(-\tau) e^{p\tau} d\tau \end{aligned}$$

L'integrale per tempi positivi può convergere per  $\sigma > \alpha_+$ , mentre l'integrale per tempi negativi, cioè per valori positivi di  $\tau$ , può convergere per  $\sigma < \alpha_-$ . Se entrambi gli integrali convergono e se risulta  $\alpha_+ < \alpha_-$ , allora la trasformata bilatera di Laplace esiste nella striscia

$$\alpha_+ < \sigma < \alpha_-$$

Se questa striscia comprende l'asse immaginario allora esiste la trasformata bilatera anche per  $p = j\omega$  per cui si ricava

$$\hat{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

che, a parte un'eventuale costante moltiplicativa, coincide con la trasformata di Fourier. Per cui si può affermare che se la trasformata di Laplace bilatera esiste in una striscia

comprendente l'asse immaginario, allora la sua sezione lungo questo asse coincide con la trasformata di Fourier a meno di un'eventuale costante<sup>10</sup>.

I guai nascono quando la striscia non esiste o perché è  $\alpha_+ = \alpha_-$ , oppure, peggio ancora, perché  $\alpha_+ > \alpha_-$ . Nel secondo caso non c'è nulla da fare, e non esistono né la trasformata di Laplace bilatera né quella di Fourier. Nel primo caso non esiste la trasformata di Laplace bilatera, mentre quella di Fourier può esistere sotto forma di distribuzione e se  $\alpha_+ = \alpha_- = 0$ . Questo non è un caso tanto raro; per esempio, la trasformata di Fourier di una sinusoide di pulsazione  $\omega_0$  è data dalla sovrapposizione di due distribuzioni di Dirac centrate lungo l'asse  $\omega$  nei punti corrispondenti a  $+\omega_0$  e a  $-\omega_0$ .

Nonostante tutto ciò le funzioni di trasferimento, cioè i rapporti fra le trasformate dei segnali applicati ai sistemi fisici e le trasformate delle loro risposte, sono straordinariamente simili e fra la funzione di trasferimento espressa in termini di  $p$ , ottenuta con i rapporti delle trasformate di Laplace, e quella espressa in termini di  $\omega$ , ottenuta con i rapporti delle trasformate di Fourier, c'è l'elementare operazione di cambiare  $p$  in  $j\omega$ .

## 2.7 Tabella delle trasformate di Laplace

Nell'appendice B sono riportate un certo numero di coppie di funzioni del tempo e delle rispettive trasformate; sono richiamate anche le regole e i teoremi che sono stati esposti nei paragrafi precedenti.

È ovvio che dette tabelle stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra funzioni del tempo e le loro trasformate, per cui possono essere usate anche per eseguire il passaggio inverso. Possono cioè essere usate anche per antitrasformare una funzione della pulsazione complessa con certe caratteristiche, per trovare la funzione del tempo la cui L-trasformata è la funzione data.

In generale le funzioni da trattare sono funzioni razionali, per cui tutte le regole già conosciute per spezzare una funzione razionale nella somma di termini elementari, nella somma dei *fratti semplici*, sono perfettamente lecite grazie alla linearità delle trasformazioni di cui stiamo parlando; se si riesce a scomporre una funzione razionale nei singoli fratti elementari componenti, usando le proprietà della L-trasformata, si possono ricavare dalle tabelle le funzioni del tempo la cui combinazione lineare (con gli stessi pesi dei fratti elementari) produce l'intera antitrasformazione.

Sicuramente, quando si può, è preferibile antitrasformare per questa via, piuttosto che ricorrere alla regola generale illustrata nel prossimo paragrafo.

## 2.8 L'antitrasformazione di Laplace

Il problema generale di ricavare la funzione  $f(t)$ , conoscendo la sua trasformata di Laplace  $F(p)$ , richiede di sfruttare tutte le possibilità che l'analiticità della trasformata consente.

Per essere la trasformata di Laplace di qualcosa,  $F(p)$  deve avere le caratteristiche delle L-trasformate in generale, cioè deve essere una funzione analitica in un semipiano destro del piano  $p$  delimitato dalla retta di coordinate  $\sigma = \alpha$ . All'infinito la funzione non

<sup>10</sup> In molti testi la trasformata di Fourier è definita con una relazione integrale identica a quella qui usata, in altri compare una costante moltiplicativa pari all'inverso della radice quadrata di  $2\pi$  e la trasformata è espressa in termini di frequenza invece che di pulsazione; questo secondo modo di procedere consente di avere una grande simmetria fra l'operazione di trasformazione e quella di antitrasformazione.

deve avere un modulo che cresce troppo in fretta, altrimenti l’antitrasformazione non è eseguibile e non esiste, quindi, la funzione  $f(t)$ .

Scelta una retta qualsiasi completamente giacente nel semipiano destro di analiticità, quindi una retta di equazione  $\sigma = \beta > \alpha$ , l’antitrasformata è data da

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta-jR}^{\beta+jR} F(p) e^{pt} dp \quad (2.17)$$

Si noti che l’integrale indefinito è ottenuto facendo tendere a infinito i due estremi di integrazione in modo *sincrono*, contrariamente a quanto si fa solitamente di far tendere i due limiti all’infinito in modo indipendente e scorrelato. Questo tipo di integrale si chiama *integrale principale di Cauchy*. ■

Sfruttando le proprietà di analiticità della  $F(p)$ , possiamo chiudere il percorso all’infinito con una circonferenza di raggio grandissimo, pari a  $R$  e far tendere detto raggio all’infinito. L’antitrasformata cercata, cioè la funzione  $f(t)$  data dall’equazione (2.17), sarà quindi data dall’integrale sull’intero contorno chiuso meno l’integrale sul semicerchio di raggio grandissimo. Quello che ci resta da fare, oltre a sfruttare le proprietà degli integrali delle funzioni analitiche estesi a semplici percorsi chiusi, consiste nel valutare il contributo lungo il solo semicerchio di raggio grandissimo.

Detta circonferenza, insieme alla retta di ascissa  $\beta$ , determina (al limite) un semipiano destro dentro il quale la funzione integranda è regolare e per le proprietà delle funzioni analitiche l’integrale è nullo; in particolare la funzione integranda è nulla sul tratto di semicirconferenza giacente a destra della linea  $\sigma = \beta$  quando è  $t < 0$ , perché il modulo dell’esponenziale tende a zero più rapidamente di quanto  $F(p)$  tenda ad infinito (ecco la condizione per la quale  $F(p)$  non può crescere troppo in fretta); ne consegue che  $f(t) = 0$  per  $t < 0$ .

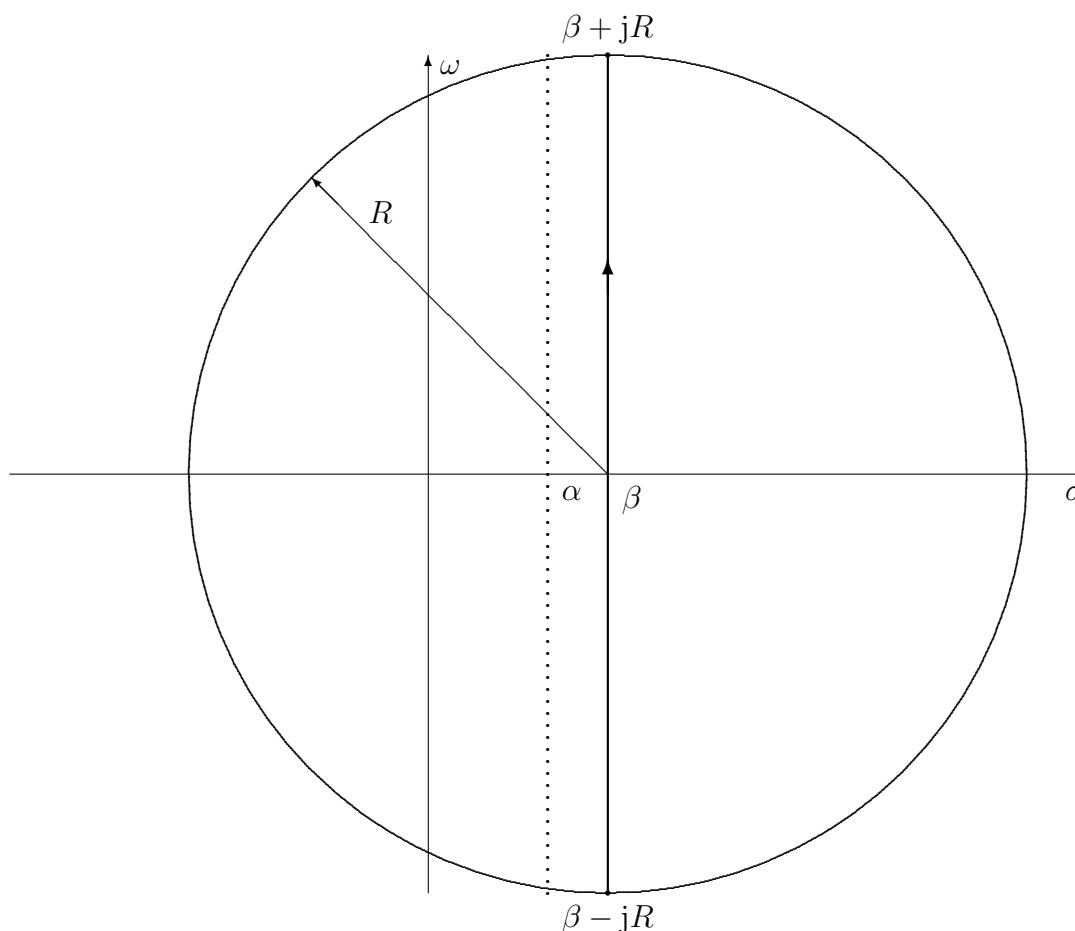
Il percorso chiuso verso sinistra, invece, risulta pari alla somma dei residui che la funzione  $F(p)$  presenta nelle sue singolarità a sinistra della retta  $\sigma = \beta$ . Per avere il risultato netto, cioè il contributo dell’integrale lungo il diametro  $\sigma = \beta$  bisogna sottrarre il contributo all’integrale curvilineo del percorso sulla semicirconferenza. Tenendo conto che per  $t > 0$  la totalità della semicirconferenza di sinistra<sup>11</sup> è caratterizzata dal giacere in punti con  $\sigma < 0$ , l’esponenziale tende a zero più rapidamente di quanto eventualmente  $|F(p)|$  tenda a infinito, per cui il contributo dell’integrale lungo la semicirconferenza di sinistra è nullo. In definitiva

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta-jR}^{\beta+jR} F(p) e^{pt} dp = \sum_k R_k$$

con la somma estesa a tutti i residui di  $F(p) e^{pt}$  calcolati in tutte le singolarità al finito della funzione  $F(p)$ .

Questo non vuol dire che la formula generale (2.17) sia più facile da calcolare che non ricavare l’antitrasformata per altra via, ma almeno dà un metodo generale, lascia intravedere le condizioni a cui deve soddisfare una funzione analitica per essere considerata

<sup>11</sup> Dalla figura 2.1 non sembra che la “totalità” della semicirconferenza di sinistra giaccia nel semipiano  $\sigma < 0$ . Bisogna ricordare che quella figura rappresenta una parte di piano Euclideo, mentre il piano complesso è un piano di Riemann. Se la cosa non piace, si può pensare alla “retta”  $\sigma = \beta$  della figura 2.1 come una parte di circonferenza di raggio  $R$  grandissimo e con centro nell’ascissa  $\sigma_C = \beta - R$ ; al tendere di  $R$  a infinito la circonferenza tende alla retta  $\sigma = \beta$ , ma la semicirconferenza di sinistra giace sempre nel semipiano di sinistra durante tutta la fase del suo ingrandimento illimitato, quindi, al limite, anche per  $R = \infty$ .



**Figura 2.1.** Chiusura del percorso di integrazione per la determinazione dell'antitrasformata di Laplace

una trasformata di Laplace, ed eventualmente dà una prova dell'esistenza dell'antitrasformata.

Si potrebbe discutere sull'unicità del risultato; ebbene questa unicità si ha solo per le funzioni continue; quelle che presentano discontinuità non sono ben definite, appunto, nelle discontinuità, per cui l'equazione (2.17) fornisce un risultato che non necessariamente coincide con la funzione di partenza, nel senso che coincide ovunque questa sia continua, ma non coincide nelle discontinuità; in particolare non coincide in  $t = 0$  se la funzione di partenza aveva  $f(0-) \neq f(0+)$ . Questo fatto è veramente irrilevante nei casi applicativi dell'analisi dei sistemi fisici lineari, per cui non ce ne faremo un problema. Ricordiamo infatti che le discontinuità sono frutto di una idealizzazione troppo spinta; i sistemi fisici reali non presentano discontinuità.

Nello stesso tempo, la trasformazione di Laplace è così potente nel manipolare oggetti discontinui e oggetti come le distribuzioni, che non dovremo stupirci se usando la trasformata di Laplace riusciremo a risolvere, nonostante la presenza di quegli oggetti, problemi che con i metodi "tradizionali" richiederebbero di svolgere delicate discussioni per accettare o respingere i risultati stessi.

## 2.9 Antitrasformazione delle funzioni razionali

Nell'analisi dei sistemi fisici lineari le funzioni da antitrasformare sono quasi sempre razionali a coefficienti reali. Conviene quindi avere un metodo sistematico per antitrasformare queste funzioni, così frequenti nelle applicazioni.

Sia dunque

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{q=0}^n a_q p^q}{\sum_{s=0}^m b_s p^s} \quad (2.18)$$

Il primo passo da fare è quello di risolvere il polinomio a denominatore, perché l'antitrasformazione richiede che siano conosciute le singolarità. Per non perdere pezzetti per la strada *supponiamo di avere diviso numeratore e denominatore per  $b_m$*  così che l'equazione (2.18) abbia il denominatore *monico*, cioè sia

$$b_m = 1$$

Risolvere il polinomio  $D(p)$  equivale a trovarne le radici e le loro molteplicità. La cosa è banale per un polinomio di primo grado, semplice per un polinomio di secondo grado, non molto difficile per un polinomio di terzo grado (equazione di Cardano)<sup>12</sup>, un po' più laborioso per un polinomio di quarto grado, ma dal quinto grado in su le radici in generale sono espressioni trascendenti dei coefficienti  $b_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

Sebbene teoricamente le radici esistano e siano in numero pari al grado, avendo avuto attenzione per la loro molteplicità (teorema fondamentale dell'algebra), in pratica la risoluzione di un polinomio di grado appena appena elevato richiede l'uso di procedimenti iterativi che convergono alle radici, ma le approssimano solamente; tali procedimenti richiedono l'uso di elaboratori abbastanza veloci e di programmi adeguati<sup>13</sup>. Disponendone, dunque, il problema diventa praticamente semplice, anche se, sotto sotto, il programma realizza operazioni tutt'altro che banali. Supponiamo allora di avere risolto il polinomio a denominatore e di avere trovato che ha  $r$  radici reali, semplici o multiple  $p_{rh}$ , e  $(m - r)/2$  coppie di radici complesse coniugate  $p_{ci}$  e  $p_{ci}^*$ , semplici o multiple; possiamo allora scomporre l'espressione (2.18) nella forma seguente

$$F(p) = \frac{\sum_{q=0}^n a_q p^q}{\prod_{h=1}^u (p - p_{rh})^{n_h} \prod_{i=1}^v [(p - p_{ci})(p - p_{ci}^*)]^{m_i}} \quad (2.19)$$

dove

$$\sum_{h=1}^u n_h = r$$

<sup>12</sup> Tutti ne parlano, poi quando occorre non si sa dove trovarla. Eccola. Dato un polinomio  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  vi si esegue sopra la trasformazione  $x = x' - b/(3a)$  e poi lo si rende monico e lo si mette nella forma  $x'^3 - 3px' - 2q$ . Basta trovare una radice reale della risolvente; sia  $x'_r$  questa radice; la corrispondente radice del polinomio dato vale  $x'_r - b/(3a)$ . Nota questa radice reale basta dividere il polinomio dato per  $x - x_r$  e poi risolvere il quoziente di secondo grado. Tutto sta nel determinare la radice reale della risolvente. Posto  $\Delta = q^2 - p^3$ , e definiti i due parametri  $u = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}}$  e  $v = \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}$ , la radice reale della risolvente vale  $x'_r = u + v$ . Se  $\Delta \geq 0$  non ci sono problemi e basta lavorare con numeri reali. Se  $\Delta < 0$  la sua radice quadrata dà luogo ad un valore immaginario, ma posta la stessa determinazione in  $u$  e  $v$ , benché questi parametri diventino complessi, essi sono coniugati e la loro somma continua a dare un valore reale.

<sup>13</sup> Vedi per esempio il programma `equation` disponibile nel sito dove si trova anche questo testo.

$$\sum_{i=1}^v m_i = \frac{m-r}{2}$$

Possiamo allora scomporre la funzione data in frazioni elementari nella maniera seguente

$$F(p) = \sum_{k=0}^{n-m} c_k p^k + \sum_{h=1}^u \sum_{l=1}^{n_h} \frac{d_{hl}}{(p - p_{rh})^l} + \sum_{i=1}^v \sum_{g=1}^{m_i} \frac{e_{ig}(p - p_{ci}^*)^g + e_{ig}^*(p - p_{ci})^g}{[(p - p_{ci})(p - p_{ci}^*)]^g} \quad (2.20)$$

tenendo presente che se il limite superiore di una delle somme indicate è minore del limite inferiore, la somma corrispondente è assente dallo sviluppo (2.20).

La determinazione dei coefficienti presenti nello sviluppo (2.20) può essere fatta in modi diversi. Uno dei più semplici è il seguente.

- ▷ I coefficienti  $c_k$  formano il polinomio che si ottiene dividendo  $N(p)$  per  $D(p)$ , divisione eseguibile se  $n \geq m$ ; in caso contrario l'intera somma manca.
- ▷ I coefficienti  $d_{hl}$  delle frazioni con poli reali si ricavano sviluppando in serie di Taylor la funzione  $(p - p_{rh})^{n_h} F(p)$  attorno al punto  $p = p_{rh}$ .
- ▷ Analogamente i coefficienti complessi  $e_{ig}$  dei fratti che contengono radici complesse si determinano sviluppando in serie di Taylor la funzione  $(p - p_{ci})^{m_i} F(p)$ . I coefficienti  $e_{ig}^*$  non sono altro che i complessi coniugati.
- ▷ Nel caso particolare ed estremamente frequente in cui le radici siano semplici, allora i coefficienti  $d_{h1}$  ed  $e_{i1}$ , gli unici presenti, sono semplicemente i residui nei corrispondenti poli. Per il calcolo del residuo nel polo semplice  $p = p_0$ , reale o complesso, si può usare una qualunque delle espressioni seguenti, scegliendo l'una o l'altra in funzione della comodità derivante dalla maniera in cui è scritta la funzione  $F(p)$

$$R = \begin{cases} \lim_{p \rightarrow p_0} (p - p_0) F(p) \\ \left. \frac{N(p)}{D'(p)} \right|_{p=p_0} \\ \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{\frac{d[1/F(p)]}{dp}} \end{cases} \quad (2.21)$$

Supponendo di avere eseguito lo sviluppo (2.20), possiamo passare all'antitrasformazione ricorrendo per comodità alle tabelle dell'appendice B; conviene però antitrasformare le tre righe dello sviluppo (2.20) separatamente al fine di commentarle in modo appropriato.

La prima riga contribuisce con i termini

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{n-m} c_k p^k \right] = c_0 \delta(t) + \sum_{k=1}^{n-m} c_k \delta^{(k)}(t) \quad (2.22)$$

Versione del 3 ottobre 2001

che, come si vede, sono costituiti solo dalla distribuzione di Dirac e dalle sue derivate. La presenza di questi oggetti “strani” è strettamente legata al fatto che  $F(p)$  non sia nulla all’infinito.

La seconda riga dello sviluppo (2.20), relativa al contributo dei poli reali, fornisce all’antitrasformata il contributo

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{h=1}^u \sum_{l=1}^{n_h} \frac{d_{hl}}{(p - p_{rh})^l} \right] = \sum_{h=1}^u \sum_{l=1}^{n_h} d_{hl} e^{p_{rh}t} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \quad (2.23)$$

che non presenta (per ora) caratteristiche di rilievo, salvo il fatto di contenere esponenziali con esponenti reali in ogni termine della somma; le potenze di  $t$  sono presenti solo in corrispondenza di poli multipli.

Infine la terza riga dello sviluppo (2.20), relativa alle coppie di poli complessi e coniugati, fornisce all’antitrasformata il contributo

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^v \sum_{g=1}^{m_i} \frac{e_{ig}(p - p_{ci}^*)^g + e_{ig}^*(p - p_{ci})^g}{[(p - p_{ci})(p - p_{ci}^*)]^g} \right] = \sum_{i=1}^v \sum_{g=1}^{m_i} e^{\sigma_{ci}t} \frac{2|e_{ig}|t^{g-1} \cos(\omega_{ci}t + \arg[e_{ig}])}{(g-1)!} \quad (2.24)$$

in cui si notano componenti oscillanti con ampiezze variabili nel tempo; la dipendenza dalle potenze di  $t$  è associata ai poli multipli; tutti i termini, però, contengono esponenziali con esponente reale, tranne nel caso  $\sigma_{ci} = 0$  nel qual caso, se i poli sono semplici, siamo in presenza di oscillazioni sinusoidali.

I tre contributi (2.22), (2.23) e (2.24) hanno significati fisici particolari e importantissimi, che verranno commentati adeguatamente nel seguito (vedi il paragrafo 3.9).

Gli esempi di antitrasformazione saranno così numerosi nel seguito che qui ci limiteremo a casi semplicissimi.

1. Sia da antitrasformare la funzione

$$F(p) = \frac{2p^2 + 3p + 2}{2p^3 + 7p^2 + 9p + 4}$$

La risoluzione del denominatore si può fare senza ricorrere “ai grandi mezzi”; a vista si riconosce che una radice si trova in  $p = -1$  (la somma dei coefficienti delle potenze pari è uguale alla somma dei coefficienti delle potenze dispari), per cui si può scomporre direttamente

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2p^2 + 3p + 2}{(p+1)(2p^2 + 5p + 4)} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+5/4)^2 + (7/16)} \end{aligned}$$

L’antitrasformata (dalle tabelle dell’appendice), vale pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = e^{-t} - (4/\sqrt{7}) e^{-5t/4} \sin(\sqrt{7}t/4)$$

2. Sia da antitrasformare la funzione

$$F(p) = \frac{4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p}$$

Procedendo a vista come prima, visto che è presente un polo nell'origine e un polo in  $p = -1$ , la funzione  $F(p)$  può essere scomposta successivamente in

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1}{p(p+1)(p^2+p+1)} \\ &= 4 + \frac{1}{p} - \frac{3}{p+1} - \frac{3p+2}{p^2+p+1} \end{aligned}$$

Ricorrendo ancora alle tabelle dell'appendice si ricava

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = 4\delta(t) + u(t) - 3e^{-t} - e^{-0,5t} \left( 3\cos(\sqrt{3}t/2) - (1/\sqrt{3})\sin(\sqrt{3}t/2) \right)$$

3. Sia da antitrasformare

$$F(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)^2}$$

che presenta un polo reale doppio. La scomposizione procede come al solito

$$F(p) = 2 - \frac{3p+1}{(p+1)^2}$$

e le tabelle dell'appendice consentono di ricavare

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = 2\delta(t) - e^{-t}(3 - 2t)$$

4. Poiché tutti gli esempi presentati sopra godono della proprietà che  $pF(p)$  è analitica nel semipiano  $\sigma \geq 0$ , vi si possono applicare i teoremi del valore iniziale e del valore finale; è immediato verificare che le funzioni del tempo ricavate per antitrasformazione presentano tutte i valori iniziali e finali ricavabili da quei teoremi. Siccome quei due teoremi richiedono calcoli elementari, che si possono fare anche a mente, essi rappresentano un ottimo metodo per verificare che le funzioni che si stanno elaborando corrispondano l'una con l'altra e, più che altro, con il comportamento del sistema fisico in esame. Non si raccomanderà mai abbastanza di ricorrere a questi teoremi durante i calcoli di analisi dei sistemi fisici.

## Esercizi

**2.1 Antitrasformate di Laplace** Verificare la correttezza delle coppie trasformata-antitrasformata della tabella B.2 dalla coppia 1 alla coppia 24.

**2.2 Trasformata della funzione d'errore** La funzione

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

prende il nome di funzione d'errore; essa viene usata molto in statistica ma compare sovente anche nell'analisi dei sistemi fisici lineari, in particolare nei sistemi a parametri distribuiti a una dimensione che comportano la *diffusione* di una quantità (tensione, corrente, carica, calore, ecc.) lungo l'unica direzione disponibile.

Verificare la coppia trasformata-antitrasformata 25 della tabella B.2.

Versione del 3 ottobre 2001

---

**2.3 Trasformata dell'onda quadra** Verificare la coppia trasformata-antitrasformata 32 della tabella B.2.

**2.4 Trasformata della sinusoide raddrizzata** Verificare la coppia trasformata-antitrasformata 35 della tabella B.2.

**2.5 Trasformata della sinusoide raddrizzata a una semionda** Verificare la coppia trasformata-antitrasformata 34 della tabella B.2.



## Capitolo 3

# Il metodo simbolico per l'analisi dei sistemi

### 3.1 Generalità

In questo capitolo applicheremo finalmente la trasformazione di Laplace alle equazioni che descrivono il comportamento di un sistema fisico lineare, continuando a privilegiare i sistemi elettrici, visto che gli altri sistemi si possono ricondurre a quelli elettrici mediante le analogie a cui si è già fatto cenno.

Vedremo che le equazioni costitutive del connettore restano formalmente invariate, mentre le equazioni costitutive dei componenti si trasformano in un modo che si presta ad essere interpretato come le equazioni costitutive di componenti elettrici, non più nel dominio del tempo, bensì nel dominio della frequenza. L'analisi di questi componenti "equivalenti" nel dominio della frequenza consente di scrivere direttamente le trasformate delle equazioni del sistema e di risolverle.

Non solo, ma constateremo che il metodo simbolico "generalizzato", come si conviene di chiamare il metodo che deriva dall'applicazione della trasformazione di Laplace, contiene come casi particolari anche i metodi noti dell'analisi in regime stazionario e l'analisi fasoriale. Anzi, quest'ultima compare a sua volta come caso particolare dell'analisi in regime cisoidale, la cui importanza teorica va molto al di là dei pochi mezzi di cui necessita per essere sviluppata.

### 3.2 Trasformazione delle equazioni dinamiche

Come abbiamo richiamato, le equazioni del connettore, le equazioni che esprimono i due principi di Kirchhoff, sono equazioni lineari algebriche, che, grazie alla linearità della trasformazione di Laplace, restano equazioni del tutto identiche, salvo la sostituzione delle lettere minuscole con le corrispondenti lettere maiuscole.

Lo stesso succede per i componenti circuitali privi di memoria, vale a dire per i resistori, il trasformatore ideale, gli amplificatori comandati e l'amplificatore ideale.

Gli unici componenti lineari che "ricordano il passato", dotati di una certa memoria del passato, sono quelli governati da equazioni differenziali. È il caso di notare che anche i componenti che manifestano fenomeni di isteresi conservano memoria del passato, ma

non sono lineari; lo stesso può dirsi di molti altri componenti non lineari, ma non ce ne occuperemo qui.

### 3.2.1 Equazioni dell'induttore

Richiamando l'equazione di funzionamento dell'induttore

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(0-) = i_0$$

possiamo ricavare direttamente l'equazione trasformata

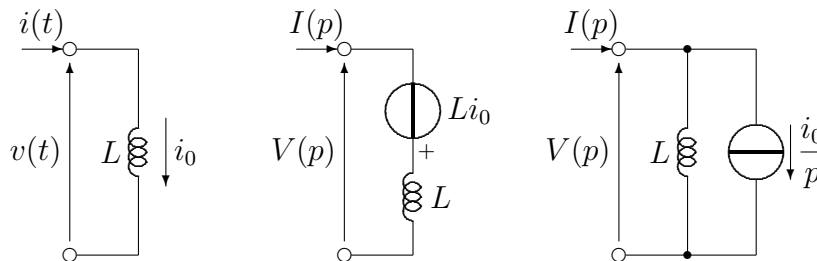
$$V(p) = pLI(p) - Li_0 \quad (3.1a)$$

che può anche scriversi nella forma

$$I(p) = \frac{1}{pL}V(p) + \frac{i_0}{p} \quad (3.1b)$$

L'equazione (3.1a) assomiglia all'equazione costitutiva di un generatore reale di tensione  $V = RI + E$ ; invece l'equazione (3.1b) assomiglia all'equazione costitutiva di un generatore reale di corrente  $I = GV + J$ . Ricordando che le grandezze in gioco sono riferite alla convenzione degli utilizzatori, e che si passa da un modello di generatore all'altro sfruttando le equivalenze di Thevenin e di Norton, lo stesso si può fare con i due modelli espressi dalle equazioni (3.1).

Si noti che il termine impresso, cioè la forza "elettromotrice"  $-Li_0$  e la corrente impressa  $i_0$  sono presenti solo se le condizioni iniziali sono diverse da zero. Con condizioni iniziali nulle, l'equazione trasformata dell'induttore assomiglia a quella di un resistore, solo che la resistenza  $R$  è sostituita dalla grandezza  $Z(p) = pL$ , che prende il nome di *impedenza*, ma che nell'equazione costitutiva giuoca lo stesso ruolo della resistenza. Corrispondentemente la conduttanza  $G$  è sostituita dalla *ammettenza*  $Y(p) = 1/(pL)$ . Se interpretassimo le tensioni, le correnti, le impedenze, le ammettenze e i segnali impressi che compaiono nelle equazioni (3.1) come se fossero le corrispondenti grandezze in regime stazionario, solo con i nomi e i simboli cambiati, avremmo due circuiti equivalenti dell'induttore in regime dinamico e con condizioni iniziali non nulle, rappresentati nella figura 3.1.



**Figura 3.1.** L'induttore nel dominio del tempo e nel dominio della pulsazione complessa

Si noti che nella figura 3.1 l'induttore è sempre affiancato solo dal valore della sua induttanza, non dall'impedenza o dall'ammettenza; sta a chi usa il circuito simbolico nel

dominio della pulsazione usare correttamente l'impedenza o l'ammettenza a seconda di quale delle due equazioni (3.1) intende usare.

### 3.2.2 Equazioni del condensatore

Si può procedere nella stessa maniera con il condensatore trasformando la sua equazione costitutiva

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad v(0-) = v_0$$

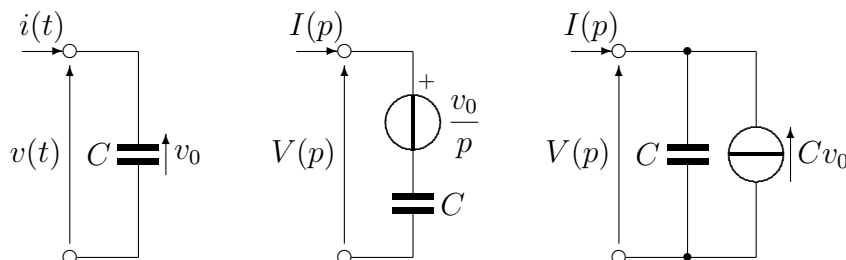
ottenendo

$$I(p) = pCV(p) - Cv_0 \quad (3.2a)$$

o, alternativamente

$$V(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{v_0}{p} \quad (3.2b)$$

Sempre nella stessa maniera si può identificare l'impedenza del condensatore nell'espressione  $Z(p) = 1/(pC)$  e l'ammettenza del condensatore nell'espressione  $Y(p) = pC$ . E sempre nella stessa maniera si possono interpretare le due espressioni (3.2) equivalenti fra di loro attraverso le equivalenze di Thevenin e di Norton come nel caso precedente, per arrivare ai circuiti equivalenti della figura 3.2.



**Figura 3.2.** Il condensatore nel dominio del tempo e nel dominio della pulsazione complessa

Come nel caso dell'induttore, così anche in quello del condensatore vicino al componente si indica il suo valore di capacità, non la sua impedenza o la sua ammettenza, ma resta sempre a chi ne fa uso di impiegare la grandezza giusta a seconda di quale modello nel dominio della pulsazione sia preso come riferimento.

### 3.2.3 Equazioni del trasformatore

Il modello del trasformatore induttivo nel dominio della pulsazione complessa è leggermente più complicato perché si tratta di un circuito con due porte accoppiate attraverso il flusso di induzione concatenato con entrambi gli avvolgimenti. Dalle equazioni nel dominio del tempo

$$v_p(t) = L_p \frac{di_p(t)}{dt} + M \frac{di_s(t)}{dt} \quad i_p(0-) = i_{p0}$$

$$v_s(t) = M \frac{di_p(t)}{dt} + L_s \frac{di_s(t)}{dt} \quad i_s(0-) = i_{s0}$$

trasformando secondo Laplace si ottiene

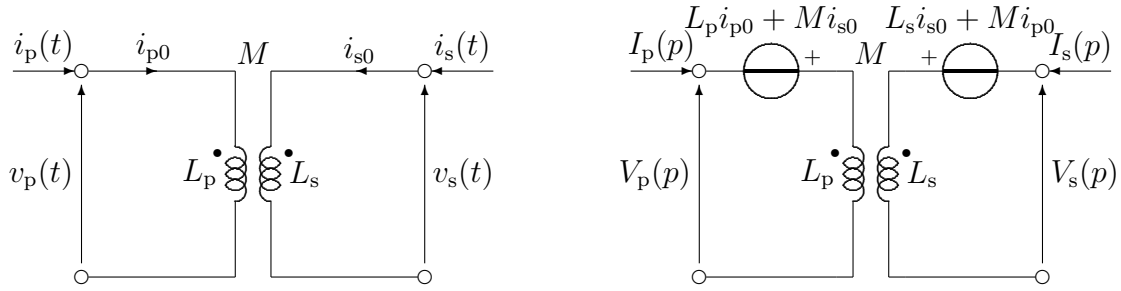
$$V_p(p) = pL_p I_p(p) + pM I_s(p) - (L_p i_{p0} + M i_{s0}) \quad (3.3a)$$

$$V_s(p) = pM I_p(p) + pL_s I_s(p) - (L_s i_{s0} + M i_{p0}) \quad (3.3b)$$

Il modello nel dominio della pulsazione complessa si ottiene seguendo ragionamenti simili a quelli fatti nel caso dell'induttore; in mancanza di condizioni iniziali, che comunque si comportano come *due* generatori di segnale in serie ad un trasformatore induttivo, ci si trova di fronte a equazioni costitutive simili a quelle di un normale trasformatore induttivo, salvo che il segno di derivazione è sostituito dalla pulsazione complessa; inoltre

- possiamo identificare due impedenze proprie,  $Z_p(p) = pL_p$  e  $Z_s(p) = pL_s$ , e un'impedenza mutua  $Z_m(p) = pM$  responsabile dell'accoppiamento fra le variabili descrittive della porta primaria e quelle della porta secondaria.

Nel dominio della pulsazione complessa, quindi, ci troviamo di fronte al circuito equivalente della figura 3.3.



**Figura 3.3.** Il trasformatore induttivo nel dominio del tempo e in quello della pulsazione complessa.

È evidente anche dalla figura 3.3 che le due equazioni differenziali che governano il trasformatore induttivo sono indipendenti e consentono l'esistenza di condizioni iniziali distinte per ciascun avvolgimento.

- Nel trasformatore ad accoppiamento unitario, invece, le equazioni non sono indipendenti. La condizione  $|k| = |M|/\sqrt{L_p L_s} = 1$  implica un legame molto stretto fra gli avvolgimenti, tanto che l'unica variabile "derivabile", non è la singola corrente in ciascun avvolgimento, ma il flusso di induzione complessivo concatenato con entrambi gli avvolgimenti; per meglio mettere in evidenza l'effetto delle correnti, conviene esprimere detto flusso mediante la forza magnetomotrice complessiva e scrivere l'equazione costitutiva del trasformatore ad accoppiamento unitario nella forma

$$\begin{cases} v_p = n_p \Lambda \frac{d(n_p i_p + n_s i_s)}{dt} \\ v_s = n_s \Lambda \frac{d(n_p i_p + n_s i_s)}{dt} \end{cases}$$

dove  $n_p$  e  $n_s$  sono rispettivamente i numeri di spire primarie e secondarie, mentre  $\Lambda$  è la

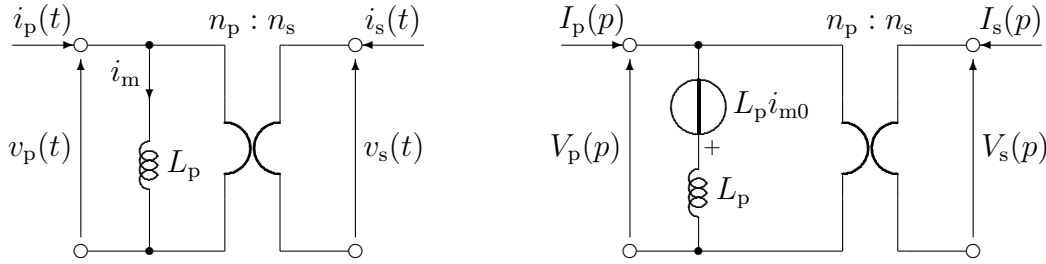
- permeanza del nucleo su cui sono avvolte le spire<sup>1</sup>.

Come è evidente ora, le due equazioni differenziali non sono più indipendenti, ma così come sono scritte sono nella forma migliore per essere trasformate secondo Laplace, ma non sono adeguate per interpretare le equazioni trasformate in termini circuitali. Tuttavia le equazioni precedenti, ricordando che è  $L_p = n_p^2 \Lambda$ , possono essere riscritte nella forma seguente

$$\begin{cases} v_p = L_p \frac{d}{dt} \left( \frac{n_p i_p + n_s i_s}{n_p} \right) \\ v_s = \frac{n_s}{n_p} v_p \end{cases}$$

e queste equazioni, insieme alle loro trasformate (3.4), possono essere interpretate come appare nella figura 3.4.

$$\begin{cases} V_p(p) = pL_p I_m(p) - L_p i_{m0} & \text{dove } i_m(t) = \frac{n_p i_p + n_s i_s}{n_p} \text{ e } i_{m0} = i_m(0-) \\ V_s(p) = \frac{n_s}{n_p} V_p(p) \end{cases} \quad (3.4)$$



**Figura 3.4.** Il trasformatore ad accoppiamento unitario nel dominio del tempo e in quello della pulsazione

Le equazioni del trasformatore ad accoppiamento unitario portano direttamente a quelle del trasformatore ideale; questo infatti corrisponde al passaggio al limite quando la permeanza del nucleo magnetico tende ad infinito, cosicché l'induttanza  $L_p$  tenderebbe anch'essa ad infinito. Poiché non sono possibili tensioni infinite, non resta che assumere  $i_m(t) \equiv 0$ ; le equazioni perciò perdono ogni riferimento alle derivate e ogni memoria del passato

$$\begin{cases} v_s(t) = \frac{n_s}{n_p} v_p(t) \\ i_s(t) = -\frac{n_p}{n_s} i_p(t) \end{cases} \quad \begin{cases} V_s(p) = \frac{n_s}{n_p} V_p(p) \\ I_s(p) = -\frac{n_p}{n_s} I_p(p) \end{cases} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup> L'approssimazione di accoppiamento unitario potrebbe sembrare velleitaria, come succede spesso quando si idealizza qualche cosa; tuttavia se il nucleo ha forma toroidale a sezione circolare, se la sua permeabilità è elevata, e se le spire sono avvolte molto strettamente, non è impossibile raggiungere coefficienti di accoppiamento che differiscono dall'unità di qualche millesimo.

### 3.2.4 Equazioni degli altri componenti privi di memoria

Per tutti gli altri componenti privi di memoria del passato, governati da equazioni algebriche e non integro-differenziali, le equazioni sono identiche nel dominio del tempo e in quello della pulsazione; l'unica cosa che cambia sono le lettere maiuscole (ad indicare le trasformate di Laplace) al posto delle lettere minuscole usate per indicare le funzioni del tempo.

## 3.3 Il metodo simbolico

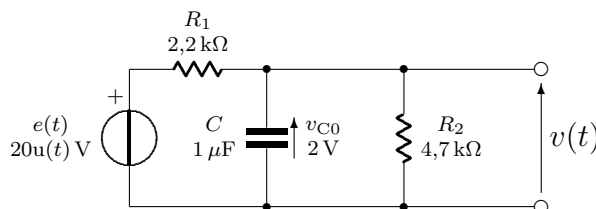
Applicando quanto visto nei paragrafi precedenti si conclude che l'analisi di un sistema elettrico lineare può essere svolta direttamente sul circuito “trasformato” valido nel dominio della pulsazione. In altre parole se nel circuito originale assegnato si sostituiscono i simboli delle grandezze descrittive (tensioni e correnti) con le loro L-trasformate (di fatto la sostituzione delle lettere minuscole con le corrispondenti lettere maiuscole) e se si sostituiscono i componenti con memoria con i corrispondenti circuiti validi nel dominio della pulsazione<sup>2</sup> ci si ritrova a dover lavorare con un circuito da trattare con le stesse regole che si sono già usate per il regime stazionario.

Si richiama l'attenzione su un dettaglio che nelle figure 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 è messo in evidenza con l'esplicitazione dei “poli”, dei morsetti, dei componenti; quando si chiede di determinare la tensione ai capi di un induttore e il modello nel dominio della pulsazione contiene anche il generatore delle condizioni iniziali, la tensione che viene richiesta è quella ai “poli”, non quella che cade sull'induttore “scarico” del modello valido nel dominio della pulsazione. In altre parole continua a valere il principio di sostituzione, per il quale ogni pezzo di circuito è sostituibile con un circuito equivalente *solo agli effetti esterni*; è il resto del circuito che non si accorge della sostituzione, ma la parte sostituita se ne accorge, eccome!

Convieni sviluppare subito qualche esempio.



**Esempio 3.1** — Si faccia riferimento al circuito della figura 3.5 dove si suppone che il generatore produca una tensione a gradino e che il condensatore sia inizialmente carico come indicato nella stessa figura. Si desidera determinare in formule e numericamente l'espressione della tensione ai capi di  $R_2$ .



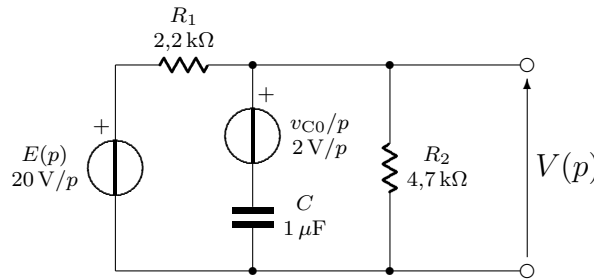
**Figura 3.5.** Circuito di primo grado contenente un condensatore inizialmente carico

<sup>2</sup> Sostituzione che di fatto risulta solo formale, poiché nelle analisi che vengono svolte più spesso le condizioni iniziali sono nulle, per cui i “generatori delle condizioni iniziali” sono spenti. In queste condizioni il circuito valido nel dominio della pulsazione e quello valido nel dominio del tempo coincidono, a parte i simboli che rappresentano le tensioni e le correnti piuttosto che le loro trasformate.

Il problema è facilmente risolvibile anche con i metodi elementari già noti. Si può determinare facilmente che la tensione ai capi di  $R_2$  comincia con il valore  $v(0+) = v_{C0} = 2\text{ V}$  e sale esponenzialmente al valore  $v(\infty) = e(\infty)R_2/(R_1 + R_2) = 13,62\text{ V}$  con costante di tempo<sup>3</sup>  $\tau = C(R_1 \oplus R_2) = 1,5\text{ ms}$ , corrispondente all'equazione

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0+) + [v(\infty) - v(0+)](1 - e^{t/\tau}) \\ &= 2\text{ V} + 11,62\text{ V}(1 - e^{t/1,5\text{ ms}}) \\ &= 13,62\text{ V} - 11,62\text{ V} e^{t/1,5\text{ ms}} \end{aligned}$$

Ma vediamo come si può ottenere lo stesso risultato mediante la trasformazione di Laplace. Cominciamo con il circuito equivalente nel dominio della pulsazione, ottenuto sostituendo il condensatore con il suo modello valido nel dominio della pulsazione, come descritto nella figura 3.2, per arrivare al disegno della figura 3.6.



**Figura 3.6.** Circuito equivalente nel dominio della pulsazione

La figura 3.6 consente di risolvere il problema applicando il teorema di Millman così da ottenere

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{G_1 E(p) + pC v_{C0}/p}{G_1 + G_2 + pC} \\ &= \frac{\frac{1}{2,2\text{ k}\Omega} \frac{20\text{ V}}{p} + p \cdot 1\text{ }\mu\text{F} \frac{2\text{ V}}{p}}{\frac{1}{2,2\text{ k}\Omega} + \frac{1}{4,7\text{ k}\Omega} + p \cdot 1\text{ }\mu\text{F}} \\ &= \frac{1}{p} \frac{2p + 9,091}{p + 0,667} \text{ V} \end{aligned}$$

Come buona regola, prima ancora di antitrasformare è opportuno vedere se sono applicabili i teoremi del valore finale e del valore iniziale e che risultato danno; nel nostro caso essi sono applicabili e forniscono  $v(0+) = 2\text{ V}$  e  $v(\infty) = 13,62\text{ V}$  come era già stato previsto; la presenza di un polo<sup>4</sup> in  $p = -0,667\text{ ms}^{-1}$  ci garantisce la presenza di un esponenziale decrescente con costante di tempo pari a  $\tau = 1/(0,667\text{ ms}^{-1}) = 1,5\text{ ms}$ , come previsto.

<sup>3</sup> Qui e nel seguito si userà il simbolo  $\oplus$  per indicare la somma armonica:  $x \oplus y = 1/(1/x + 1/y)$ . L'operazione di somma armonica è quella veramente eseguita per calcolare la resistenza equivalente a due (o più) resistenze in parallelo, per calcolare la conduttanza equivalente a due (o più) conduttanze in serie, eccetera; non sarebbe corretto (anche se è usato moltissimo) indicarla con il segno  $\parallel$  che sarebbe valido solo per le resistenze, le induttanze e le impedenze in generale, ma non sarebbe valido per le capacità, per le conduttanze e per le ammettenze in generale.

<sup>4</sup> Si ricorda che quando una unità di misura con prefisso decimale è elevata ad una potenza, la potenza agisce anche sul prefisso; tanto per fare un esempio comune e conosciuto da sempre,  $1\text{ cm}^2$  rappresenta

Infine le antitrasformate numero 14 e 15 dell'appendice B (con  $a = 0$  e  $b = 0,667 \text{ ms}^{-1}$ ) o, meglio ancora, l'applicazione delle formule (2.20) (tenendo conto che i due poli sono semplici e quindi si possono usare i residui calcolati con una delle equazioni (2.21)) porta alle espressioni

$$V(p) = \frac{13,62 \text{ V}}{p} - \frac{11,62 \text{ V}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}}$$

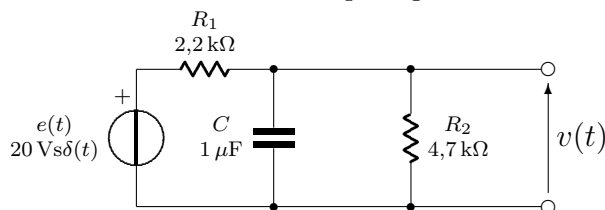
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(p)] = 13,62 \text{ V} - 11,62 \text{ V} e^{-0,667 \text{ ms}^{-1} t}$$

proprio come ci si aspettava.

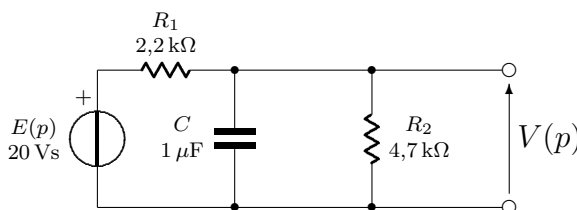
△

▽

**Esempio 3.2** — Esaminiamo ancora lo stesso circuito, riportato ancora nella figura 3.7, supponendo che il condensatore sia inizialmente scarico ( $v_C(0-) = 0$ ) e che il generatore di tensione ecciti il circuito con un impulso ideale di “ampiezza” pari a  $20 \text{ Vs}$ ; si notino le unità di misura dell'ampiezza dell'impulso: abbiamo già osservato che la funzione  $\delta$  ha le dimensioni dell'inverso della sua variabile, quindi perché il risultato sia una tensione, bisogna che l'ampiezza dell'impulso sia una tensione moltiplicata per un tempo. Nello studio dei trasformatori il flusso concatenato avrebbe le stesse dimensioni e si misurerebbe in weber<sup>5</sup>, ma qui non siamo in presenza di trasformatori e preferisco usare i volt-secondi, anche perché così il controllo dimensionale è più agevole.



**Figura 3.7.** Circuito del primo ordine eccitato impulsivamente



**Figura 3.8.** Circuito equivalente nel dominio della pulsazione

Sostituendo il circuito valido nel dominio del tempo con quello valido nel dominio della pulsazione si arriva al circuito della figura 3.8, dal quale con la semplice formula del

l'area di un quadratino di un centimetro di lato, non quella corrispondente ad un centesimo di metro quadrato. Nel caso delle pulsazioni, che sono dimensionalmente degli inversi di tempi, scrivere  $0,667 \text{ ms}^{-1}$  è equivalente a scrivere  $667 \text{ s}^{-1}$ , perché il prefisso “milli” elevato a  $-1$ , significa 1000.

<sup>5</sup> A stretto rigore l'unità di misura weber serve per misurare il flusso di induzione  $\Phi_B$ ; il flusso concatenato  $\Phi_{\text{conc}}$  contiene anche una informazione sul numero delle spire con le quali è concatenato il flusso di induzione; a stretto rigore, quindi, dovrebbe essere  $[\Phi_{\text{conc}}] = 1 \text{ Vs} = 1 \text{ Wb spire}$ .

partitore (espressa mediante le ammettenze e le conduttanze) si ricava la trasformata della risposta e la sua antitrasformata<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} V(p) &= E(p) \frac{G_1}{G_1 + G_2 + pC} \\ &= 20 \text{ Vs} \frac{0,455 \text{ ms}^{-1}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} \\ &= \frac{9,091 \text{ V}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} \\ v(t) &= 9,091 \text{ V e}^{-0,667 \text{ ms}^{-1}t} \end{aligned}$$

Possiamo fare alcune osservazioni importanti, anche se ricavate su un esempio così semplice:

1. I teoremi del valore finale e del valore iniziale sono entrambi applicabili e forniscono i risultati  $v(\infty) = 0$  e  $v(0+) = 9,091 \text{ V}$ . Il valore finale non ci stupisce, ma il valore iniziale contrasta vivamente con il valore iniziale della tensione ai capi della capacità assunto nullo. La spiegazione è semplice; il valore per  $t = 0-$  e quello per  $t = 0+$  sono diversi, perché l'eccitazione impulsiva ha “sparato” una dose di energia nel circuito in un tempo infinitesimo, energia che ha caricato il condensatore istantaneamente, provocando così un'inaspettata discontinuità della tensione ai suoi capi. Se calcolassimo la trasformata della corrente nel condensatore, la troveremmo composta di due addendi, uno dei quali corrisponde alla trasformata di un impulso.
2. Il rapporto fra la trasformata della risposta e la trasformata dell'eccitazione nel circuito inizialmente a riposo nel nostro esempio vale

$$H(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + pC} = \frac{0,455 \text{ ms}^{-1}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}}$$

In generale detto rapporto fra le trasformate della risposta e dell'eccitazione prende il nome di *funzione di trasferimento*; essa, come si vede dall'esempio, rappresenta (a meno di una costante che vale 1 nel caso che l'eccitazione impulsiva sia unitaria) la trasformata della risposta all'impulso; le implicazioni di carattere fisico di questa constatazione di carattere matematico sono della massima importanza. ■

Se, come in questo esempio, la funzione di trasferimento è il rapporto fra la risposta in tensione e l'eccitazione in tensione, essa prende il nome di *amplificazione di tensione*; se fosse stata il rapporto fra la risposta in corrente e l'eccitazione in corrente il suo nome sarebbe stato quello di *amplificazione di corrente*; se fosse stato il rapporto fra la risposta in tensione e l'eccitazione in corrente il suo nome sarebbe stato *impedenza*; infine, se fosse stato il rapporto fra la risposta in corrente e l'eccitazione in tensione il suo nome sarebbe stato *ammettenza*. ■

Per le impedenze e le ammettenze si distingue il caso in cui le due grandezze sono rilevate alla stessa porta, e in questo caso si chiamano *impedenza* o *ammettenza propria o d'entrata*<sup>7</sup>; se invece sono rilevate a porte diverse esse prendono il nome di *impedenza* o *ammettenza mutua* o *di trasmissione*. ■

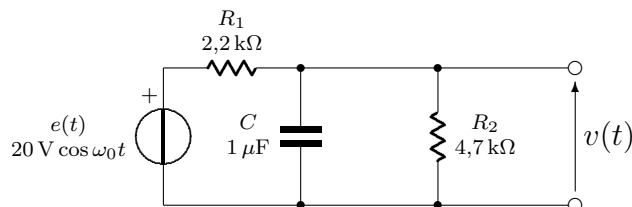
△

<sup>6</sup> Attenzione: nelle formule che seguono si bara un po' con le unità di misura; nel paragrafo 3.4 dedicato alla normalizzazione verrà spiegata meglio tutta la questione e i piccoli inganni di queste formule diventeranno innocenti erroretti di cui si potrà poi fare a meno.

<sup>7</sup> Anche l'impedenza di uscita è un'impedenza d'entrata; non è un gioco di parole, ma nell'uso corrente ogni circuito con due porte, come un filtro o un amplificatore, è previsto che funzioni con una porta

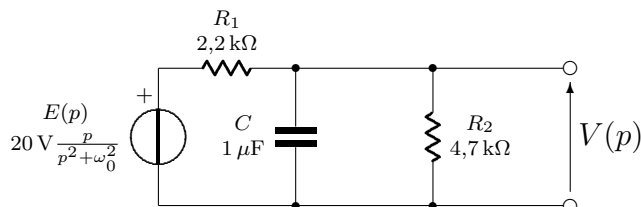


**Esempio 3.3** — Riprendiamo il semplice circuito della figura 3.5, supponendo ora che il generatore esterno generi una tensione sinusoidale di ampiezza pari a 20 V (attenzione: *ampiezza*, non *valore efficace*) e che il condensatore sia inizialmente scarico, come riportato nella figura 3.9.



**Figura 3.9.** Circuito del primo ordine con eccitazione sinusoidale di 400 Hz

Il circuito equivalente nel dominio della pulsazione complessa è formalmente identico, salvo le lettere maiuscole al posto delle minuscole, e salvo l'espressione della trasformata di Laplace dell'eccitazione, figura 3.10



**Figura 3.10.** Circuito equivalente nel dominio della pulsazione;  $\omega_0 = 2\pi 400 \text{ s}^{-1}$

La regola del partitore, che ci conviene scrivere in termini di ammettenze, invece che di impedenze, ci dà subito<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{G_1 E(p)}{G_1 + G_2 + pC} \\ &= \frac{9,091 \text{ V/s}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Avendo un'eccitazione sinusoidale, non possiamo assolutamente pensare di calcolare un valore finale, ma possiamo certamente calcolare il valore iniziale, ottenendo il valore nullo; è corretto? Certamente; infatti la tensione  $v(t)$  oltre che ai capi della resistenza  $R_2$  è anche ai capi del condensatore, il quale, a meno che non venga stimolato in modo “violento” mediante degli impulsi di corrente, non cambia la sua tensione con discontinuità, e se era scarico per  $t = 0-$  resta in tale stato anche per  $t = 0+$ .

destinata a ricevere il segnale da elaborare, mentre l'altra porta lascia uscire il segnale elaborato verso un apparecchio utilizzatore. In questo senso la prima porta è quella d'entrata del segnale e la seconda è quella di uscita del segnale. Quando però si definisce un'impedenza o un'ammettenza, si tolgono, cioè si spengono tutti i generatori di segnale e se ne mette uno alla porta dove si vuole definire l'impedenza e si misura la risposta. Il circuito in questo modo è usato in un altro modo e non ha più importanza quale sia la porta nella quale il segnale ordinariamente entra e quale sia quella dalla quale esso esce; qui il segnale è un altro, quello che serve per definire l'impedenza stessa.

<sup>8</sup> Si faccia attenzione alla dimensionalità dei termini che compaiono nelle espressioni; le dimensioni di una L-trasformata sono quelle della funzione trasformanda moltiplicata per un tempo; quindi anche il secondo membro deve dare la stessa dimensionalità, ecco perché nell'espressione che segue compaiono dei “volt al secondo”; tenendo conto degli altri termini i due membri risultano equidimensionati.

Se ora vogliamo ricavare l'espressione temporale della tensione  $v(t)$ , dobbiamo procedere all'antitrasformazione mediante il solito metodo dei fratti semplici; otteniamo

$$\begin{aligned} V(p) &= -0,897 \text{ V} \frac{1}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} + 0,897 \text{ V} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} + 3,380 \text{ V} \frac{2,513 \text{ ms}^{-1}}{p^2 + \omega_0^2} \\ v(t) &= -0,897 \text{ V} e^{-0,667 \text{ ms}^{-1} t} + 0,897 \text{ V} \cos \omega_0 t + 3,380 \text{ V} \sin \omega_0 t \\ &= -0,897 \text{ V} e^{-0,667 \text{ ms}^{-1} t} + 3,497 \text{ V} \cos(\omega_0 t - 75,14^\circ) \end{aligned}$$

Come si vede bene dall'ultima espressione, la tensione ai capi di  $R_2$  risulta dalla sovrapposizione di un esponenziale decrescente e di una sinusoidale. L'esponenziale diventa trascurabile dopo un tempo di almeno 5 volte la costante di tempo, quindi nel nostro caso dopo almeno 7,5 ms, dopo il quale il transitorio di accensione risulta esaurito. ■

Esaurito il transitorio, rimane una risposta sinusoidale, ritardata rispetto all'eccitazione di  $75,14^\circ$ . Anche qui i gradi sono usati per tradizione, e se si scrivesse  $1,311 \text{ rad}$  si userebbero le unità degli angoli ancora in modo improprio, ma sempre secondo la tradizione. Piuttosto conviene scrivere  $\cos(\omega_0 t - 75,14^\circ) = \cos[\omega_0(t - t_r)]$  dove  $t_r$  rappresenta il ritardo misurato come tempo, non come angolo, e nel nostro caso vale  $t_r = 1,311/2,513 \text{ ms}^{-1} = 0,523 \text{ ms}$ .

Il ritardo misurato in gradi, benché improprio, ha il vantaggio di mettere subito in luce la proporzione fra il tempo di ritardo e il periodo della sinusoidale; nel nostro caso i circa  $75^\circ$  di ritardo confrontati con i  $360^\circ$  dell'intero ciclo della sinusoidale danno l'immediata sensazione di un ritardo notevole, di quasi un quarto di ciclo, e questa sensazione non dipende dalla frequenza in gioco e dal periodo della sinusoidale, ma ha un valore relativo più immediatamente percepibile. Questo è il motivo per il quale nell'analisi dinamica in regime sinusoidale si dà tanta importanza alla "fase", allo "sfasamento", al "rifasare", tutti concetti sempre espressi in termini di angoli.

△

▽

**Esempio 3.4** — Riprendiamo ancora lo stesso circuito dell'esempio precedente nelle stesse condizioni iniziali e con la stessa eccitazione sinusoidale. Ora però facendo uso delle relazioni esistenti fra le funzioni trigonometriche e quelle esponenziali, osserviamo che vale l'identità

$$\cos \omega_0 t = \text{Re} [e^{j\omega_0 t}]$$

Se eccitiamo il circuito con il segnale complesso  $e^{j\omega_0 t}$ , di cui il segnale reale è la parte reale, otteniamo una risposta complessa, la cui parte reale è la risposta che cerchiamo. Vediamo se questa ipotesi è vera. Applicando formalmente la formula del partitore come abbiamo già fatto nell'esempio precedente, ma usando come segnale quello complesso, e quindi la sua specifica L-trasformata, otteniamo

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{9,091 \text{ V/s}}{(p + 0,667 \text{ ms}^{-1})(p - j\omega_0)} \\ &= \frac{-3,497 \text{ V} e^{-j75,14^\circ}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} + \frac{3,497 \text{ V} e^{-j75,14^\circ}}{p - j\omega_0} \end{aligned}$$

dove verifichiamo a vista la consistenza del teorema del valore iniziale, ma dove ritroviamo gli stessi valori che abbiamo ottenuto nell'esercizio precedente, solo che sono presentati in modo diverso. Infatti noi ora dovremmo determinare l'antitrasformata complessa e

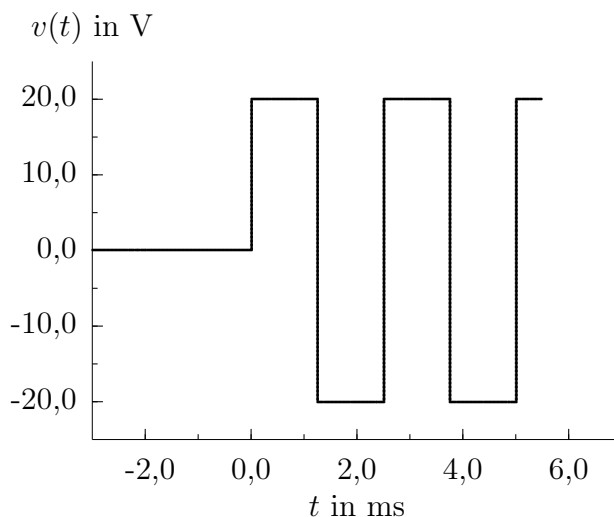
conservarne solamente la componente reale. Senza riscrivere tutto osserviamo che la parte reale di  $-3,497 e^{-j75,14^\circ}$  vale appunto  $-3,497 \cos 75,14^\circ = -0,897$ , lo stesso coefficiente che abbiamo calcolato prima, e che la parte reale del termine sinusoidale vale proprio  $3,497 V \cos(\omega_0 t - 75,14^\circ)$ , come si era calcolato nell'esercizio precedente.

Si noti la comodità di usare l'eccitazione complessa, rispetto a quella reale; le informazioni circa la risposta di regime, in particolare l'ampiezza della risposta e il suo ritardo di fase, sono immediatamente disponibili nel residuo del termine corrispondente al polo prodotto dall'eccitazione complessa. Non occorre nemmeno antitrasformare per sapere tutto quello che occorre in merito alla risposta di regime.

△

▽

**Esempio 3.5** — Riprendiamo il solito circuito degli esempi precedenti, supponiamo di essere in condizioni iniziali di riposo, ma di eccitare il circuito con un'onda quadra con ampiezza di picco<sup>9</sup> corrispondente ai soliti 20 V, e con un periodo di 2,5 ms, corrispondenti ad una frequenza fondamentale di 400 Hz. Tale segnale è rappresentato nella figura 3.11.



**Figura 3.11.** Onda quadra

La prima cosa di cui abbiamo bisogno è la L-trasformata dell'onda quadra; dall'appendice B, trasformata numero 32, possiamo ricavare che essa vale

$$E(p) = 20 V \frac{\tanh(pT/2)}{p}$$

dove  $T$  rappresenta il semiperiodo; dunque nel nostro caso  $T = 1,25$  ms. Si noti che il teorema del valore finale non è applicabile perché la funzione tangente iperbolica ha infiniti poli sull'asse immaginario, quindi l'origine del piano  $p$  non fa parte del dominio di convergenza. Invece il valore del teorema iniziale ci porge il valore 20 V, come deve essere.

<sup>9</sup> L'ampiezza di picco è la massima elongazione di un segnale rispetto al valore nullo; l'ampiezza picco-picco è la differenza fra la massima elongazione positiva e la massima elongazione negativa.

Successivamente la solita formula del partitore ci consente di ricavare

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{G_1 E(p)}{G_1 + G_2 + pC} \\ &= \frac{9,091 \text{ V/s}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} \frac{\tanh(pT/2)}{p} \end{aligned}$$

Ancora nella risposta il teorema del valore finale non è applicabile, ma quello del valore iniziale lo è e ci dà il valore nullo, come è giusto che sia, visto che la tensione  $v(t)$  è misurata anche ai capi del condensatore, la cui tensione era nulla prima dell'applicazione dell'onda quadra, e nulla resta subito dopo, non essendoci stati fenomeni impulsivi che avrebbero potuto caricare improvvisamente il condensatore.

L'antitrasformazione sembra più difficile che non nei casi precedenti, ed in effetti lo è, se non altro perché ora siamo in presenza di un'eccitazione periodica non sinusoidale, che contiene infinite componenti sinusoidali, la cui fondamentale oscilla a 400 Hz e le armoniche oscillano a frequenze multiple intere di 400 Hz. ■

L'esperienza ci dice però che siamo di fronte a un comportamento che presenta un transitorio di accensione caratterizzato da una costante di tempo di 1,5 ms e che dopo almeno 7,5 ms può considerarsi esaurito; l'ampiezza iniziale di questa componente esponenziale deve compensare esattamente la componente di regime all'istante 0+; potremmo quindi calcolare la componente di regime, ma anche questo non sembra facile. Procediamo così: calcoliamo la componente transitoria, di cui basta determinare il valore del residuo; si ricava ■

$$V(p) = \frac{5,374 \text{ V}}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} + \text{componente di regime}$$

e ora per sottrazione possiamo calcolare la componente di regime

$$V_{\text{reg}}(p) = \frac{9,091 \text{ V/s} (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}) - 5,374 \text{ V} p (1 - e^{-2pT})}{p(p + 0,667 \text{ ms}^{-1})} \frac{1}{1 + e^{-2pT}}$$

che chiaramente, grazie all'ultimo fattore, ha l'aspetto di una trasformata di funzione periodica. Ci basta allora antitrasformare solo il primo fattore per avere l'espressione della funzione a supporto limitato di base  $2T$  che, replicata per traslazione di  $2T$  infinite volte, produce la risposta periodica completa. Antitrasformiamo pertanto solo la parte

$$G(p) = \frac{9,091 \text{ V/s} (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}) - 5,374 \text{ V} p (1 - e^{-2pT})}{p(p + 0,667 \text{ ms}^{-1})}$$

che risulta composta da alcuni termini simili fra loro e ritardati ciascuno di  $T$  o  $2T$ ; la parte ritardata di  $2T$  serve solo per azzerare il contributo degli altri addendi, contributo che non sarebbe nullo fuori della base; quindi possiamo fare a meno di calcolare questi addendi ritardati di  $2T$ . Possiamo fermare perciò l'attenzione sui primi due addendi di

$$G(p) = \frac{9,091 \text{ V/s} - 5,374 \text{ V} p}{p(p + 0,667 \text{ ms}^{-1})} + \frac{-18,18 \text{ (V/s)} e^{-pT}}{p(p + 0,667 \text{ ms}^{-1})} + e^{-2pT}(\dots)$$

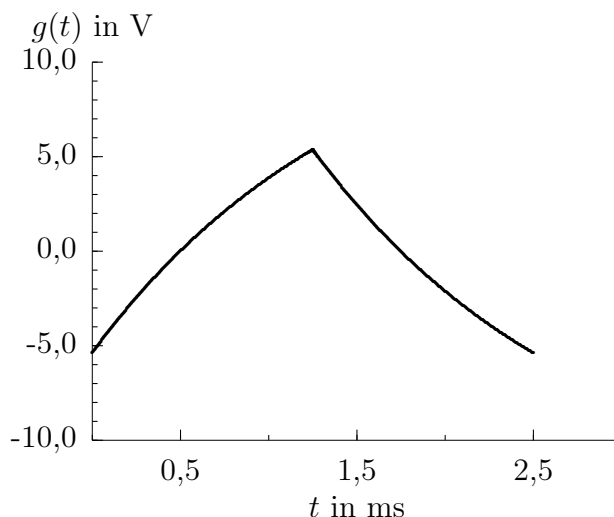
Con l'aiuto delle tabelle dell'appendice o con il solito metodo dei fratti semplici otteniamo

$$g(t) = [13,63 \text{ V} - 19 \text{ V} e^{-0,667 \text{ ms}^{-1}t}]u(t) - 27,26 \text{ V}[1 - e^{-0,667 \text{ ms}^{-1}(t-T)}]u(t-T) + (\dots)u(t-2T)$$

La funzione ora ricavata è riportata nella figura 3.12; si vede bene la deformazione subita dal segnale per effetto del circuito esaminato; essa, ripetuta traslata di 2,5 ms infinite volte, assomiglia più ad un'onda triangolare, che all'originale onda quadra. Se la costante di tempo del circuito invece di essere di 1,5 ms, cioè confrontabile con il periodo del segnale

periodico, fosse stata almeno venti volte più piccola, il segnale in uscita avrebbe avuto ancora un'ottima somiglianza con l'onda quadra di partenza, tuttavia non sarebbe più un'onda quadra.

Questa osservazione sui risultati dell'esempio appena svolto ci permette di capire l'influenza dei condensatori sulla risposta dei circuiti e di valutarne il loro effetto. Poiché spesso i condensatori sono presenti in modo occulto, sono cioè *capacità parassite*, piccoli condensatori costituiti dalle parti piccole ma non infinitesime dei componenti sottoposte a differenze di potenziale variabili, essi sono responsabili della deformazione dei segnali digitali lungo i percorsi che essi devono compiere dentro gli apparati per andare da un componente al successivo, fino al punto che, se il circuito fosse costruito con tecnologia inadeguata alla frequenza fondamentale dei segnali, la deformazione potrebbe essere tanto grave che i circuiti utilizzatori non sarebbero più in grado di interpretare correttamente il segnale. La *limitazione di banda* introdotta dai componenti parassiti è quella che limita la velocità di trasmissione fra apparecchi elettrici distanti, per esempio fra due calcolatori.



**Figura 3.12.** Generatrice della funzione periodica che costituisce la risposta di regime del circuito della figura 3.9 eccitato con l'onda quadra della figura 3.11

△

In alcuni degli esempi precedenti abbiamo usato la trasformazione di Laplace per determinare la risposta di regime in caso di eccitazione periodica. Abbiamo visto che se l'eccitazione è sinusoidale, la risposta di regime è ancora sinusoidale, anche se ritardata:

- la risposta ha la stessa forma dell'eccitazione, è *isomorfa* con l'eccitazione. La parola "isomorfa" si riferisce non alla semplice sovrapposizione del segnale d'uscita su quello d'entrata, ma alla possibile sovrapposizione pur di accettare una traslazione dell'asse dei tempi e un cambiamento di scala per l'asse delle ordinate.

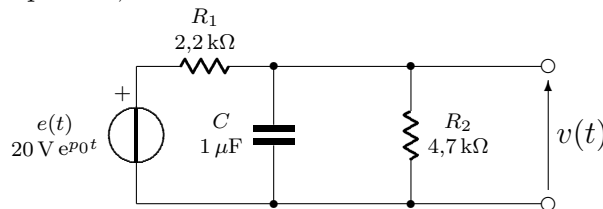
Se invece l'eccitazione periodica è un'onda quadra, la risposta ha una componente periodica che non ha nulla a che vedere con un'onda quadra (almeno nell'esempio 3.5), anche se con altri parametri è possibile una migliore somiglianza; ma migliore somiglianza non significa isomorfismo, perché non esiste nessuna traslazione delle ascisse e nessun cambiamento di scala delle ordinate che consente di sovrapporre il segnale di uscita a quello d'entrata.

Esistono altri segnali, oltre a quello sinusoidale, che producono una componente della risposta isomorfa con l'eccitazione? Esistono e sono i segnali esponenziali (anche complessi) e il segnale sinusoidale ne è solo un esempio particolare.

▽

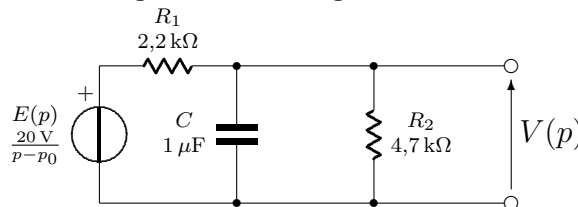
**Esempio 3.6** — Supponiamo di riprendere il solito circuito degli esempi precedenti e di eccitarlo con un'eccitazione di tensione costituita da un segnale proporzionale ad un'esponenziale complessa; va da sé che questa eccitazione, come nel caso dell'esempio 3.3, è solo una generalizzazione, un'estensione, di un segnale reale; la risposta che ci interessa è come al solito la componente reale. Ma è chiaro che se la risposta complessa è isomorfa con l'eccitazione complessa, isomorfe sono anche le rispettive componenti reali, così come lo sono le componenti immaginarie.

Poiché l'esempio è numerico, assegniamo un valore anche alla pulsazione complessa ponendo per esempio  $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0 = +0,667 \text{ ms}^{-1} + j2,513 \text{ ms}^{-1}$ ; il segnale, perciò, o meglio le sue componenti reale e immaginaria, è formato da una cosinusoide e da una sinusoide entrambe di 400 Hz, la cui ampiezza non è costante ma va crescendo esponenzialmente con una costante di tempo di 1,5 ms.



**Figura 3.13.** Circuito del primo ordine eccitato con un'eccitazione esponenziale complessa

La sostituzione del circuito valido nel dominio del tempo con quello valido nel dominio della frequenza ci porta dalla figura 3.13 alla figura 3.14.



**Figura 3.14.** Circuito equivalente nel dominio della pulsazione

La conoscenza della funzione di trasmissione (dall'esempio 3.2) o la semplice applicazione della formula del partitore ci consente di ricavare

$$\begin{aligned} V(p) &= E(p)H(p) = E(p) \frac{G_1}{G_1 + G_2 + pC} \\ &= 9,091 \text{ V/s} \frac{1}{p + 0,667 \text{ ms}^{-1}} \frac{1}{p - p_0} \end{aligned}$$

La componente isomorfa della risposta è quella associata allo stesso polo presente nella eccitazione, mentre l'altro polo è responsabile del transitorio di accensione; perciò, isolando la componente isomorfa, otteniamo

$$V_{\text{iso}}(p) = 20 \text{ V} \frac{H(p_0)}{p - p_0}$$

$$= 3,196 \text{ V} \frac{e^{-j62^\circ}}{p - p_0}$$

$$v_{\text{iso}}(t) = 3,196 \text{ V} e^{0,667 \text{ ms}^{-1}t} [\cos(2,513 \text{ ms}^{-1}t - 62^\circ) + j \sin(2,513 \text{ ms}^{-1}t - 62^\circ)]$$

Come nel caso sinusoidale dell'esempio 3.3, anche qui non merita nemmeno di eseguire l'antitrasformazione perché le informazioni relative al cambio di scala e al ritardo sono già contenute nel residuo del fratto corrispondente al termine isomorfo e ne sono semplicemente il modulo e la fase.

Si noti che il regime sinusoidale non è altro che la risposta isomorfa ad un segnale (reale o complesso) caratterizzato da  $\sigma_0 = 0$ . Non è altro che un caso particolare di quanto esaminato in questo esempio.

△

▽

- **Esempio 3.7** — L'esempio 3.6 precedente ci porta dunque a definire il *regime cisoidale*; esso è particolarmente interessante quando la costante di tempo di crescita dell'esponenziale è positiva, ma nessuno vieta di usarne i concetti anche quando detta costante di tempo è negativa.

Certo è che se la costante di tempo dell'esponenziale complessa  $e^{p_0 t}$  è positiva, allora non abbiamo difficoltà a immaginare che il segnale di eccitazione sia stato applicato “da sempre”; nel lontano istante  $t = -\infty$  in cui tutto è cominciato, si è manifestato un transitorio di accensione *di ampiezza nulla*; infatti l'esempio precedente mostra che il transitorio svanisce con il crescere del tempo, ma in generale non è così. Quello che bisogna rilevare dai vari esempi svolti finora è che l'ampiezza del transitorio di accensione è proporzionale all'ampiezza dell'eccitazione all'istante dell'accensione, il che è piuttosto intuitivo. Per averne una conferma matematica basta definire convenientemente il concetto di ampiezza

- iniziale o di ampiezza al momento dell'accensione, che finora abbiamo sempre considerato che avvenisse all'istante  $t = 0$ . La cosa è abbastanza semplice nel caso di eccitazioni esponenziali  $e(t) = E_0 e^{p_0 t + j\varphi}$  dove l'ampiezza iniziale è semplicemente  $E_0$ , cioè il modulo del numero complesso  $e(0)$ .

Ora nel caso che il segnale sia stato applicato “da sempre”, nel lontano istante di accensione, l'ampiezza della eccitazione era nulla, perciò non è stato provocato nessun transitorio di accensione, ma il circuito è stato subito sede del regime cisoidale dove erano presenti solamente risposte isomorfe con l'eccitazione. Questo anche nel caso che la funzione di trasferimento contenesse dei poli puramente immaginari o anche poli con parte reale positiva semplici o multipli. Semplicemente il transitorio non c'è stato.

Vale la pena di osservare che una qualsiasi eccitazione proporzionale a  $e^{p_0 t}$  provoca una risposta isomorfa il cui ritardo e il cui cambiamento di scala sono contenuti semplicemente nel valore della funzione di trasferimento  $H(p)$  calcolata alla pulsazione complessa  $p_0$ , cioè  $H(p_0)$ , e non è necessario svolgere altri calcoli per antitrasformare il risultato, visto che tutte le informazioni necessarie sono già contenute in  $H(p_0)$ .

△

Gli esempi appena svolti, sia pure facendo riferimento ad un circuito particolarmente semplice, ci hanno consentito di trarre conclusioni che hanno validità generale, e non sono limitate al particolare circuito trattato negli esempi. La semplicità del circuito ci ha consentito di svolgere calcoli elementari, lasciandoci lo spazio per svolgere le considerazioni suddette, senza essere confusi da sviluppi matematici complicati.

Versione del 3 ottobre 2001

Ora, per completezza, faremo ancora qualche esempio con circuiti un po' più complessi e constateremo che le osservazioni fatte finora si possono ripetere tali e quali.

Ma prima, sgomberiamoci il campo dai giochetti relativi alle unità di misura.

### 3.4 Normalizzazione

Le equazioni che scriviamo per descrivere il comportamento dinamico dei circuiti sono tutte equazioni fra grandezze e non equazioni fra misure. È per questo che bisognerebbe avere ogni grandezza espressa numericamente sempre accompagnata dall'unità di misura con la quale la misura è stata fatta.

D'altra parte abbiamo visto che l'integrale di Laplace fra grandezze introduce un cambio nella dimensionalità delle grandezze trasformate; onestamente non si può negare che sia un po' fastidioso che la trasformata di una tensione sia omogenea con un flusso concatenato e che la trasformata di una corrente sia omogenea con una carica. Ma se questo è il prezzo che bisogna pagare per fruire dei vantaggi della L-trasformazione, ebbene paghiamo.

C'è però un altro caso in cui ci farebbe molto comodo liberarci delle unità di misura; le unità SI del Sistema Internazionale sono fra loro coerenti, ma per le grandezze elettriche è sempre necessario ricorrere a multipli spesso molto piccoli o molto grandi di tali unità. I condensatori di qualche millifarad esistono, ma quelli che comunemente si incontrano in Elettronica sono dell'ordine dei nanofarad (da qualche migliaio a qualche millesimo, ed è una gamma già piuttosto grande); gli induttori, sebbene si usino meno frequentemente, sono spesso dell'ordine dei microhenry; al contrario i resistori hanno valori di resistenza che si spingono fino ai megaohm; le frequenze stesse da frazioni di hertz si spingono fino a decine o centinaia di gigahertz, valori ai quali si è sconfinati nel dominio dei campi elettromagnetici e dei fenomeni di propagazione.

Tutte queste potenze di 10 sono fastidiose da portarsi dietro. Perciò si è sviluppata l'abitudine di usare insiemi di unità di misura diversi da quelli SI, ma ugualmente fra loro coerenti. Il tutto equivale a usare le misure delle grandezze avendo scelto come unità di misura dei campioni convenienti per il problema che si sta trattando, ma per il resto piuttosto arbitrari.

Quando si dice misuriamo la tensione in volt, la corrente in milliampere, il tempo in millisecondi, eccetera, si convengono tutta una serie di campioni per le grandezze e si dichiara che le indicazioni numeriche nelle equazioni sono espresse come multipli dei campioni dichiarati. Questa è la normalizzazione.

Per essere più generali si stabiliscano un certo numero di grandezze "fondamentali", per esempio  $V_0$  per la tensione,  $I_0$  per la corrente,  $T_0$  per il tempo, e si ricavano le altre grandezze "derivate" in base alle loro dimensioni fisiche; si otterrà la tabella 3.1.

Per la frequenza bisogna stare un poco attenti, perché gli hertz rappresentano dei "cicli al secondo" e non semplicemente dei secondi reciproci, che competono invece alla pulsazione; tutto resta nascosto dentro la costante  $2\pi$  che non è né un numero né un angolo, ma una grandezza dimensionata la cui unità di misura è "cicli<sup>-1</sup>". Pur di non scordarsene, la cosa non è di nessun disturbo; una frequenza di 500 Hz indica 500 cicli al secondo; se si misura il tempo in millisecondi, quella frequenza diventa di 0,5 cicli al millisecondo o, se si preferisce, di 0,5 kilocicli al secondo, quindi di 0,5 kHz.

Negli esempi 3.1–3.6 si sono indicate le unità di misura accanto ai valori numerici, ma qua e là si sono commessi dei piccoli errori, che hanno consentito di verificare la

**Tabella 3.1.** Unità coerenti

Grandezza	Unità
Tensione	$V_0$
Corrente	$I_0$
Tempo	$T_0$
Resistenza	$R_0 = V_0/I_0$
Conduttanza	$G_0 = I_0/V_0$
Induttanza	$L_0 = R_0 T_0$
Capacità	$C_0 = G_0 T_0$
Pulsazione	$\Omega_0 = T_0^{-1}$
Potenza	$P_0 = V_0 I_0$

dimensionalità, ma che hanno violato la coerenza. In realtà si sono usati i valori di normalizzazione

$$\begin{array}{llll} V_0 = 1 \text{ V} & I_0 = 1 \text{ mA} & T_0 = 1 \text{ ms} & \Omega_0 = 1 \text{ ms}^{-1} \\ R_0 = 1 \text{ k}\Omega & G_0 = 1 \text{ mS} & C_0 = 1 \text{ }\mu\text{F} & \end{array}$$

e se nelle espressioni degli esempi si cancellassero tutte le unità di misura, non ci sarebbe assolutamente nessun errore. Solo bisognerebbe leggere tutti i valori numerici ricordando il loro significato fisico e usando le unità di misura corrette. Chiaramente il controllo dimensionale sarebbe un poco più complicato. D'ora in avanti si seguirà questa via e non si indicheranno più le unità di misura nei calcoli intermedi, ma solo nei risultati finali.

### 3.5 Ancora esempi

Senza esagerare con il grado del circuito, ora verranno esposti altri esempi.

- Incidentalmente già diverse volte si è fatto riferimento al *grado di un circuito*; esso corrisponde al numero di equazioni differenziali del primo ordine fra loro indipendenti
- che compaiono nelle equazioni di equilibrio del circuito, cioè nell'insieme delle equazioni costitutive del connettore e di tutti gli altri componenti. Ogni componente preso a sé potrebbe presentare un certo numero di equazioni differenziali del primo ordine, e la somma di questi numeri normalmente produce il grado; ci sono dei casi però in cui le equazioni del connettore pongono dei vincoli tali fra le varie grandezze per cui non tutte le equazioni differenziali risultano indipendenti. In questi casi l'ordine del circuito continua a coincidere con l'ordine del sistema matematico, ma non coincide più con il numero di componenti reattivi. Questa questione verrà approfondita nell'appendice A al paragrafo A.3.

Un fenomeno dello stesso genere si presenta con il fatto che in certe funzioni di trasferimento si potrebbero verificare delle semplificazioni di fattori fra numeratore e denominatore; la cosa può dipendere dai valori dei componenti o può essere legata alla topologia del circuito. Nell'uno come nell'altro caso, però, il grado della funzione di trasmissione risulta inferiore al numero dei componenti reattivi.



**Esempio 3.8** — Nella figura 3.15 sono riportati alcuni esempi di circuiti degeneri nei quali il grado della funzione di rete è inferiore al numero dei componenti reattivi.

Versione del 3 ottobre 2001

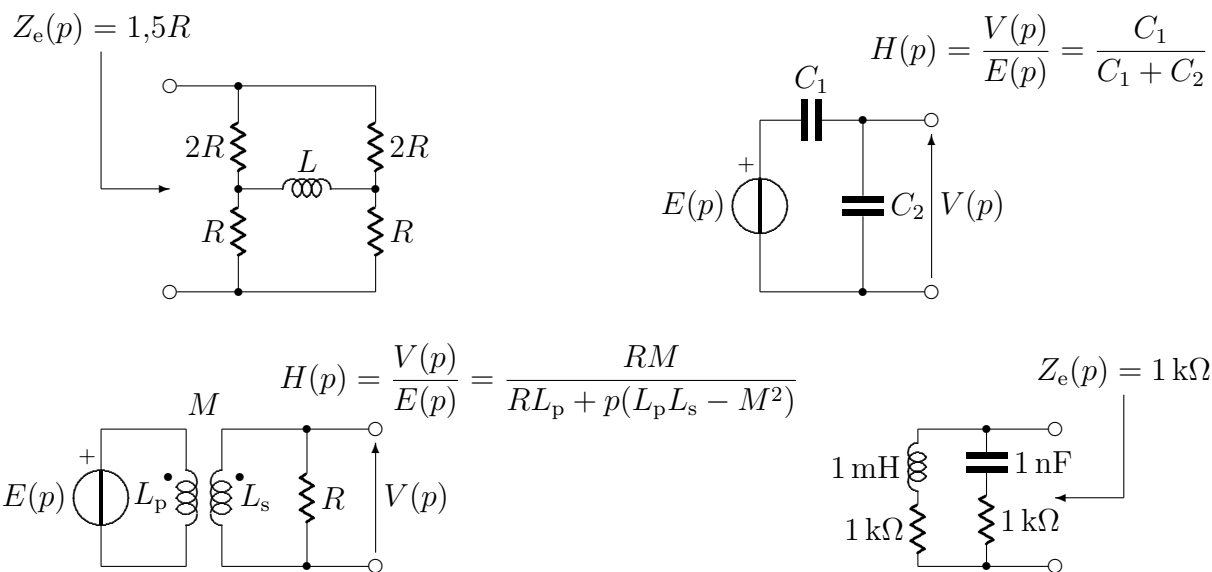


Figura 3.15. Alcuni casi degeneri

△

▽

**Esempio 3.9** — Si consideri il circuito della figura 3.16 e il suo equivalente nel dominio della pulsazione nella figura 3.17; l'eccitazione si suppone per ora non specificata mentre i due condensatori sono inizialmente carichi alle tensioni  $v_{C_20}$  e  $v_{C_40}$ .

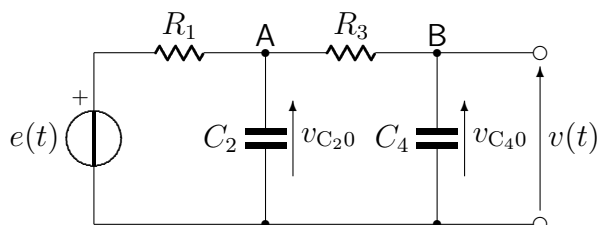


Figura 3.16. Circuito del secondo ordine

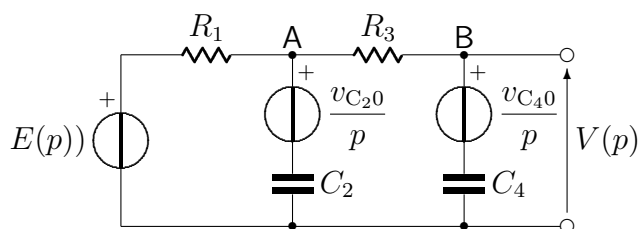


Figura 3.17. Circuito del secondo ordine nel dominio della pulsazione

Determiniamo dapprima la trasformata della risposta  $V(p)$  cercando di ricavarne il massimo delle informazioni relative alle possibili eccitazioni che potrebbero venire applicate al circuito.

Per fare questo non dobbiamo “spaventarci” se il circuito sembra complicato rispetto a quelli che erano stati visti nel precedente corso di Elettrotecnica I, se non altro per il numero di generatori simultaneamente presenti. È chiaro che possiamo applicare la sovrapposizione degli effetti, ma è altrettanto chiaro che, essendo interessati alla sola risposta  $V(p)$ , e non anche alle altre tensioni e alle varie correnti, è meglio se usiamo qualche altro metodo di analisi specificamente destinato a trattare circuiti con diversi generatori di tensione.

Questo metodo deriva dall'applicazione del teorema di Millman, già noto, insieme a un po' di astuzia.

Applicando perciò il teorema di Millman prima al nodo A e poi al nodo B si ricava

$$V_A(p) = \frac{G_1 E(p) + pC_2 \frac{v_{C_2 0}}{p} + (G_3 \oplus pC_4) \frac{v_{C_4 0}}{p}}{G_1 + pC_2 + G_3 \oplus pC_4}$$

$$V_B(p) = V(p) = \frac{G_3 V_A(p) + pC_4 \frac{v_{C_4 0}}{p}}{G_3 + pC_4}$$

da cui sostituendo e semplificando si ricava

$$V(p) = \frac{G_3(G_1 E(p) + C_2 v_{C_2 0}) + (pC_2 + G_1 + G_3)C_4 v_{C_4 0}}{(pC_4 + G_3)(pC_2 + G_1) + pC_4 G_3}$$

Possiamo subito dire qualche cosa in merito al transitorio provocato dalle condizioni iniziali dei due condensatori; la parte che contiene  $v_{C_2 0}$  è costituita da una frazione con il numeratore costante e il denominatore costituito da un polinomio di secondo grado. Possiamo dire che il valore iniziale di questo contributo è nullo, così come il valore finale, come c'era da aspettarsi, è nullo. Il contributo di  $v_{C_4 0}$ , invece, produce un termine con valore iniziale pari a  $v_{C_4 0}$  stesso, e anche questo non deve meravigliare, visto che la tensione di uscita è osservata proprio ai capi del condensatore  $C_4$ ; il valore finale è zero come c'era da aspettarsi.

Il polinomio di secondo grado che compare al denominatore ha grado uguale a quello del circuito, e questo era anche un fatto scontato, visto che il circuito non presenta nessuna delle degenerazioni illustrate nella figura 3.8. Non è difficile calcolarne il discriminante e ragionarci sopra per concludere che esso è sempre positivo, per cui le radici del polinomio sono reali negative. I termini transitori dovuti alle condizioni iniziali si scaricano perciò con leggi che dipendono da due esponenziali reali, e non si presentano quindi oscillazioni di nessun genere.

La funzione di trasferimento fra l'eccitazione e la risposta, che si ricava dall'equazione precedente azzerando le condizioni iniziali, così da ottenere

$$H(p) = \frac{G_3 G_1}{(pC_4 + G_3)(pC_2 + G_1) + pC_4 G_3}$$

è una funzione di secondo grado e corrisponde anche alla risposta all'impulso; se imprimesimo una tensione impulsiva unitaria all'entrata, l'uscita darebbe luogo ad un transitorio con le stesse caratteristiche di quello legato alle condizioni iniziali; i pesi sarebbero diversi, ma gli esponenziali che compongono la risposta all'impulso avrebbero le stesse costanti di tempo. Di nuovo un'eccitazione impulsiva non darebbe luogo a nessun tipo di oscillazione. In ogni caso potremmo prevedere che la risposta all'impulso avrebbe un valore iniziale nullo, ma una pendenza iniziale non nulla. Il valore finale invece sarebbe sempre nullo.

Escludendo i contributi dovuti alle condizioni iniziali, potremmo esaminare che cosa fa il circuito in seguito ad un'eccitazione a gradino. Senza neanche fare calcoli, ricordando solo che la trasformata di un segnale a gradino è proporzionale a  $1/p$ , potremmo affermare

Versione del 3 ottobre 2001

che la risposta al gradino presenta un valore iniziale nullo, ma anche una pendenza iniziale nulla; il valore finale invece coinciderebbe con l'ampiezza del gradino. Anche questo non ci meraviglia; dopo che è trascorso il transitorio di accensione, che rende piuttosto lenta la risposta del circuito, il circuito si stabilizza nella situazione di un regime stazionario; quando i condensatori si sono caricati, non assorbono più corrente e quindi, comportandosi come circuiti aperti, è come se non ci fossero; è logico, quindi, che per tempi grandi la tensione all'uscita sia uguale alla tensione all'entrata.

Se l'eccitazione fosse un'onda quadra, con frequenza fondamentale anche moderatamente alta, la deformazione della risposta sarebbe così pronunciata che potrebbe assomigliare più a una sinusoide deformata che non a un'onda quadra.

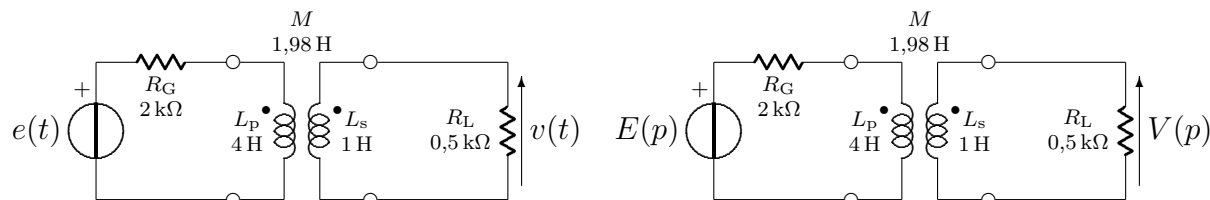
La risposta a una sinusoide, invece, continuerebbe ad essere una sinusoide, ma di ampiezza sempre più piccola man mano che la frequenza cresce; al limite per frequenza infinita la funzione di trasferimento vale zero e non esce più nessun segnale dalla porta di uscita. Ne deduciamo che un circuito come quello di questo esempio si comporta come un filtro *passabasso*, un filtro, cioè, che lascia transitare verso l'uscita segnali di frequenze basse, ma via via che la frequenza cresce, i corrispondenti segnali sinusoidali vengono ridotti sempre più d'ampiezza fino a sparire completamente per frequenze altissime.

Come si vede, usando i teoremi del valore finale e del valore iniziale, qualche semplice conoscenza relativa ai polinomi e un poco di buon senso, si riescono ad ottenere informazioni sulla risposta senza nemmeno conoscerla nei dettagli e senza eseguire nessuna antitrasformazione.

△

▽

**Esempio 3.10** — Si consideri il trasformatore induttivo della figura 3.18 e si supponga che il circuito sia inizialmente a riposo.



**Figura 3.18.** Trasformatore caricato

Si determini la funzione di trasferimento  $H(p) = V(p)/E(p)$  e se ne traggano le conclusioni qualitative.

Si supponga che il generatore produca un'eccitazione a gradino di ampiezza di 10 V. Che risposta si avrebbe all'uscita? Si supponga che il generatore produca un'eccitazione sinusoidale di ampiezza pari a 10 V e di frequenza variabile. Che risposta in frequenza ci si può aspettare?

Nell'affrontare questo esempio normalizzeremo rispetto a  $V_0 = 1$  V,  $I_0 = 1$  mA e a  $T_0 = 1$  ms, per cui le induttanze devono coerentemente essere normalizzate rispetto a  $L_0 = 1$  H

Dalle equazioni del connettore e dalle equazioni dei componenti si ricava

$$H(p) = \frac{pMR_L}{(L_pL_s - M^2)p^2 + (L_pR_L + L_sR_G)p + R_GR_L} = \frac{0,99p}{0,0796p^2 + 4p + 1}$$

Osserviamo che la funzione di trasferimento è del secondo ordine, esattamente quante sono le equazioni differenziali indipendenti, ma osserviamo anche che se il trasformatore

fosse ad accoppiamento unitario, il termine di secondo grado sparirebbe e la funzione di trasferimento si ridurrebbe a una funzione di primo grado. Ecco un altro caso dove si possono verificare delle degenerazioni. Vale forse la pena di osservare che queste degenerazioni hanno luogo solo “in teoria”, cioè quando modelliamo i circuiti e i componenti con modelli un po' troppo idealizzati. Nel mondo reale queste degenerazioni non avvengono mai.

I poli sono reali e valgono rispettivamente  $p_1 = -50 \text{ ms}^{-1}$  e  $p_2 = -0,2513 \text{ ms}^{-1}$ ; i loro valori assoluti corrispondono a costanti di tempo che in 5 o 6 intervalli producono l'estinzione dei corrispondenti esponenziali. Questi tempi di estinzione sono confrontabili ( $6\tau$  tanto per fissare le idee) con il periodo di una sinusoide che nello stesso intervallo di tempo compie un ciclo completo di oscillazione; perciò la sua frequenza è pari all'inverso di tale tempo e la pulsazione a  $2\pi$  volte tanto. Dunque (anche se il ragionamento può sembrare contorto) i valori assoluti dei due poli sono confrontabili con le pulsazioni di due sinusoidi che compiono un ciclo di oscillazione in circa sei volte l'inverso del loro periodo. Nel nostro caso si tratterebbe di due sinusoidi una di frequenza pari a circa 40 Hz, mentre l'altra avrebbe una frequenza pari a circa 8 kHz. Sembra ragionevole aspettarsi comportamenti diversi per frequenze decisamente inferiori a 40 Hz, per frequenze comprese verso il centro dell'intervallo fra 40 Hz e 8 kHz, per frequenze decisamente superiori a 8 kHz.

Se applichiamo un'eccitazione a gradino di 10 V otteniamo una risposta la cui trasformata vale

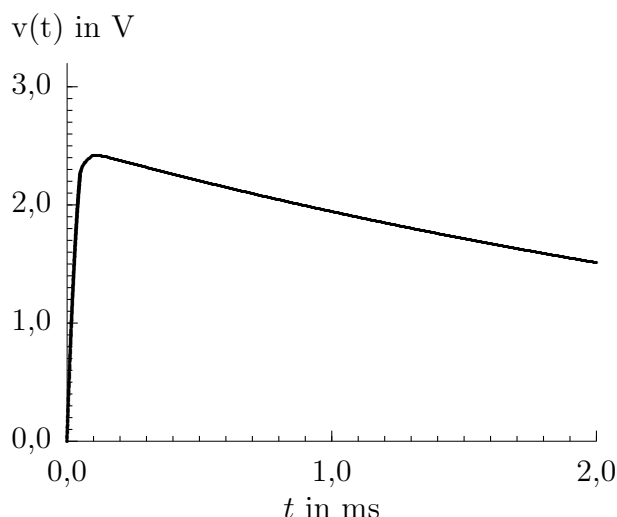
$$V(p) = \frac{9,9}{0,0796p^2 + 4p + 1} = \frac{124,4}{(p + 50)(p + 0,2513)}$$

con un valore iniziale nullo, ma dove la derivata ha un valore finito, positivo e piuttosto elevato. Il valore finale è nullo. Ci possiamo aspettare una risposta piuttosto rapida iniziale, ma trascorso un certo tempo il segnale all'uscita svanisce. La prima parte della risposta è riportata nella figura 3.19.

Antitrasformando si ottiene

$$V(p) = \frac{2,5}{p + 0,2513} - \frac{2,5}{p + 50}$$

$$v(t) = 2,5 \text{ V} \left( e^{-0,2513 \text{ ms}^{-1}t} - e^{-50 \text{ ms}^{-1}t} \right)$$



**Figura 3.19.** Prima parte della risposta al gradino del trasformatore caricato della figura 3.18

Per quel che riguarda la risposta in regime sinusoidale possiamo dire che per frequenze bassissime, inferiori a 40 Hz, i termini del denominatore sono tutti trascurabili (in modulo) rispetto all'unità e quindi la funzione di trasferimento si riduce a

$$H(p) \approx \frac{0,99p}{1}$$

per cui la funzione di trasferimento presenta un modulo crescente con la pulsazione, mentre la sua fase si mantiene costantemente a  $90^\circ$  di anticipo, visto che l'angolo di  $H(j\omega) = 0,99j\omega$  è sempre positivo.

Al contrario per frequenze superiori a circa 8 kHz sono i termini di grado inferiore quelli il cui modulo è trascurabile rispetto al termine di secondo grado, quindi per le alte frequenze la funzione di trasferimento è approssimativamente

$$H(p) \approx \frac{0,99p}{0,0796p^2} = \frac{12,44}{p}$$

perciò alle alte frequenze il modulo della funzione di trasmissione è inversamente proporzionale alla pulsazione, mentre la fase si mantiene costantemente al valore di  $-90^\circ$ , produce cioè un ritardo di fase costante.

Alle frequenze intermedie il termine quadratico e l'unità sono trascurabili in modulo rispetto al termine di primo grado (in ogni caso si compensano esattamente per  $p = j\sqrt{0,0796} = j3,545 \text{ ms}^{-1}$  corrispondenti a 564 Hz) per cui in un certo intervallo a cavallo di  $3,545 \text{ ms}^{-1}$  la funzione di trasferimento è approssimabile con

$$H(p) \approx \frac{0,99p}{4p} = 0,2475$$

che corrisponde quasi esattamente a metà del rapporto spire (secondarie su primarie) del trasformatore; infatti esso presenta un rapporto spire  $n_s/n_p \approx \sqrt{L_s/L_p} = 0,5$ ; se il trasformatore fosse ideale esso presenterebbe al generatore la resistenza di carico trasformata attraverso il rapporto spire pari a  $R'_L = R_L(n_p/n_s)^2 = 2 \text{ k}\Omega$ ; siccome questa resistenza vista dal generatore all'ingresso del trasformatore è uguale alla sua stessa resistenza interna, fra queste due resistenze si forma un rapporto di partizione di 0,5, cosicché la tensione all'ingresso del trasformatore è la metà di quella del generatore; all'uscita detta tensione viene ulteriormente ridotta dal rapporto spire, per cui possiamo aspettarci in uscita un quarto della tensione a vuoto del generatore, ed è appunto quello che abbiamo trovato.

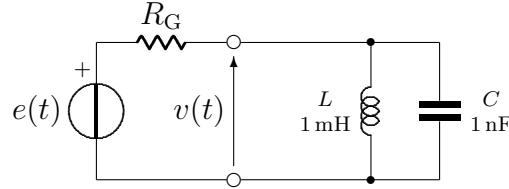
Tutto ciò vale in regime sinusoidale, ma non è un caso che con un gradino di ampiezza di 10 V il picco della risposta al gradino sia appunto di circa 2,5 V. Certo non succede sempre così come avviene in questo esempio; dipende dalle frequenze in gioco e dalla qualità del trasformatore, in particolare del suo coefficiente di accoppiamento, che in questo caso è piuttosto alto ( $|k| = 0,99$ ); se il coefficiente di accoppiamento fosse stato sensibilmente più basso, anche i ragionamenti approssimati che abbiamo svolto sopra avrebbero avuto meno valore qualitativo, fino a perdere completamente di significato per valori del coefficiente di accoppiamento molto bassi.

Un'ultima osservazione: alle basse frequenze e via via che la frequenza diminuisce, la funzione di trasferimento diventa in modulo sempre più piccola fino a svanire completamente per frequenza nulla; lo stesso succede per alte frequenze, dove via via che la frequenza cresce il modulo della funzione di trasferimento diventa sempre più piccolo fino a svanire completamente per frequenze elevatissime; al contrario per frequenze né grandi né piccole (a cavallo di 564 Hz) la funzione di trasferimento si mantiene in modulo circa costante; trasmettendo i segnali sinusoidali quasi inalterati nella banda delle frequenze intermedie e attenuando sempre più le basse e le alte frequenze, questo circuito si comporta come un filtro *passabanda*.

△



**Esempio 3.11** — Nella figura 3.20 è riportato un risonatore parallelo alimentato da un generatore reale di tensione. Si desidera determinare la funzione di trasferimento e le sue caratteristiche quando la si interpreti come risposta all'impulso; si desidera esaminare che cosa succede quando si faccia variare la resistenza del generatore, supponendo che la resistenza del generatore assuma i valori  $R_{G1} = 100 \Omega$ ,  $R_{G2} = 0,5 \text{ k}\Omega$  e  $R_{G3} = 1 \text{ k}\Omega$ .



**Figura 3.20.** Risonatore parallelo

La formula del partitore ci permette di trovare la funzione di trasferimento cercata  $H(p) = V(p)/E(p)$

$$H(p) = \frac{G_G}{G_G + pC + (1/(pL))} = \frac{pL}{p^2 LCR_G + pL + R_G}$$

Osserviamo innanzi tutto che la funzione di trasferimento ha la stessa struttura matematica di quella trovata nell'esempio 3.10, e quindi anche questo circuito si comporta come un filtro passabanda; possiamo distinguere le basse, le alte e le frequenze intermedie; possiamo calcolare che queste ultime si trovano nell'intorno della frequenza di risonanza  $1/(2\pi\sqrt{LC})$ , che con i valori dei componenti di questo esempio cade a circa 159 kHz.

Conviene anche stabilire i valori di normalizzazione scegliendo  $V_0 = 1 \text{ V}$ ,  $I_0 = 1 \text{ mA}$  e  $T_0 = 1 \text{ ms}$ ; in questo modo i valori normalizzati della resistenza del generatore sono  $R_{G1} = 0,1$ ,  $R_{G2} = 0,5$  e  $R_{G3} = 1$ , mentre i valori dell'induttanza e della capacità normalizzati sono unitari.

Quando  $R_G = R_{G1}$  la funzione di trasferimento numericamente diventa

$$H(p) = \frac{p}{0,1p^2 + p + 0,1} = \frac{10 \text{ V } p}{(p + 0,101 \mu\text{s}^{-1})(p + 9,899 \mu\text{s}^{-1})}$$

e presenta una coppia di poli reali abbastanza distanziati l'uno dall'altro (i loro moduli sono circa in rapporto 100). La funzione di trasferimento intesa come risposta all'impulso presenta due poli reali negativi che contribuiscono all'antitrasformata con due esponenziali decrescenti. Il valore iniziale vale 10 V, mentre il valore finale vale 0; numericamente l'antitrasformata vale

$$v(t) = h(t) = 10,103 e^{-9,899 \mu\text{s}^{-1}t} - 0,103 e^{-0,101 \mu\text{s}^{-1}t}$$

Quando invece  $R_G = R_{G2}$  si ottiene

$$H(p) = \frac{p}{0,5p^2 + p + 0,5} = \frac{2 \text{ V } p}{(p + 1 \mu\text{s}^{-1})^2}$$

e osserviamo che con questi particolari valori ci troviamo in presenza di un paio di poli reali coincidenti. Le caratteristiche generali della risposta all'impulso sono le stesse, salvo che il valore iniziale ora vale 2, ma l'andamento specifico della risposta, benché matematicamente molto diverso

$$v(t) = h(t) = 2 \text{ V}(1 - 1 \mu\text{s}^{-1}t) e^{-1 \mu\text{s}^{-1}t}$$

non è molto diverso come disegno, a parte le diverse scale. Gli andamenti sono riportati nella figura 3.21 e possono essere confrontati sulla base delle stesse scale.

Versione del 3 ottobre 2001

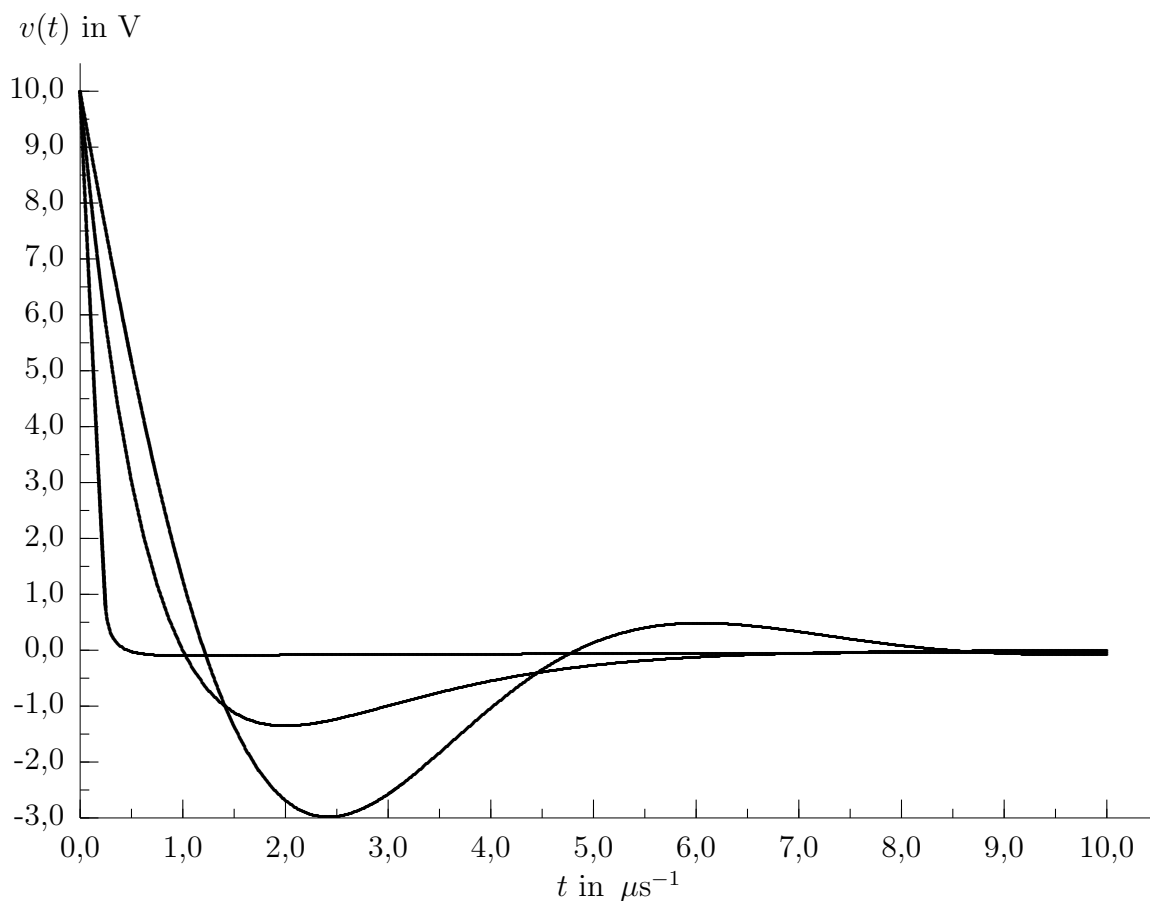
Infine quando  $R_G = R_{G3}$  la funzione di trasferimento diventa

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + p + 1} = \frac{1 \text{ Vp}}{(p + 0,5 \mu\text{s}^{-1})^2 + 0,75 \mu\text{s}^{-2}}$$

e le radici sono complesse con parte reale  $\sigma = -0,5 \mu\text{s}^{-1}$  e parte immaginaria  $\omega = \sqrt{0,75} = 0,866 \mu\text{s}^{-1}$ . Ora l'antitrasformata vale

$$v(t) = h(t) = 1,155 e^{-0,5 \mu\text{s}^{-1}t} \cos(0,866 \mu\text{s}^{-1}t + 30^\circ)$$

Le tre risposte sono riportate a confronto nella figura 3.21. Per renderne più agevole il confronto si sono riportate le risposte scalate in modo che il loro valore iniziale sia 10 V per tutte e tre. È come se con  $R_{G1}$  si fosse “sparato” un impulso unitario, cioè di 1 Vs, con  $R_{G2}$  l'impulso fosse di 5 Vs e con  $R_{G3}$  esso fosse di 10 Vs.



**Figura 3.21.** Risposte all'impulso con diversi valori di  $R_G$ ; le ordinate sono scalate in modo che il valore iniziale sia per tutte uguale a 10 V.

In questo modo diventa agevole constatare che con  $R_{G1}$  il transitorio dovuto all'impulso si smorza rapidamente, diventando moderatamente negativo; con  $R_{G2}$  la sovraelongazione negativa è più importante, ma dopo di essa il transitorio tende a zero senza ulteriori oscillazioni; invece con  $R_{G3}$  le oscillazioni si mantengono anche se con i valori numerici esaminati dette oscillazioni si smorzano abbastanza rapidamente. Se si fosse usata

una resistenza  $R_G$  ancora più grande, la “frequenza” delle oscillazioni<sup>10</sup> sarebbe un poco aumentata, appena appena, ma lo smorzamento sarebbe stato molto minore.

Dunque lo smorzamento dipende dal valore della resistenza. È consuetudine per i risonatori fare riferimento ad un parametro detto *coefficiente di risonanza* che vale infinito quando il risonatore non è smorzato e assume valori sempre minori quanto maggiore è lo smorzamento.

Nel caso particolare il coefficiente di risonanza vale

$$Q = \frac{R_G}{\sqrt{L/C}} = \begin{cases} 0,1 & \text{nel caso di } R_{G1} \\ 0,5 & \text{nel caso di } R_{G2} \\ 1 & \text{nel caso di } R_{G3} \end{cases}$$

Si tratta di valori modestissimi, più consoni ad una situazione di analogia elettromeccanica. Nei sistemi elettronici è normale avere fenomeni di risonanza poco smorzati e in certe applicazioni, come nel caso degli oscillatori, non è difficile arrivare a coefficienti di risonanza di diverse centinaia o anche, con opportune tecniche, di molte migliaia.

Più in generale il coefficiente di risonanza di un risonatore parallelo è dato dal rapporto fra la resistenza complessiva in parallelo al risonatore e la resistenza caratteristica  $\sqrt{LC}$ ; la resistenza complessiva sta a numeratore e quando vale infinito manca lo smorzamento e  $Q = \infty$ . Nei risonatori serie il coefficiente di risonanza è dato dal rapporto fra la resistenza caratteristica e la resistenza complessiva in serie al risonatore; la resistenza complessiva sta a denominatore, e quando vale zero manca lo smorzamento e  $Q = \infty$ .

Il coefficiente di risonanza può avere anche una definizione energetica che non fa nessun riferimento al modello dei componenti. La definizione energetica fa riferimento al regime sinusoidale, che verrà esaminato più dettagliatamente nel capitolo 4; detta definizione è

$$Q = \frac{P_{\text{reatt}}}{P_{\text{att}}}$$

dove  $P_{\text{att}}$  è la potenza attiva o la potenza media assorbita dal risonatore in regime sinusoidale e  $P_{\text{reatt}}$  è la corrispondente potenza reattiva<sup>11</sup> entrambe calcolate o misurate alla frequenza di risonanza.

Tutti i risonatori sono affetti da perdite che possono essere modellate con resistenze in parallelo o in serie; questi parametri parassiti non possono essere evitati a causa dei principi della termodinamica. Con opportune tecnologie si possono ridurre queste perdite e si può aumentare il  $Q$  intrinseco, quello definito mediante le sole resistenze di perdita, di ogni risonatore. Ma poi bisogna essere molto cauti con il resto del circuito che li affianca, compresi i generatori, perché le loro resistenze contribuiscono non poco a ridurre il  $Q$  effettivo, detto anche  $Q$  sotto carico.

Sia con i risonatori parallelo, come in questo esempio, sia con i risonatori serie, le funzioni di trasferimento possono essere messe nella forma

$$H(p) = \frac{N(p)}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}$$

<sup>10</sup> La parola frequenza è segnata fra virgolette perché non siamo in presenza di un fenomeno periodico; tuttavia l'intervallo di tempo che passa fra successivi attraversamenti per zero è costante come lo è per i fenomeni periodici; quindi anche se non si può parlare di frequenza nel senso stretto della parola, tuttavia questa costanza degli intervalli di tempo ci consente la licenza di espressione.

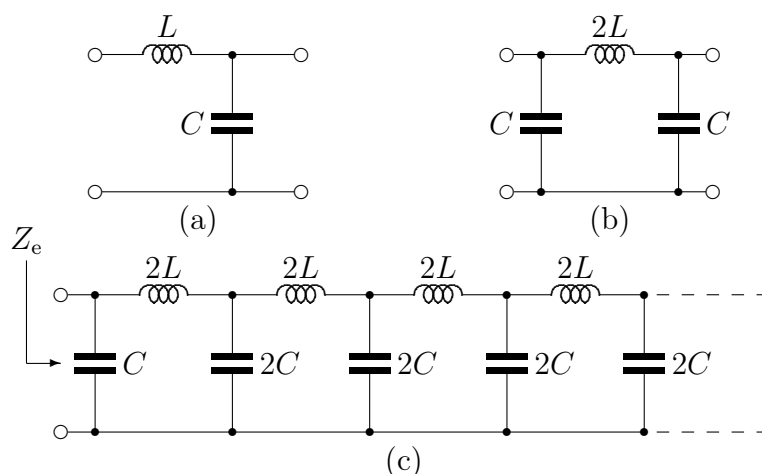
<sup>11</sup> Normalmente, come si farà nel capitolo 4, la potenza reattiva è indicato con il simbolo  $Q$ , ma è evidente che quel simbolo in questo contesto produrrebbe una notevole confusione; ecco perché si sono preferiti i pedici che ricordano chiaramente di quale potenza si sta parlando.

e semplici ragionamenti sulle proprietà dei polinomi di secondo grado consentono di affermare che per  $Q < 0,5$  i poli sono reali e distinti, per  $Q = 0,5$  i poli sono reali e coincidenti, per  $Q > 0,5$  i poli sono complessi e coniugati e, infine, per  $Q = \infty$  i poli sono puramente immaginari; a questi ultimi sono associate oscillazioni prive di smorzamento, cioè oscillazioni sinusoidali, come d'altra parte ci confermano anche le antitrasformate dell'appendice B.

△

▽

**Esempio 3.12** — Nella figura 3.22 è riportato un circuito a scala illimitato, composto cioè di infiniti componenti. Esso risulta dalla connessione di infinite cellette elementari alternativamente connesse con il ramo serie a destra o a sinistra, come appare dalla figura stessa.



**Figura 3.22.** Circuito a scala illimitato

La figura mostra chiaramente che due cellette del tipo (a) fra loro contrapposte formano una cella del tipo (b); tante celle del tipo (b) connesse in cascata danno luogo al circuito illimitato descritto con il circuito (c); questo presenta un'impedenza d'entrata  $Z_e(p)$  che sarebbe difficile da calcolare se dovessimo scrivere le infinite equazioni del circuito.

Se però connettiamo un'altra cella del tipo (b) in testa alla catena, la catena illimitata era, e illimitata resta; solo che ora il calcolo di  $Z_e(p)$  diventa fattibile; essa infatti è l'impedenza d'entrata della cella (b) quando la porta di uscita è chiusa sulla stessa impedenza  $Z_e(p)$ . In formule

$$Z_e(p) = \frac{1}{pC + \frac{1}{2pL + \frac{1}{pC + \frac{1}{Z_e(p)}}}}$$

Risolvendo rispetto a  $Z_e(p)$  si ricava

$$Z_e(p) = \frac{\sqrt{L/C}}{\sqrt{1 + p^2 LC}}$$

Posto  $\sqrt{L/C} = R$  e  $LC = \omega_0^{-2}$ , si può ancora scrivere

$$Z_e(p) = R \frac{\omega_0}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

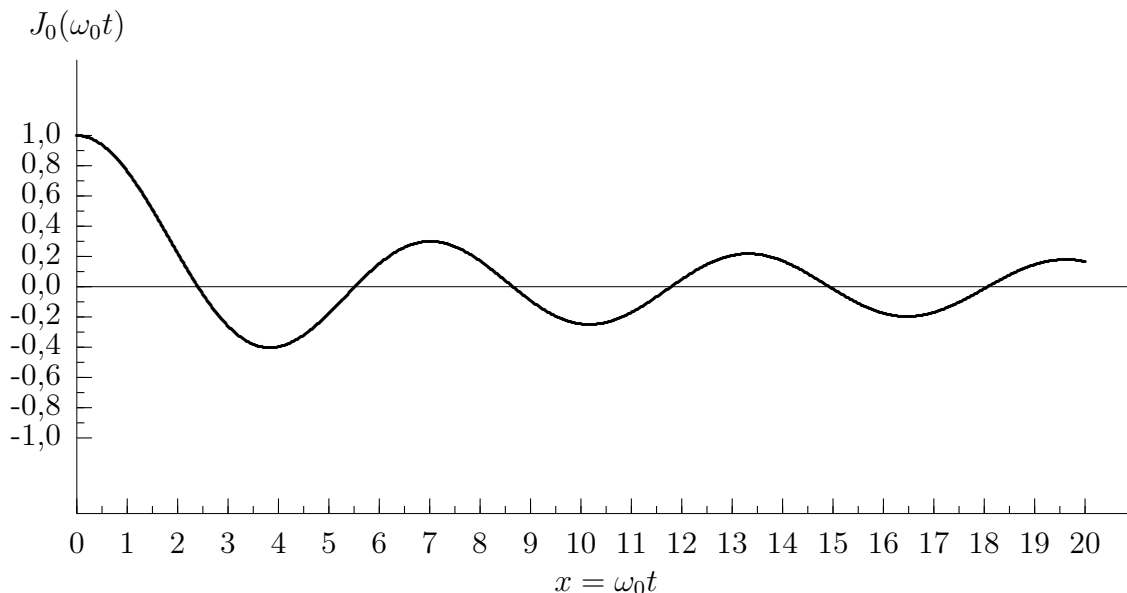
Ecco, questo è un caso fortunato in cui un circuito composto da infiniti componenti si riesce ad analizzare senza troppe difficoltà; semmai ne resta una di carattere teorico: a quale determinazione dà luogo la radice quadrata che compare nell'ultima espressione? Per motivi che potranno diventare meno oscuri nel seguito (vedi le condizioni (A.21)), bisogna rendere monodroma la funzione analitica mediante un taglio che unisca, per esempio, i due punti  $+j\omega_0$  e  $-j\omega_0$ , così da non poterci girare attorno, e poi bisogna scegliere quella delle due determinazioni che assicuri che la parte reale del risultato sia positiva in tutto il semipiano di destra (e quindi anche sul semiasse reale positivo).

Bene, se ora imprimiamo un impulso di corrente di carica  $Q_0$  all'entrata, possiamo determinare la risposta all'impulso, che risulta

$$v(t) = Q_0 R \omega_0 J_0(\omega_0 t)$$

Detta risposta non contiene più esponenziali di nessun genere ma la prima delle funzioni di Bessel di prima specie; il transitorio che nasce dall'impulso è quindi un transitorio del tutto diverso da quelli che si sono trovati negli altri esempi.

Un qualunque testo di matematica ci informa che la funzione di Bessel di prima specie  $J_0$  ha un valore iniziale unitario, che compie oscillazioni smorzate di "periodo" non costante (i successivi zeri non sono equidistanti, come si può vedere nella figura 3.23), e che le elongazioni alla lunga vanno smorzandosi in proporzione a  $1/\sqrt{\omega_0 t}$ . È un transitorio molto lento, quindi, se lo si confronta con i transitori con smorzamento esponenziale.



**Figura 3.23.** Andamento della funzione di Bessel di prima specie  $J_0(x)$

In fondo questo non dovrebbe stupirci; l'energia associata all'impulso iniziale provoca infinite "risonanze" fra le induttanze e le capacità presenti nel circuito, che interagiscono fra di loro, trasferendo l'energia da un componente all'altro, finché questa interessa componenti sempre più lontani dalla porta d'entrata, così da non far più sentire i suoi

effetti a chi osserva il comportamento del circuito solo alla porta d'entrata. Queste sono le cose strane che avvengono quando si idealizza troppo: infiniti componenti e tutti senza perdite. Ciò non toglie che il modello appena esaminato, benché molto idealizzato, possa essere una buona approssimazione di un circuito a scala con un numero grande, ma finito di componenti, per esempio un centinaio, chiuso a destra su una resistenza pari a  $R$ . La risposta all'impulso di un simile circuito, pur essendo composta di sinusoidi smorzate, con diverse pulsazioni (non multiple di una fondamentale), è inizialmente approssimata bene dalla funzione di Bessel, salvo poi smorzarsi, per tempi lunghi, con legge esponenziale e non in modo inversamente proporzionale alla radice quadrata del tempo.

△

▽

**Esempio 3.13** — Gli alimentatori di quasi tutti gli apparecchi elettronici sono basati sul seguente principio: un condensatore viene caricato alla tensione che si vuole mantenere costante e siccome detto condensatore si scarica per la corrente che alimenta l'utilizzatore, o anche semplicemente che scorre nella sua resistenza di perdita, bisogna provvedere a ricaricarlo con prontezza via via che la tensione si allontana da quella desiderata, consentendo però un certo (piccolo) margine di tolleranza. Quando la tensione sul condensatore scende sotto tale margine di tolleranza, viene chiuso un interruttore che connette al condensatore un generatore di tensione che lo ricarica; ma appena la tensione, salendo, raggiunge il valore di taratura (più una piccola tolleranza) l'interruttore viene aperto; successivamente il processo si ripete continuamente fino a quando l'apparecchio non viene spento.

Su questo principio sono basati gli alimentatori reali, ma essi sono corredati di ulteriori dispositivi di vario genere per proteggere l'alimentatore da sovraccarichi, da disturbi impulsivi sulla rete, da dispositivi per ridurre, se non proprio eliminare, i disturbi elettromagnetici, eccetera.

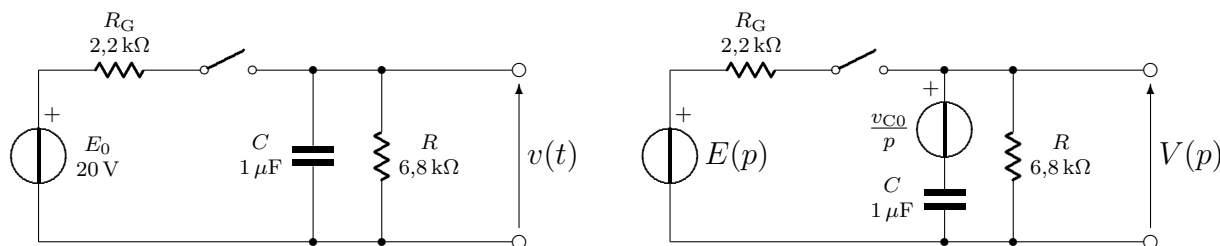
Lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per regolare la tensione di un alimentatore può essere fatto per regolare la temperatura dell'acqua contenuta in un boiler.

In molti appartamenti l'acqua calda è prodotta mediante un boiler elettrico regolato da un termostato. L'acqua contenuta nel boiler ha una certa temperatura rispetto alla temperatura esterna e complessivamente ha una data capacità termica. Il boiler non è perfettamente isolato termicamente verso l'esterno, per cui l'acqua tende a raffreddarsi tanto più rapidamente quanto peggiore è l'isolamento termico, quindi quanto maggiore è la conduttanza termica verso l'esterno; inoltre l'acqua contenuta nel boiler è destinata ad essere prelevata all'esterno, e ciò contribuisce ad abbassare la temperatura interna. Quando la temperatura dell'acqua scende sotto un valore impostato, il termostato chiude un interruttore che permette di alimentare l'elemento riscaldante all'interno del boiler; perché l'acqua non si surriscaldi, appena la temperatura sale di qualche grado oltre il valore impostato, il termostato apre l'interruttore e spegne l'elemento riscaldante.

Come si vede siamo in presenza di una situazione nella quale si potrebbe applicare l'analogia elettrotermica (temperatura  $\leftrightarrow$  tensione, flusso di calore  $\leftrightarrow$  corrente, capacità termica  $\leftrightarrow$  capacità elettrica, conduttanza termica  $\leftrightarrow$  conduttanza elettrica, eccetera). ■

Nella figura 3.24 è riportato il modello elettrico del regolatore di tensione; il generatore di tensione produce una tensione a vuoto superiore a quella che si vuole ottenere come effetto della regolazione; la sua resistenza interna  $R_G$  nell'analogia elettrotermica modella (l'inverso del) la conduttanza termica fra l'elemento riscaldante e la massa d'acqua<sup>12</sup>. ■

<sup>12</sup> E infatti tutti sappiamo che l'elemento riscaldante dei boiler, delle lavabiancheria, delle lavastoviglie, eccetera, prima o poi si brucia per effetto del deposito di calcare; è evidente che lo strato di calcare diminuisce la conduttanza termica, facendo sì che la temperatura dell'elemento riscaldante salga per



**Figura 3.24.** Modello di un regolatore di tensione

Facendo riferimento alla parte di sinistra della figura 3.24 si supponga che la tensione  $v(t)$  sia da stabilizzare fra 10 V e 11 V; questa tolleranza non è tanto piccola come succede negli alimentatori reali, ma è indicata solo a titolo di esempio per ottenere calcoli più semplici; l'interruttore sarà quindi azionato attraverso un comparatore di tensione (non mostrato nella figura) che lo apre quando la tensione è inferiore a 11 V e, crescendo, tenderebbe a oltrepassare quella soglia; invece il comparatore chiude l'interruttore quando la tensione è inferiore a 10 V e quando è inferiore a 11 V ma, decrescendo, tenderebbe a scendere sotto la soglia dei 10 V. Come si vede l'interruttore è aperto quando la tensione è superiore a 11 V, è chiuso quando la tensione è inferiore a 10 V ed è aperto o chiuso a seconda del segno della derivata della tensione quando la tensione è compresa fra le due soglie di 10 V e di 11 V.

Supponiamo di iniziare con il condensatore scarico e di chiudere l'interruttore all'istante  $t = 0$ ; il condensatore si carica con la tensione che sale tendendo a 15,11 V; come raggiunge la soglia degli 11 V, l'interruttore si apre e la tensione ai capi del condensatore scende tendendo a zero, ma come raggiunge la soglia di 10 V l'interruttore si chiude e tutta l'operazione ricomincia.

A stretto rigore la trasformazione di Laplace non potrebbe essere usata, perché il circuito non è a parametri costanti nel tempo, a causa dell'interruttore che ora è aperto ora è chiuso, quindi la sua "resistenza" ora vale infinito, ora vale zero. Anzi, queste variazioni non sono legate a qualche evento esterno al circuito, ma dipendono da una delle tensioni del circuito stesso. Però fra una commutazione e l'altra il circuito è costante e quindi si può applicare la L-trasformata spostando di volta in volta l'origine dei tempi all'istante della commutazione. Ecco perché nella parte di destra della figura 3.24 è indicato il condensatore con il suo generatore di condizioni iniziali, il cui valore corrisponde all'istante prima della commutazione.

Il circuito è abbastanza semplice, tanto che usare la trasformazione di Laplace sembrerebbe eccessivo, tuttavia il metodo che seguiremo ha validità generale.

Senza badare se otteniamo la risposta temporale con o senza trasformazione di Laplace, il primo transitorio di accensione carica il condensatore con una costante di 9 ms partendo da 0 V e tendendo a 15,11 V; la legge di carica è pertanto

$$v(t) = 15,11 \text{ V} \left( 1 - e^{-t/9 \text{ ms}} \right)$$

e raggiunge l'istante di spegnimento a 11 V dopo 11,72 ms.

Spostiamo l'origine dei tempi a questo istante e osserviamo che ora il condensatore si scarica con costante di tempo di 6,8 ms partendo da 11 V e tendendo a 0 V; strada facendo raggiunge il valore di 10 V, e quando ciò succede l'interruttore si chiude di nuovo; la scarica

---

trasferire all'acqua il flusso di energia costante che l'impianto elettrico gli fornisce; quando la sua temperatura sale troppo, il filo resistivo di cui è fatto fonde e diventa necessario sostituire l'intero elemento. Se quelle macchine fossero pensate anche in termini di *qualità della manutenzione* molti spot televisivi perderebbero parte del loro fascino.

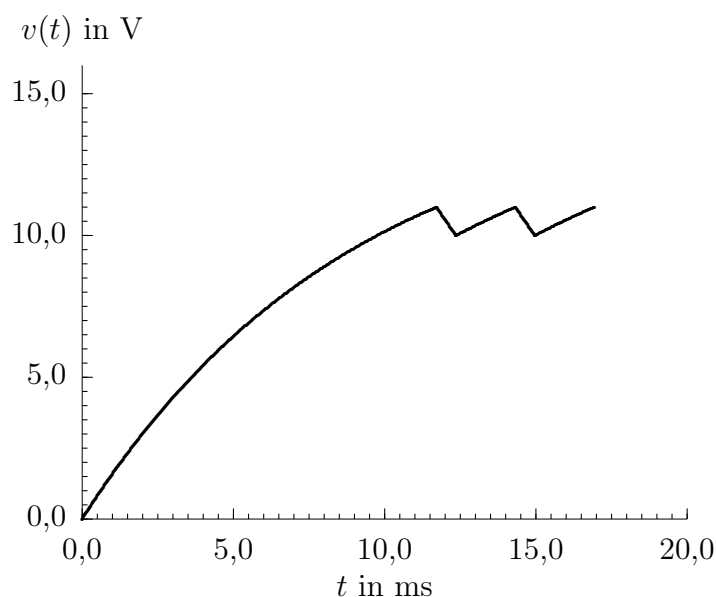
del condensatore avviene con legge

$$v(t) = 11 \text{ V } e^{-t/6,8 \text{ ms}^{-1}}$$

e si raggiunge la soglia di 10 V dopo 0,6481 ms. Chiudendosi nuovamente l'interruttore, comincia una nuova fase di carica; spostiamo l'origine dei tempi a questo istante e notiamo che il condensatore si carica con costante di tempo di 9 ms partendo da 10 V e tendendo a 15,11 V con legge

$$v(t) = 10 \text{ V} + 5,11 \text{ V} \left(1 - e^{-t/9 \text{ ms}}\right)$$

raggiungendo la soglia degli 11 V dopo 1,96 ms. Di qui in avanti la situazione si ripete tale e quale indefinitamente. Quindi dopo un transitorio di 9,76 ms la tensione ai capi del condensatore esegue delle oscillazioni più o meno triangolari, asimmetriche, periodiche, attorno a 10,5 V. I primi pochi cicli sono riportati nella figura 3.25.



**Figura 3.25.** Andamento della tensione ai capi del condensatore

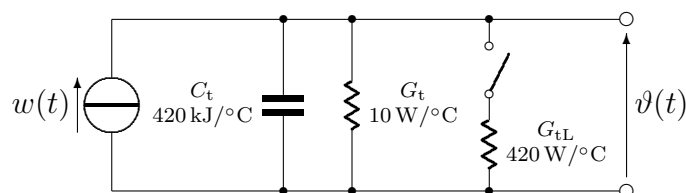
Va da sé che la fascia relativamente ampia della regolazione della tensione comporta anche una frequenza relativamente bassa di commutazione dell'interruttore; tra cicli di apertura e cicli di chiusura il periodo è di 2,608 ms, corrispondente ad una frequenza fondamentale di 383 Hz. Se si volesse una regolazione con un'incertezza 10 volte minore, di 0,1 V, si capisce subito che la frequenza di commutazione aumenterebbe di circa 10 volte; si tratta ancora di frequenze basse per circuiti elettronici, ma sarebbe comunque necessario ricorrere a interruttori elettronici, non a relè o a contatti azionati elettromagneticamente, perché si tratterebbe comunque di frequenze troppo alte per dispositivi elettromeccanici. ■

L'esempio svolto può andare bene come modello di un regolatore di tensione; non certo come regolatore di temperatura. Perché? Non avevamo cominciato col dire che il circuito contenuto nella figura 3.24 poteva rappresentare l'analogo elettrico di un regolatore di temperatura? Sì, avevamo cominciato così, ma ora possiamo sottoporre a critica il modello.

Innanzitutto possiamo constatare che i tempi di commutazione sono troppo brevi per un interruttore termostatico, sostanzialmente un oggetto meccanico; ma questo si spiega bene con il fatto che non abbiamo fatto nessun tentativo per modellare i componenti con valori realistici; la capacità elettrica è l'analogo della capacità termica; ora un boiler da

- 100  $\ell$  ha una capacità termica<sup>13</sup> di circa di 420 kJ/°C, mentre la conduttanza termica può essere dell'ordine di 10 W/°C, con la conseguenza che la costante di tempo (di scarica) è di 42 000 s, pari a 11 ore e 40 minuti. Ciò vuol dire che il boiler, inizialmente in temperatura, scende a circa un terzo del suo valore (della differenza rispetto alla temperatura ambiente) in un periodo di tempo pari a una costante di tempo. L'acqua a 50°C con una temperatura ambiente di 20°C, scende a 30°C in quasi 12 ore, altroché millisecondi. Con una regolazione di qualche grado i tempi di intervento del termostato potrebbero essere di poche decine di minuti.

L'altro elemento che sembra mal modellato è il generatore; nel modello elettrico abbiamo usato un generatore reale di tensione, ma la sorgente di calore in un boiler è un elemento riscaldante la cui temperatura è molto alta e non è influenzata sensibilmente dalla temperatura dell'acqua, ma piuttosto dalla tensione di alimentazione; un elemento riscaldante da 2 kW produce un flusso di energia di 2 kJ/s in modo praticamente indipendente dalla temperatura dell'acqua, per cui esso viene modellato meglio con un generatore di corrente piuttosto che con un generatore di tensione. Con tale generatore la costante di tempo di carica e quello di scarica sono uguali e il *duty cycle* dell'interruttore diventa simmetrico, metà tempo aperto e metà tempo chiuso<sup>14</sup>.



**Figura 3.26.** Regolatore di temperatura; l'elemento riscaldatore genera un flusso di calore di  $w(t) = 2 \text{ kJ/s}$  quando l'interruttore termostatico è chiuso, mentre genera un flusso nullo quando esso è aperto; la conduttanza  $G_{tL}$  modella la conduttanza termica quando è presente un prelievo di acqua calda segnalato dall'interruttore chiuso. La differenza di temperatura rispetto alla temperatura ambiente è indicata con  $\vartheta$  per non usare il simbolo  $t$  già usato per il tempo.

Un'altra importante differenza nel modello, di cui non abbiamo tenuto conto nemmeno nel regolatore di tensione, è il fatto che il prelievo di acqua calda (così come il prelievo di corrente) implica mettere in parallelo al “condensatore” un “conduttore” responsabile della fuoriuscita di una certa potenza, corrispondente alla portata del prelievo di acqua per la sua capacità termica e per la sua temperatura; un prelievo di 0,1  $\ell/\text{s}$  alla temperatura di 50°C, rimpiazzata nel boiler con acqua a 20°C, corrisponde ad un flusso di potenza di circa 12,6 kW (se la temperatura nel boiler si mantenesse a 50°C), tutt'altro che trascurabile! Questo prelievo d'acqua corrisponde ad una conduttanza termica di 420 W/°C. La costante di tempo termica, con un prelievo così importante dal punto di vista termico, corrisponde a poco meno di 1000 s, più precisamente a 16 minuti e 17 secondi, che, nonostante la grandezza del boiler, non consente di terminare una doccia un po' prolungata: in compenso il modello ci permette di calcolare che se il flusso di acqua prelevata continua indefinitamente la poca energia che il riscaldatore fornisce all'acqua fredda in entrata consente di prelevare acqua ad una temperatura un po' superiore a quella ambiente, ma solo di 4,65°C superiore..., cioè di una quantità che consente di fare una doccia abbastanza freddina. Per non fare la doccia fredda con un simile riscaldatore bisogna prelevare meno acqua; dimezzando il prelievo, dimezza la conducibilità termica aggiuntiva e l'aumento di

<sup>13</sup> L'equivalente di una kilocaloria è 4185 kJ.

<sup>14</sup> Con un generatore di corrente, come potrebbe essere modellata la resistenza che aumenta all'aumentare del deposito di calcare?

temperatura diventa di circa  $9^{\circ}\text{C}$ , non molto, ma sufficiente per l'esecuzione di molte docce successive.

Con una dispersione di  $10\text{ W}/^{\circ}\text{C}$  e un riscaldatore da  $2\text{ kW}$  la temperatura di regime, se non intervenisse il termostato, sarebbe di  $200^{\circ}\text{C}$  sopra la temperatura ambiente; quindi, per raggiungere  $50^{\circ}\text{C}$  con una temperatura ambiente di  $20^{\circ}\text{C}$ , senza prelevare acqua calda e con una costante di tempo di  $42\,000\text{ s}$ , il termostato interverrebbe dopo  $6826\text{ s}$  pari a 1 ora e 54 minuti.

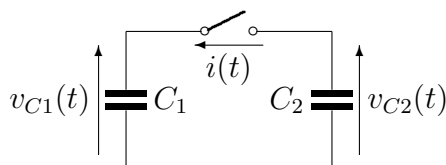
La figura 3.26 mostra circuitalmente e quantitativamente il modello elettrotermico del boiler; di fianco ad ogni componente sono indicati i valori termotecnici citati nel testo. Non è necessario, come si vede, trasformare la capacità termica in capacità elettrica, esprimendola mediante un improbabile valore in farad, né è necessario per gli altri componenti del modello elettrotermico. Conviene ricordare però che gli oggetti identificati con un simbolo che comincia con  $G$  sono conduttanze termiche e vanno trattate alla stessa maniera delle conduttanze elettriche, non come delle resistenze.

Come si vede, nonostante i valori numerici di questo esempio siano stati scelti con buon senso ma anche con una certa approssimazione, i tempi e le temperature che abbiamo calcolato nelle varie situazioni non sono molto diversi da quelli che ognuno di noi può sperimentare a casa propria.

△

▽

**Esempio 3.14** — Consideriamo ora un esempio contenente un circuito degenere e vediamo come la trasformazione di Laplace, grazie alla sua capacità di gestire anche le distribuzioni, sia in grado di darci informazioni che altrimenti sarebbe relativamente difficile trovare per altra via. ■



**Figura 3.27.** Due condensatori inizialmente carichi in parallelo

I due condensatori presenti nella figura 3.14 siano inizialmente carichi alle tensioni rispettive  $v_{C1}(0-) = v_{C10} = 10\text{ V}$  e  $v_{C2}(0-) = v_{C20} = 20\text{ V}$ , e le due capacità valgano rispettivamente  $C_1 = 2,2\text{ }\mu\text{F}$  e  $C_2 = 3,3\text{ }\mu\text{F}$ .

Nel momento in cui l'interruttore viene chiuso si forma una maglia degenere che provoca la formazione di fenomeni “strani”, segnatamente lo svilupparsi di una corrente impulsiva. Se consideriamo il circuito equivalente nel dominio della pulsazione troviamo che la trasformata della corrente vale

$$I(p) = (C_1 \oplus C_2)(v_{C20} - v_{C10}) = 13,2\text{ }\mu\text{As}$$

la cui antitrasformata è un impulso di Dirac

$$i(t) = (C_1 \oplus C_2)(v_{C20} - v_{C10})\delta(t) = 13,2\text{ }\mu\text{As}\delta(t)$$

La presenza di questo impulso è dovuta al fatto che il circuito presenta una maglia degenere; vedremo di approfondire il concetto meglio più avanti (vedi paragrafo A.3), ma intanto osserviamo che nel dominio della pulsazione a interruttore chiuso la maglia è composta

solo da condensatori e generatori ideali di tensione (i generatori delle condizioni iniziali); sarebbe degenerare anche se i generatori fossero spenti. Tuttavia nonostante la degenerazione il metodo simbolico che stiamo usando non se ne è nemmeno accorto e ha consentito di determinare la soluzione senza problemi.

Se analizziamo le tensioni ai capi dei due condensatori dopo la chiusura dell'interruttore troviamo

$$V_{C1}(p) = V_{C2}(p) = \frac{C_1 v_{C10} + C_2 v_{C20}}{p(C_1 + C_2)} = \frac{16 \text{ V}}{p}$$

$$v_{C1}(t) = v_{C2}(t) = \frac{C_1 v_{C10} + C_2 v_{C20}}{C_1 + C_2} u(t) = 16 \text{ V } u(t)$$

con le due tensioni uguali visto che i due condensatori sono collegati in parallelo.

Di nuovo la trasformazione di Laplace ha digerito la discontinuità delle due tensioni prima e dopo l'istante di chiusura dell'interruttore senza praticamente accorgersene.

Vale la pena di esaminare che cosa è successo dell'energia prima e dopo la chiusura dell'interruttore. Prima della chiusura l'energia complessiva contenuta nei due condensatori era

$$\mathcal{W}(t-) = \frac{1}{2} C_1 v_{C10}^2 + \frac{1}{2} C_2 v_{C20}^2 = 770 \mu\text{J}$$

mentre dopo la chiusura l'energia totale vale

$$\mathcal{W}(t+) = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left( \frac{C_1 v_{C10} + C_2 v_{C20}}{C_1 + C_2} \right)^2 = 704 \mu\text{J}$$

Siccome il circuito non contiene resistenze, componenti in grado di dissipare energia, che fine hanno fatto i  $66 \mu\text{J}$  mancanti? Ecco, questo è un punto che la trasformazione di Laplace non riesce a trattare (non è nemmeno suo compito, visto che serve per trattare le equazioni integro-differenziali del sistema e non le relazioni energetiche). Tuttavia non dobbiamo fermarci qui, ma dobbiamo cercare di capire dove sono andati a finire.

Forse la loro sparizione dipende dal fatto che stiamo usando componenti ideali e che questi sono in grado di formare maglie degeneri. Proviamo allora a introdurre una resistenza  $r$  per modellare l'interruttore chiuso insieme a quella dei conduttori di collegamento. Constatiamo subito che il circuito cessa di essere degenero, ma che la corrente è data da

$$I(p) = \frac{v_{C20} - v_{C10}}{r} \frac{1}{p + \frac{1}{r(C_1 \oplus C_2)}}$$

$$i(t) = \frac{v_{C20} - v_{C10}}{r} e^{-t/r(C_1 \oplus C_2)}$$

e si vede benissimo che al tendere di  $r$  a zero il transitorio della corrente tende ad avere ampiezza altissima e durata brevissima, cioè diventa un impulso. L'energia complessiva dissipata nella resistenza durante l'intero transitorio, pari all'integrale della potenza istantanea, vale

$$\mathcal{W}_r = \frac{(C_1 \oplus C_2)(v_{C20} - v_{C10})^2}{2} = 66 \mu\text{J}$$

L'energia totale dissipata durante l'intero transitorio è costituita proprio da quei  $66 \mu\text{J}$  mancanti; ma quello che più interessa è che essi non dipendono dalla resistenza e restano  $66 \mu\text{J}$  anche quando la resistenza tende a zero e la corrente diventa impulsiva.

△

### 3.6 Commenti

Si potrebbe continuare con altri esempi, ma quelli qui esposti consentono di estrapolare alcune regole operative che trascendono i singoli esempi ed hanno validità generale.

1. Ogni circuito lineare concentrato e tempo-invariante può essere descritto direttamente nel dominio della pulsazione:
  - ▷ da un “circuito equivalente” ottenuto sostituendo i generatori indipendenti di tensione e di corrente con generatori dello stesso tipo che generano le L-trasformate delle tensioni e delle correnti;
  - ▷ sostituendo tutte le risposte in tensione e in corrente con le L-trasformate delle risposte;
  - ▷ sostituendo gli induttori semplici e accoppiati e i condensatori con i loro modelli equivalenti riportati nelle figure 3.1–3.4;
  - ▷ trattando il circuito così ottenuto con le stesse regole usate per i circuiti resistivi al fine di ottenere le funzioni di trasferimento o le trasformate delle risposte, per poi eventualmente antitrasformarle.
2. Le funzioni di trasferimento, così come i transitori dovuti alle condizioni iniziali presenti nei componenti con memoria, possono essere determinate per sovrapposizione degli effetti prodotti dalle eccitazioni esterne con quelli prodotti dai generatori delle condizioni iniziali.
3. Le amplificazioni, così come le impedenze e le ammettenze proprie o mutue, possono essere determinate come rapporti fra le trasformate delle opportune eccitazioni e delle opportune risposte; queste stesse funzioni di trasferimento calcolate per  $p = j\omega_0$  o per  $p = p_0$  rispettivamente in regime sinusoidale o in regime cisoidale consentono di trovare le risposte isomorfe con le eccitazioni di pulsazione rispettivamente per  $p = j\omega_0$  o per  $p = p_0$ . Lo stesso ovviamente vale per il caso particolare del regime stazionario, corrispondente a  $p = 0$ .
4. Le risposte di regime a eccitazioni periodiche non sinusoidali possono essere determinate in modo un poco più complesso, ma ancora abbordabile.
5. Con un po’ di pazienza si possono trattare anche sistemi non lineari a tratti, o costanti a tratti, ottenendo le risposte temporali mediante una sequenza di analisi, in ciascuna delle quali bisogna determinare gli istanti in cui cambia il modello lineare del circuito e le condizioni “finali” di ogni tratto di evoluzione dinamica, che costituiscono le condizioni iniziali del tratto successivo.
6. I circuiti che presentano qualche degenerazione solitamente non danno problemi anche se presentano risposte impulsive o discontinuità; questa affermazione non è sempre valida, però, perché la topologia del circuito potrebbe introdurre degenerazioni non trattabili nemmeno con la trasformata di Laplace<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Un circuito potrebbe essere così degenere da ammettere infinite soluzioni; per esempio una semplice maglia formata da due generatori ideali di tensione: se le tensioni impresse sono diverse, la maglia è percorsa da una corrente infinita; se le tensioni impresse sono uguali e contrapposte, la corrente che circola nella maglia è indeterminata, nel senso che la maglia può essere percorsa da una corrente qualsiasi.

### 3.7 Significato fisico degli zeri e dei poli

Le quantità che sono risultate di maggiore interesse nell'uso delle trasformate e delle antitrasformate sono gli zeri e i poli delle funzioni di trasferimento, in particolare questi ultimi. I poli delle funzioni sono la chiave di volta per sapere qual è il dominio di convergenza, per sapere se si può applicare il teorema del valore iniziale al fine di ottenere un'informazione essenziale nell'analisi dei circuiti, per sapere se si può applicare il teorema del valore finale al fine di ottenere un'altra informazione essenziale e, infine, per eseguire la scomposizione in fratti semplici onde ottenere l'antitrasformata con pochissimo sforzo.

Ma tutte queste sono proprietà essenzialmente matematiche, con pochi legami con l'aspetto fisico dei circuiti, tranne un poco nella questione riguardante i valori iniziali e finali.

Vale la pena di generalizzare quanto trovato negli esempi descritti nei paragrafi precedenti. Dato un sistema lineare, concentrato, tempo-invariante, eccitato con un'eccitazione  $e(t)$  e con gli elementi con memoria inizialmente carichi, una qualunque risposta  $r(t)$  risulta dalla sovrapposizione degli effetti prodotti dall'eccitatore e dai generatori delle condizioni iniziali, tanto che la relazione fra le trasformate di Laplace è

$$R(p) = H(p)E(p) + G(p) \quad (3.6)$$

dove  $H(p)$  è la funzione di trasferimento fra l'eccitatore e il misuratore della risposta e rappresenta anche la trasformata della risposta all'impulso unitario, mentre  $G(p)$  rappresenta l'effetto complessivo provocato dalle condizioni iniziali; antitrasformando si ottiene

$$r(t) = \int_{0-}^t e(\tau)h(t-\tau) d\tau + g(t) \quad (3.7)$$

dove  $g(t)$  rappresenta l'effetto temporale provocato dalle condizioni iniziali, mentre l'altro termine del secondo membro rappresenta l'integrale particolare causato dall'eccitazione.

- Il termine  $g(t)$  prende il nome di *risposta libera*, mentre l'altro termine prende il nome di *risposta forzata*.

Rifacendosi alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, il secondo addendo è la soluzione dell'equazione omogenea associata, mentre il primo termine è un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Il bello della soluzione ottenuta con le trasformate è che le costanti contenute nella soluzione dell'omogenea associata e lo specifico integrale particolare già si accordano in modo da soddisfare ai vincoli imposti dalle condizioni iniziali, anche nel caso che all'istante  $t = 0$  si manifesti una discontinuità o un fenomeno impulsivo.

Il primo termine dell'equazione (3.7) ha un'interpretazione fisica interessante; esso rappresenta la sovrapposizione degli effetti di infiniti piccoli impulsi. L'eccitazione  $e(t)$  può essere "affettata" in infinite strisciole verticali adiacenti di larghezza  $d\tau$ , ognuna con lo spigolo sinistro della base collocato in  $t = \tau$ , così che ognuna ha un'area  $e(\tau) d\tau$ ; ognuna di queste strisciole è approssimabile con un impulso di Dirac all'istante  $t = \tau$ :  $e(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$ ; se sommiamo i contributi di questi infiniti piccoli impulsi otteniamo

$$\int_{0-}^{\infty} e(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = e(t)$$

Se ora ciascuno di questi piccoli impulsi, passando attraverso il circuito, produce una risposta all'impulso

$$e(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

la sovrapposizione di tutti i loro effetti è appunto

$$\int_{0-}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

dove l'estremo superiore di integrazione può essere sostituito semplicemente con  $t$ , visto che per  $\tau > t$  la risposta all'impulso è identicamente nulla.

È davvero identicamente nulla? Sì, certo, non l'abbiamo mai detto perché la cosa è del tutto ovvia, ma i sistemi fisici con cui stiamo trattando sono *causali*, cioè rispondono ad un'eccitazione ricevuta, non rispondono in anticipo ad un'eccitazione che verrà; non sono predittivi, appunto, ma sono causali.

In altre discipline si studiano anche sistemi ideali, molto ideali, che hanno la capacità di essere predittivi, ma poi nelle applicazioni bisogna fare i conti con la realtà e bisogna scendere a patti, accontentandosi di realizzare strumenti che si avvicinino il più possibile ai dispositivi ideali e accettando le necessarie deviazioni dovute al fatto che i dispositivi reali sono causali (vedi paragrafo A.4).

Ovviamente lavorando con la trasformata di Laplace monolatera non viene nemmeno in mente che una trasformata possa riferirsi a qualcosa che è diverso da zero prima dell'istante iniziale; ciò si può ipotizzare con la trasformata bilatera e con la trasformata di Fourier, ma non con la trasformata monolatera; al massimo tutto il passato è concentrato nelle condizioni iniziali, ma antitrasformando otteniamo solo la risposta per  $t > 0$ . Ciò implica che perché un sistema sia causale, la trasformata della sua risposta all'impulso deve esistere nel semipiano a destra dell'ascissa di convergenza. La corrispondente funzione analitica non può avere poli collocati arbitrariamente, né altre singolarità in posizioni arbitrarie.

L'esistenza dunque della trasformata di Laplace della risposta all'impulso nel semipiano destro  $\sigma > 0$  è la *condizione di causalità*.

Un'altra osservazione che deriva dagli esempi svolti, ma non sarebbe difficile dimostrare di essere di validità generale, è che i poli di  $H(p)$  e di  $G(p)$ , salvo (improbabili) semplificazioni, sono coincidenti. Le semplificazioni di fattori sono abbastanza rare, ma si verificano più spesso di quanto non si possa immaginare, tuttavia si può affermare che se  $G(p)$  è riferita ad un insieme qualunque di condizioni iniziali le semplificazioni non hanno luogo; esse possono avere luogo con un insieme *particolare* di condizioni iniziali, ma non con un insieme *qualunque*.

### 3.7.1 Significato fisico dei poli

Perciò esaminare il significato fisico dei poli della trasformata della risposta all'impulso è equivalente ad esaminare il significato fisico dei poli della risposta libera.

Sia dunque

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^m (p - p_k)^{n_k}}$$

la trasformata della risposta libera, che nei circuiti in esame è rappresentata da una funzione razionale a coefficienti reali della pulsazione complessa  $p$ ; essa compare anche scomposta in fattori e presenta  $m$  poli distinti  $p_k$  ognuno con molteplicità  $n_k$ . Si noti che le condizioni iniziali che danno luogo a  $G(p)$  intervengono sul numeratore come pesi di vari addendi, mentre il denominatore dipende solo dal circuito. L'affermazione che con particolari condizioni iniziali possono esserci delle cancellazioni di termini comuni fra

numeratore e denominatore, è legata appunto al fatto che cambiando le condizioni iniziali, si spostano gli zeri, non i poli, finché eventualmente uno o più zeri vanno a coincidere con altrettanti poli. Con condizioni iniziali qualunque questo fatto non succede. Resta però stabilito che le condizioni iniziali influiscono sugli zeri, mentre i poli sono caratteristici del circuito.

▽

**Esempio 3.15** — Riprendendo l'esempio 3.14, se le condizioni iniziali sono tali che

$$C_1 v_{C10} + C_2 v_{C20} = 0$$

benché i condensatori siano inizialmente carichi, il transitorio della tensione sui due condensatori è esattamente nullo

$$v_{C1}(t) = v_{C2}(t) = 0$$

mentre il transitorio della corrente non è affatto nullo, ma si manifesta un impulso di Dirac, ovviamente di ampiezza diversa da quella ottenuta nell'esempio citato.

Il polo nell'origine invece permane, indipendentemente dalle condizioni iniziali, anche se il suo residuo è nullo quando le condizioni iniziali sono così particolari. In matematica si direbbe che con un residuo nullo, il polo è solo apparente; nella teoria dei sistemi si usano definizioni più adeguate per distinguere i poli che non possono essere “attivati” comunque si ecciti il sistema, da quelli che appaiono “disattivati” perché non compaiono nella risposta.

△

La risposta  $g(t)$  si ottiene antitrasformando e seguendo lo stesso procedimento che ha portato alle equazioni (2.22)–(2.24); quanto si ottiene è una somma di termini, ognuno dei quali associato a una singolarità; tralasciamo i poli all'infinito, che comunque contribuiscono solo con termini che hanno significati operativi, come la distribuzione di Dirac e le sue derivate e che non si presentano nella risposta libera, mentre si possono presentare nella risposta all'impulso<sup>16</sup>. Tralasciamo anche la costante presente in quelle equazioni, in particolare nell'equazione (2.22), perché anche questa si manifesta solo in situazioni degeneri (vedi esempio 3.14; tuttavia la sua antitrasformata è semplicemente un impulso).

Rimangono i contributi dei poli reali e complessi, semplici o multipli che possono essere raggruppati così

$$g(t) = c_0 \delta(t) + \sum_{k=1}^m e^{p_k t} q_{n_k-1}(t) \quad (3.8)$$

ricordando che, se  $p_k$  è complesso, la sommatoria contiene anche il contributo del polo complesso e coniugato (con la medesima molteplicità) così che nella somma totale le componenti immaginarie degli addendi complessi si elidono a vicenda e restano solo le componenti reali. Inoltre ogni esponenziale risulta moltiplicata per un polinomio di grado esattamente uguale alla molteplicità diminuita di un'unità. I polinomi  $q_{n_k-1}(t)$  dipendono dal circuito e dalle condizioni iniziali, mentre i poli  $p_k$  dipendono solo dal circuito.

I singoli termini della somma 3.8 si chiamano *modi propri di oscillazione* e, visto

<sup>16</sup> La risposta libera non opera su niente, mentre la risposta all'impulso opera sulla generica eccitazione mediante l'integrale di convoluzione presente nella soluzione generale (3.7).

che sono univocamente determinati dai poli, questa dizione si estende anche agli stessi poli, sia pure con un'estrapolazione linguistica forse eccessiva.

Certo è che i poli individuano i modi propri di oscillazione e ne determinano le caratteristiche; modi oscillanti, smorzati, costanti, esponenziali, cisoidali, con ampiezze crescenti, calanti; sono tutte caratteristiche che derivano dai soli poli, in particolare dal segno di  $\sigma_k$ , dal valore di  $\omega_k$  e dal modulo di  $p_k$ .

### 3.7.1.1 Polo di un sistema del primo ordine

Come più volte precisato, il significato fisico dei poli è lo stesso sia che lo si esamini analizzando la risposta libera sia che lo si esamini analizzando la risposta all'impulso.

Per i sistemi del primo ordine questa osservazione permette di ricavare immediatamente la regola per la determinazione dell'unico polo; basta esaminare la risposta libera con l'unico elemento reattivo inizialmente carico, con tutti i generatori indipendenti spenti, e con tutta la restante parte del circuito, formata solo da componenti inerti e ridotta ad un solo bipolo "resistivo" sostituita dalla resistenza equivalente. L'unico polo è dato dall'opposto dell'inverso dell'unica costante di tempo. ■

▽

**Esempio 3.16** — Per determinare l'unico polo della funzione di trasferimento del circuito della figura 3.28

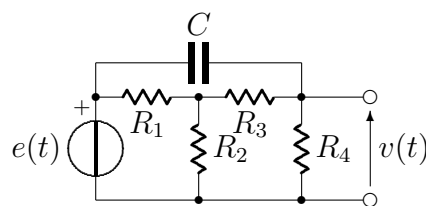
$$H(p) = \frac{V(p)}{E(p)}$$

basta spegnere il generatore di tensione, che così viene a comportarsi come un cortocircuito, e calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti del condensatore; si ricava a vista

$$R_{eq} = R_4 \oplus [R_3 + (R_2 \oplus R_1)]$$

per cui l'unico polo si trova in

$$p_p = -\frac{1}{CR_{eq}}$$



**Figura 3.28.** Sistema del primo ordine

Trovato però l'unico polo, per le funzioni del primo ordine diventa immediato determinare tutta la funzione eseguendo pochi altri calcoli in regime stazionario, o, come si dice in gergo, *in continua* e/o a frequenza elevatissima (infinita). ■

Infatti la funzione di primo grado è necessariamente della forma

$$H(p) = \frac{Ap + B}{p - p_p}$$

e per determinare la funzione basta determinare quanto valgono  $A$  e  $B$ ; per determinare  $A = H(\infty)$  basta vedere come si comporta il circuito a frequenza infinita; in questo

esempio, dove il generatore  $e(t)$  è collegato al terminale superiore del voltmetro con un condensatore che a frequenza infinita si comporta come un cortocircuito, è immediato constatare che

$$A = H(\infty) = 1$$

Per determinare  $B$  basta controllare come si comporta il circuito in continua; a frequenza nulla il condensatore si comporta come un circuito aperto, quindi il rapporto fra  $v$  ed  $e$  è quello del doppio partitore formato dalle quattro resistenze della figura

$$H(0) = \frac{1}{1 + R_1 G_2 + R_1 G_4 + R_3 G_4 + R_1 R_3 G_2 G_4}$$

per cui è

$$B = -p_p H(0)$$

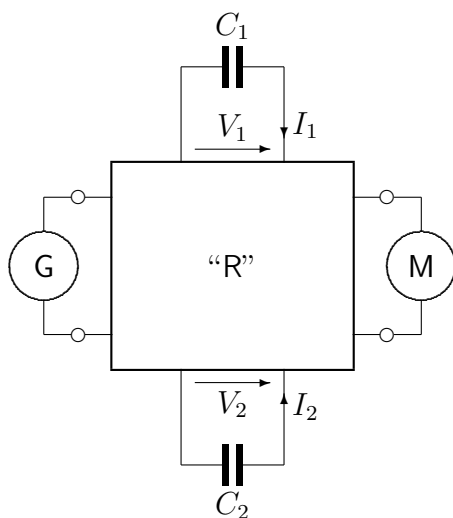
In lettere le espressioni possono diventare piuttosto elaborate, ma numericamente si tratta di eseguire operazioni elementari.

△

### 3.7.1.2 Poli di un sistema del secondo ordine

Anche per i poli di un sistema di secondo ordine si può esaminare la risposta libera invece della risposta all'impulso; la situazione però può essere molto più elaborata. Il principio è lo stesso: si considerano spenti tutti i generatori indipendenti e si assumono inizialmente carichi gli unici due componenti con memoria del circuito; salvo casi degeneri, che non consideriamo, i componenti con memoria indipendenti non possono essere più di due; se ce ne sono di più essi devono formare delle maglie o dei tagli patologici, quindi escludiamo queste situazioni.

Così facendo, supponiamo, senza pregiudizio per la generalità dei ragionamenti che seguono, che i due componenti con memoria siano due condensatori, come indicato nella figura 3.29; potrebbero essere due induttori o un induttore e un condensatore; i ragionamenti che seguono sarebbero accompagnati da espressioni matematiche leggermente diverse, ma le conclusioni sarebbero del tutto simili.



**Figura 3.29.** Circuito del secondo ordine

Il generatore indipendente  $G$  deve venire spento; il misuratore  $M$  è un componente inerte corrispondente a un cortocircuito (amperometro) o a un circuito aperto (voltmetro) e tale va considerato. I due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  vanno considerati inizialmente carichi; ai morsetti fra i quali essi sono connessi il resto del circuito, comprendente i cortocircuiti o i circuiti aperti corrispondenti al generatore e al misuratore, privo di memoria, si comporta come un doppio bipolo “resistivo”, governato cioè da equazioni alle porte puramente algebriche. Nel capitolo 5 vedremo più dettagliatamente quanto concerne i doppi bipoli; qui ci possiamo accontentare di supporre che le equazioni costitutive del doppio bipolo riferite alle variabili descrittive  $V_1$ ,  $V_2$  e  $I_1$ ,  $I_2$  siano le seguenti

$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{cases}$$

senza nessuna particolare ipotesi sulle proprietà delle quattro conduttanze  $G_{ij}$ , salvo quella che siano espresse da grandezze costanti (ovviamente) e finite.

A loro volta, badando che ora le correnti sono uscenti, i due condensatori hanno le loro equazioni costitutive date dalle seguenti espressioni riferite alle stesse variabili descrittive  $V_1$ ,  $V_2$  e  $I_1$ ,  $I_2$

$$\begin{cases} -I_1 = pC_1V_1 - C_1v_{10} \\ -I_2 = pC_2V_2 - C_2v_{20} \end{cases}$$

dove  $v_{10}$  e  $v_{20}$  rappresentano le tensioni iniziali. Unendo le equazioni suddette ed eliminando le correnti, rimane

$$\begin{cases} (pC_1 + G_{11})V_1 + G_{12}V_2 = C_1v_{10} \\ G_{21}V_1 + (pC_2 + G_{22})V_2 = C_2v_{20} \end{cases} \quad (3.9)$$

Il denominatore comune alle due risposte libere è dato dal determinante dei coefficienti del sistema (3.9) e i poli ne sono le radici

$$(pC_1 + G_{11})(pC_2 + G_{22}) - G_{12}G_{21} = 0 \quad (3.10)$$

Prima di risolvere il polinomio (3.10) conviene fare alcune considerazioni di carattere fisico; non stiamo svolgendo degli sviluppi matematici per divertirci, ma per trarre delle conclusioni di carattere fisico in merito agli oggetti matematici che sono i poli, oggetti che identificano e caratterizzano i modi propri di oscillazione di un sistema fisico.

1. Se  $G_{12} = 0$  e/o se  $G_{21} = 0$  il circuito è unilaterale fra le porte che connettono i due condensatori; il circuito non è necessariamente unilaterale *anche* fra le porte a cui sono connessi il generatore e il misuratore, ma lo è fra le porte a cui sono connessi i condensatori. In questa situazione ciascun condensatore non “vede” l’altro e non può avere un comportamento diverso da quello che avrebbe se fosse da solo nel circuito. I due poli, soluzioni dell’equazione (3.10), sono indipendenti l’uno dall’altro e possono essere calcolati come nel caso del paragrafo precedente, cioè calcolando la resistenza equivalente vista da ciascuno dei due condensatori, poi calcolando ciascuna costante di tempo e infine ricavando ciascun polo. In questo caso si dice che i poli sono *eletttricamente disaccoppiati*.
2. Se entrambi i valori  $G_{12}$  e  $G_{21}$  sono diversi da zero, le due porte a cui sono connessi i condensatori sono eletttricamente accoppiate e ogni condensatore influenza il comportamento dell’altro. Perciò i due poli sono accoppiati e la loro determinazione

implica la soluzione dell'equazione di secondo grado (3.10).

3. Tuttavia se il prodotto  $G_{12}G_{21}$  è trascurabile rispetto al prodotto  $G_{11}G_{22}$ , l'influenza dell'accoppiamento elettrico fra le porte è trascurabile e i poli possono essere determinati come se ogni condensatore agisse per suo conto. In questo caso si dice che i poli sono *numericamente disaccoppiati*. In condizioni effettive si considerano numericamente disaccoppiati poli che stiano fra loro in rapporto superiore a 10; in queste condizioni il loro calcolo mediante la formula esatta (3.10) porta a discrepanze dell'ordine di qualche centesimo, in genere del tutto trascurabili, tali da giustificare il calcolo assai più semplice eseguito come se i poli fossero elettricamente disaccoppiati.

Poiché le funzioni di trasferimento fra porte diverse sono in genere più complicate da calcolare che non le resistenze proprie, l'equazione (3.10) può essere elaborata un poco mediante l'ausilio delle formule dei doppi bipoli raccolte nella tabella 5.1. Cambiando un poco i simboli, ponendo cioè

$R_{1a}$  resistenza alla porta 1 con la porta 2 aperta

$R_{1c}$  resistenza alla porta 1 con la porta 2 in cortocircuito

$R_{2a}$  resistenza alla porta 2 con la porta 1 aperta

$R_{2c}$  resistenza alla porta 2 con la porta 1 in cortocircuito

i poli esatti possono essere calcolati usando l'una *oppure* l'altra delle seguenti equazioni

$$C_1 C_2 R_{1a} R_{2c} p^2 + (R_{1a} C_1 + R_{2a} C_2) p + 1 = 0 \quad (3.11a)$$

$$C_1 C_2 R_{2a} R_{1c} p^2 + (R_{1a} C_1 + R_{2a} C_2) p + 1 = 0 \quad (3.11b)$$

- che richiedono solamente l'uso e il calcolo di tre resistenze proprie. Quando sono presenti generatori controllati, e in elettronica sono sempre presenti, l'uso dell'una o dell'altra equazione (3.11), se non può essere evitato perché i poli sono elettricamente o numericamente disaccoppiati, è il miglior compromesso che si possa trovare per risparmiare tempo e fatica.

Esistono formule simili alle equazioni (3.11) per generare i coefficienti dei polinomi di terzo, quarto, ... grado per i sistemi di terzo, quarto, ... grado. Non ritengo che siano utili in pratica, perché richiedono il calcolo di un gran numero di resistenze per arrivare poi a polinomi di grado moderatamente o decisamente elevato che vanno in effetti risolti numericamente; allora tanto vale descrivere il circuito in modo che programmi come PSpice [3] eseguano tutti i calcoli. Se si riesce a fare una stima di buon senso in anticipo, tanto meglio, almeno si sanno valutare i dati forniti da PSpice con cognizione di causa.

### 3.7.2 Significato fisico degli zeri

Il significato fisico degli zeri di ogni funzione di trasferimento è allo stesso tempo più semplice e più complicato che il significato fisico dei poli.

- Per ogni zero di trasmissione (ogni zero della funzione di trasmissione) esiste un'ecitazione cisoidale per la quale la componente isomorfa della risposta è nulla. La risposta *non è nulla*, è nulla solo la componente isomorfa.

Versione del 3 ottobre 2001

Abbiamo già visto nell'esempio 3.6 che la componente isomorfa della risposta ad un'eccitazione  $E_0 e^{p_0 t}$  vale

$$r(t) = \mathbf{Re} \left[ E_0 H(p_0) e^{p_0 t} \right]$$

Se  $p_0$  è uno zero di  $H(p)$ , allora la componente isomorfa della risposta è nulla.

Questa è la parte più semplice; la parte più complicata da capire è che la risposta complessiva non è nulla affatto, ma è composta dal transitorio di accensione sovrapposto alla eventuale risposta libera. Per avere davvero una risposta completamente nulla dovremmo scegliere le condizioni iniziali in modo tale da compensare esattamente i termini del transitorio di accensione. Questo non è impossibile e, visto che i modi propri e i poli della funzione di trasferimento coincidono, si tratta di scegliere le condizioni iniziali in modo tale da compensare i residui nei corrispondenti poli o in modo da compensare tutti i corrispondenti addendi negli sviluppi in fratti semplici della parte derivante dalla risposta forzata con quelli derivanti dallo sviluppo della risposta libera. Si tratta di un esercizio di algebra privo di qualunque utilità pratica; la cosa importante non è che l'uscita sia completamente nulla, ma che sia nulla la componente isomorfa.

È chiaro che se uno zero giace sull'asse  $\omega$  l'eccitazione che dovremmo usare dovrebbe essere una semplice senoide, che ci consente di osservare il regime sinusoidale per un tempo illimitato, quindi anche quando si è estinto il transitorio di accensione; in quel caso e solo in quel caso possiamo osservare la sola componente isomorfa della risposta e in quel caso e solo in quel caso la risposta del circuito è nulla (dopo che si è estinto il transitorio di accensione). Questo fatto mette ancora più in evidenza la difficoltà di capire appieno il significato delle eccitazioni non sinusoidali e delle corrispondenti risposte isomorfe, ma non sposta di una virgola il significato fisico degli zeri delle funzioni di trasferimento.

### 3.8 Risposta libera e risposta forzata da un impulso

Come si è già detto, si vuole qui ribadire il legame intimo fra la risposta libera e la risposta all'impulso unitario; le due risposte sono formate dagli stessi modi propri di oscillazione, salvo che la risposta all'impulso può contenere anche qualche distribuzione impulsiva che manifesta i suoi effetti all'istante  $t = 0$ , mentre la risposta libera normalmente ne è priva. Tutti gli altri modi propri coincidono, salvo eventuali semplificazioni di fattori.

La risposta all'impulso, che non dipende dalle condizioni iniziali, ma dipende esclusivamente dal circuito, normalmente non presenta semplificazioni; tuttavia questa affermazione deve essere presa con una certa cautela, visto che l'esempio 3.8 mostra chiaramente alcuni casi in cui anche la risposta all'impulso risulta semplificata ed è di grado inferiore a quello che ci si potrebbe aspettare; ma quelli sono appunto casi degeneri sui quali vale la pena di indagare più a fondo (vedi paragrafo A.3).

▽

**Esempio 3.17** — Una induttanza è inizialmente carica, cioè inizialmente percorsa da una corrente  $i_0 = i_L(0-)$ ; quando viene aperto il circuito manifesta un transitorio di tensione costituito da un impulso<sup>17</sup> di Dirac di ampiezza  $Li_0$ . Se la stessa induttanza fosse eccitata con un impulso di corrente  $Q_0 \delta(t)$  risponderebbe con una tensione la cui

<sup>17</sup> È quell'impulso che percepiamo come una brevissima scossa elettrica quando apriamo un circuito toccandone qualche punto con le dita; i circuiti reali hanno sempre una componente induttiva, non fosse altro che l'induttanza parassita, perciò quando si apre un circuito si manifesta sempre un transitorio

trasformata vale  $LQ_0p$  e la cui antitrasformata non è altro che la derivata dell'impulso di Dirac; se l'esperimento viene eseguito con un impulso di corrente reale, brevissimo, ma prima crescente e poi calante, l'induttanza risponderebbe con due impulsi di tensione reali ravvicinatissimi, il primo positivo e il secondo negativo.

△

In linea di principio si potrebbero costruire circuiti attivi il cui comportamento linearizzato potrebbe presentare risposte all'impulso che presentano poli all'infinito di qualunque molteplicità (finita), ma i circuiti reali, che non potrebbero più funzionare in regime di piccole variazioni e quindi non potrebbero più essere considerati lineari, andrebbero rapidamente in saturazione e si comporterebbero in modo ben diverso da quanto la teoria che stiamo sviluppando prevederebbe.

Tuttavia, a livello teorico, le caratteristiche della risposta all'impulso permettono di definire alcune importanti limitazioni alla posizione dei poli; queste limitazioni costituiscono le *condizioni di stabilità*.

### 3.9 Risposta all'impulso e condizioni di stabilità

In pratica è ragionevole assumere che una funzione di trasferimento presenti all'infinito un polo al massimo del primo ordine, con un po' di sforzo del secondo ordine (sono noti e utilizzati il *superinduttore*, che ha un'impedenza proporzionale a  $p^2$ , e il *supercondensatore*, che ha un'ammettenza proporzionale a  $p^2$ .); qualunque sia l'ordine, però, la stabilità della risposta all'impulso non pone nessun limite a questa molteplicità.

Ciò premesso, la trasformata della risposta all'impulso sarebbe

$$H(p) = c_2p^2 + c_1p + c_0 + \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^m (p - p_k)^{n_k}}$$

con il polinomio  $N(p)$  di grado inferiore a quello del suo denominatore e, nel dominio del tempo, l'antitrasformata vale

$$h(t) = c_2\delta''(t) + c_1\delta'(t) + c_0\delta(t) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^m e^{p_k t} q_{n_k-1}(t) \right] \quad (3.12)$$

- Il circuito si dice *asintoticamente stabile* se per ogni valore di  $k$  è  $\sigma_k < 0$ ; si vede chiaramente che tutti i modi propri eccitati dall'impulso unitario si smorzano e tendono tutti asintoticamente a zero quanto il tempo tende a infinito.
- Il circuito, invece, si dice *Liapunov stabile* se:
  1. per nessun  $k$  esiste un polo con  $\sigma_k > 0$ ,
  2. è  $n_k = 1$  per tutti i poli per i quali è  $\sigma_k = 0$ ,

e si vede chiaramente che in queste condizioni alcuni poli danno luogo a modi propri che tendono a zero quando il tempo tende all'infinito, mentre alcuni altri modi, quelli collegati ai poli sull'asse  $\omega$ , hanno comportamenti sinusoidali di ampiezza limitata.

- In ogni altro caso, anche quando un solo polo fosse nel semipiano di destra, il circuito si dice *instabile*; in questo caso infatti il circuito non potrebbe restare indefinitamente

impulsivo. In applicazioni di potenza, dove questi transitori di apertura possono essere piuttosto violenti,

Versione del 3 ottobre 2001

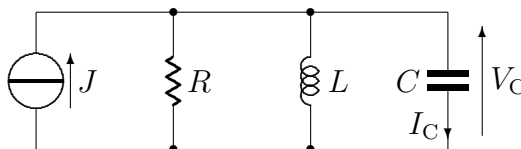
nello stato di riposo; o meglio, un circuito ideale potrebbe, ma un circuito reale non potrebbe, perché esso sarebbe come minimo sede dell'agitazione termica degli elettroni e questa agitazione corrisponderebbe ad un sia pur piccolo segnale che impedirebbe al circuito di mantenersi nello stato di riposo; ma appena il circuito esce dallo stato di riposo, ogni modo proprio con polo avente parte reale positiva darebbe luogo ad una risposta cisoidale crescente, la quale tenderebbe ad aumentare indefinitamente finché non sono più valide le ipotesi di linearità; il circuito allora saturerebbe, oppure si autodistruggerebbe.

Sono rare le occasioni in cui si desidera progettare circuiti instabili, un'importante eccezione essendo costituita dagli oscillatori; in questi casi si fa di tutto affinché il circuito non si autodistrugga, ma compia oscillazioni di ampiezza e forma controllata. La risposta a dente di sega mostrata nella figura 3.25, relativa al regolatore di tensione, può essere interpretata come l'uscita di un oscillatore a dente di sega (compreso il suo transitorio di accensione), oscillatore che fa parte della categoria degli oscillatori a rilassamento.

## Esercizi

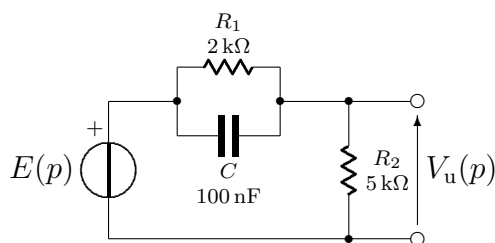
**3.1 Confronto fra metodi diversi** Nel circuito della figura E-3.1 si determini la tensione ai capi del condensatore usando

- la formula del partitore di corrente per determinare la corrente  $I_C$  e poi l'equazione costitutiva del condensatore [3 min];
- la legge di Ohm espressa in termini di ammettenze [3 min].



**Figura E-3.1.** Per l'esercizio 3.1

**3.2 Partitore di tensione** Calcolare l'espressione letterale e numerica del rapporto di tensioni  $V_u/E$  relativo al circuito della figura E-3.2. Commentare il risultato in base a ragionamenti fisici. [4 min]

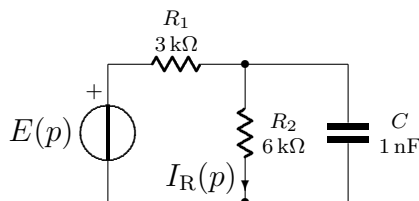


**Figura E-3.2.** Per l'esercizio 3.2

si cerca di "limitare i danni" lasciando che l'induttanza si scarichi su opportuni componenti, spesso costituiti da diodi.

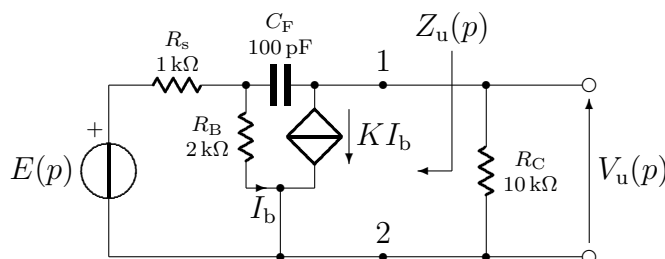
Versione del 3 ottobre 2001

**3.3 Transammettenza** Determinare in base a considerazioni fisiche la transammettenza  $I_R(p)/E(p)$  nel circuito della figura E-3.3. [4 min]



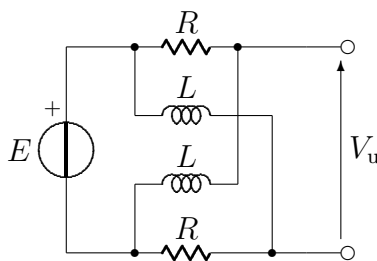
**Figura E-3.3.** Per l'esercizio 3.3

**3.4 Equivalente di Norton** Calcolando l'equivalente di Norton ai morsetti 1-2 del circuito della figura E-3.4, determinare l'amplificazione di tensione  $V_u(p)/E(p)$  e l'impedenza di uscita  $Z_u(p)$ ; l'amplificazione di corrente sia  $K = 100$ . [14 min]



**Figura E-3.4.** Per l'esercizio 3.4

**3.5 Funzione di trasferimento di un circuito a ponte** La figura E-3.5 mostra un circuito a ponte; determinare l'amplificazione di tensione  $V_u/E$ . [4 min]

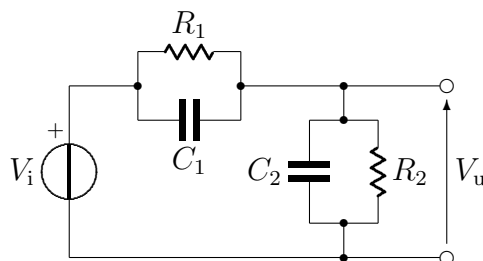


**Figura E-3.5.** Per l'esercizio 3.5

**3.6 Partitore compensato** Il circuito della figura E-3.6 rappresenta un partitore nel quale sono presenti sia resistori sia condensatori; determinare quale relazione deve esistere fra i condensatori e i resistori affinché il partitore sia compensato, cioè affinché il rapporto di partizione non dipenda dalla pulsazione.

Si supponga di applicare al partitore una tensione  $V_i$  a gradino; si tracci qualitativamente l'andamento della tensione  $V_u(t)$  nei due casi in cui sia verificata o non sia verificata la condizione di compensazione. [10 min]

**3.7 Circuito con trasconduttore** Il circuito della figura E-3.7 può essere analizzato in modo efficiente se si ricorre ai metodi già visti per altri esercizi più semplici, e cioè



**Figura E–3.6.** Per l'esercizio 3.6

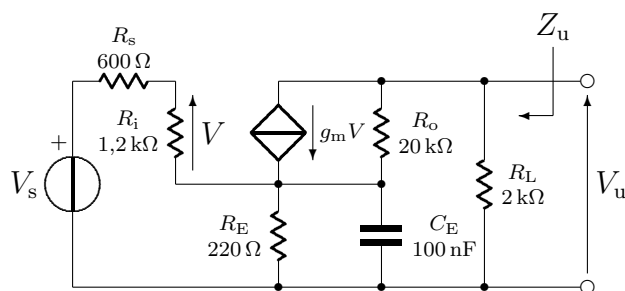
cercando di scrivere direttamente le funzioni di rete cercate basandosi sul comportamento del circuito alle frequenze estreme e determinando la costante di tempo. Si desidera calcolare l'amplificazione  $A_{vs} = V_u/V_s$  e l'impedenza di uscita  $Z_u$  indicata nel circuito. Lo scopo di questo esercizio è anche quello di confrontare l'efficienza di calcolo secondo il metodo suggerito con quanto si può ottenere con altri metodi; perciò per il calcolo di  $Z_u$ :

- ▷ si usi il metodo del generatore di prova (scegliendo opportunamente fra un generatore di tensione oppure un generatore di corrente);
- ▷ si determinino la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito ai morsetti fra i quali si desidera calcolare l'impedenza;
- ▷ si usi il metodo dei nodi.

Eccetto il terzo caso, si può applicare anche all'impedenza il metodo basato sulla costante di tempo; in tutti i casi in cui si può ricorrere a questo metodo si determini la costante di tempo del condensatore  $C$  cercando la resistenza equivalente  $R_{eq}$  ai suoi morsetti con un metodo qualunque.

La trasconduttanza del trasconduttore è  $g_m = 50 \text{ mS}$ .

Svolgere i vari calcoli sia in forma letterale sia in forma numerica e si abbia cura di scegliere la forma di scrittura che permette di recepire più rapidamente le relazioni che esistono fra le varie parti.



**Figura E–3.7.** Per l'esercizio 3.7

**3.8 Amplificazione e impedenza d'entrata** Del circuito riportato nella figura E–3.8 si desidera calcolare l'amplificazione di tensione  $A_{vs}(p) = V_u(p)/V_s(p)$  e l'impedenza d'entrata  $Z_i(p)$  che si vede nella sezione indicata nella figura quando la porta di uscita è lasciata aperta. Si consiglia di seguire metodi diversi per confrontare i risultati e per verificare la pesantezza dei calcoli; quando si segue il metodo delle costanti di tempo si

determini la resistenza  $R_{eq}$  vista dal condensatore ai suoi morsetti usando un metodo a scelta. La trasconduttanza del trasconduttore vale  $g_m = 50 \text{ mS}$ .

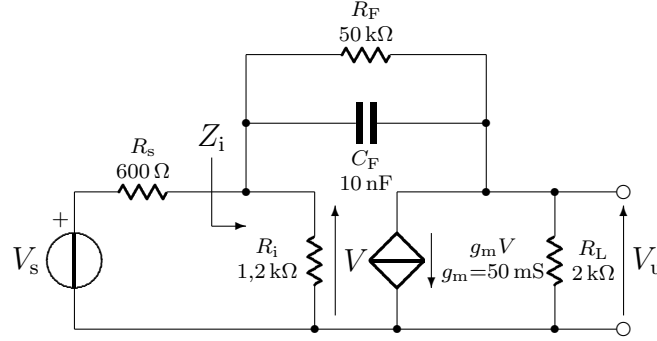


Figura E–3.8. Per l'esercizio 3.8

**3.9 Circuito eliminabanda RC** Il circuito della figura E–3.9 mostra un doppio bipolo RC *non a scala* in grado di produrre una coppia di zeri di trasmissione immaginari coniugati. Si determini la funzione di trasferimento  $A_v(p) = V_u(p)/E(p)$ ; si determinino inoltre le condizioni a cui devono soddisfare  $R_2$  ed  $R_4$  affinché il doppio bipolo presenti una coppia di zeri di trasmissione immaginari coniugati; infine si determini quale configurazione costruttiva devono avere due resistori variabili  $R_2$  ed  $R_4$  affinché sia possibile regolare la pulsazione degli zeri a piacere entro ampi limiti.

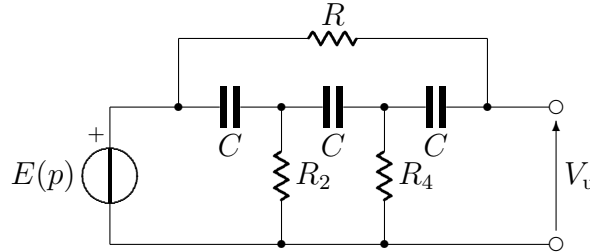


Figura E–3.9. Per l'esercizio 3.9

**3.10 Equalizzatore per giradischi** La figura E–3.10 rappresenta una possibile realizzazione del circuito di de-enfasi per la riproduzione dei dischi (non i compact disk, ma quelli tradizionali in vinile); determinare la funzione di trasferimento  $A_v(p) = V_u(p)/E(p)$  e l'attenuazione che il circuito introduce alla frequenza di 1 kHz. Per eseguire l'analisi usare sia il metodo dei nodi sia la regola del doppio partitore. Si suggerisce inoltre di normalizzare i componenti rispetto alla frequenza  $f_0 = 1 \text{ kHz}$  e alla resistenza  $R_0 = 30 \text{ kΩ}$ .

**3.11 Circuito a ponte** Nel circuito a ponte della figura E–3.11 caricato mediante la resistenza  $R_1$  si desidera calcolare la funzione di trasmissione  $A_v(p) = V_u(p)/E(p)$ ; si desidera calcolare a quanti decibel corrisponde il modulo di  $A_v$  alla frequenza di 160 kHz; infine, supponendo che il generatore di tensione produca una forza elettromotrice sinusoidale di ampiezza pari a 1 V e di frequenza pari a 1 kHz, si desidera scrivere l'espressione numerica di  $i_1(t)$  a regime.

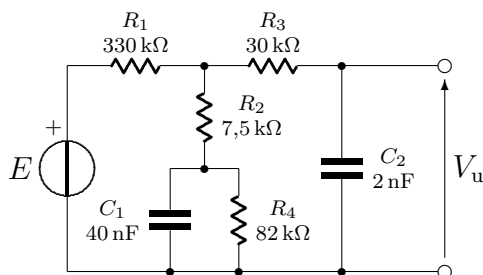


Figura E-3.10. Per l'esercizio 3.10

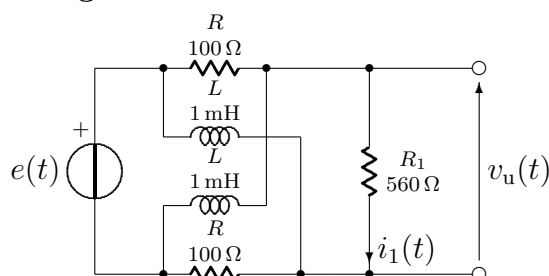


Figura E-3.11. Per l'esercizio 3.11

**3.12 Amplificatore** Si calcoli l'amplificazione di tensione  $A_v(p) = V_u(p)/E(p)$  per l'amplificatore rappresentato nella figura E-3.12.

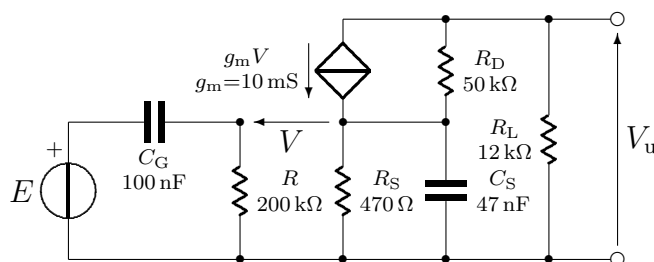
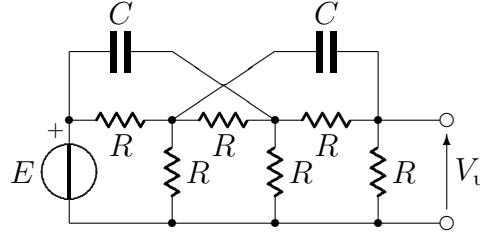


Figura E-3.12. Per l'esercizio 3.12

**3.13 Circuito da analizzare con il metodo dei nodi** Determinare la funzione di trasmissione  $A_v(p) = V_u(p)/E(p)$  del circuito della figura E-3.13.

**3.14 Movimento dell'equipaggio mobile di uno strumento elettrodinamico** La figura E-3.14 mostra una vista semplificata della parte attiva di uno strumento elettrodinamico a bobina mobile, quale un voltmetro o un milliamperometro.

Fra le espansioni polari adeguatamente sagomate di un magnete permanente NS è collocato un cilindretto di ferro dolce atto a far sì che il traferro sia un "cilindro" di piccolo spessore attraversato da un campo di induzione magnetica  $B$  sostanzialmente uniforme e perpendicolare alle facce del cilindretto (ovviamente dal polo N al cilindretto e poi, nell'altra metà, dal cilindretto al polo S). Sull'asse geometrico del cilindretto è inserita una leggerissima bobinetta di qualche decina di spire  $N$  montata su un telaio rettangolare di lati  $a$  e  $b$ , incernierato con perni a ridottissimo attrito in modo da poter ruotare nel traferro. Questo telaio è richiamato nella posizione di riposo da due molle a spirale, non indicate nella figura, che hanno anche il compito di collegare elettricamente la bobinetta al circuito da misurare. Quando la bobinetta è percorsa da una corrente  $i(t)$



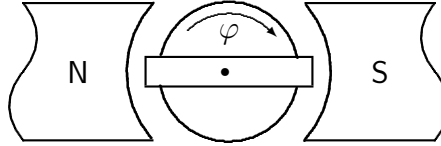
**Figura E–3.13.** Per l'esercizio 3.13

i suoi due lati lunghi (quelli paralleli al lato  $b$  del telaio) sono attraversati perpendicolarmente dal campo di induzione e quindi sono entrambi soggetti ad una forza variabile  $f(t)$  che applica una coppia al telaio; questa coppia complessivamente vale

$$c(t) = N B a b i(t)$$

Ruotando nel campo magnetico alla velocità angolare  $\omega_a$  gli stessi lati della bobina sono soggetti alla tensione indotta pari a

$$v(t) = N B a b \omega_a(t)$$



**Figura E–3.14.** Sezione della parte attiva di uno strumento elettrodinamico a bobina mobile

Dal lato elettrico, la tensione  $e(t)$  applicata alla bobina, di cui si può trascurare l'autoinduttanza e la resistenza propria, è percorsa dalla corrente  $i(t)$  legata alla tensione dalla resistenza complessiva della maglia in cui la bobina viene inserita; generalmente viene inserita in serie alla bobina una resistenza  $R_v$  molto alta affinché il voltmetro si avvicini il più possibile a un voltmetro ideale, la cui resistenza interna dovrebbe essere infinita.

Per completare la descrizione dinamica del sistema occorre ancora la legge del moto rotatorio del telaio con la sua bobina; sia  $J$  il suo momento di inerzia, sia  $r_a$  il coefficiente di attrito viscoso che si oppone al movimento rotatorio del telaio e  $K$  la rigidità complessiva delle due molle a spirale. I valori elettrici e meccanici dei componenti il sistema siano i seguenti:

$$\begin{array}{ll} N = 15,5 \text{ spire} & K = 100 \mu\text{Nm/rad}^2 \\ B = 1 \text{ T} & J = 500 \text{ ng m}^2/\text{rad}^2 \\ r_a = 10 \text{ Nm s/rad}^2 & R_v = 10 \text{ k}\Omega \\ a = 1 \text{ cm} & b = 2 \text{ cm} \end{array}$$

Supponendo di applicare alla bobina inizialmente ferma una tensione continua di 500 V, come varierebbe nel tempo l'angolo di rotazione  $\varphi$  dell'equipaggio mobile?

Come si muoverebbe invece l'equipaggio se la tensione continua applicata fosse di 50 mV e la resistenza della maglia fosse di solo 1  $\Omega$ ? Si noti che a regime la bobina sarebbe percorsa da 50 mA in entrambi i casi e quindi, raggiunto l'equilibrio, la rotazione finale dell'equipaggio mobile sarebbe la medesima.

## Capitolo 4

# Il regime sinusoidale e la risposta in frequenza

### 4.1 Generalità

Il regime sinusoidale è il solo per il quale abbia senso pratico parlare di risposta isomorfa, non perché negli altri casi sia assurdo, ma perché come regime periodico si presta a fare esperimenti in laboratorio misurando e visualizzando tutti i segnali. Non sfugge nemmeno il fatto che le compagnie elettriche distribuiscono l'energia elettrica agli utenti sotto forma di tensione e corrente sinusoidale (a 50 Hz in Europa e a 60 Hz nel Nordamerica, oltre che in altre nazioni legate al Nordamerica).

In elettronica i 50 Hz sono una frequenza qualunque, al massimo costituiscono un disturbo per il funzionamento di alcuni apparecchi di bassa frequenza. In compenso la risposta in frequenza della quasi totalità degli apparecchi elettronici è una caratteristica essenziale, per cui vale la pena di spendere un poco di tempo sul regime sinusoidale e sulla risposta in frequenza.

### 4.2 Il regime sinusoidale

Abbiamo già visto nel capitolo precedente che il regime sinusoidale è un caso particolare del regime cisoidale, di cui ci interessa solo la componente isomorfa; abbiamo visto che quando è nota la funzione di trasferimento  $H(p)$  fra l'eccitazione  $E_0 e^{p_0 t}$  e il misuratore della risposta, la componente isomorfa si determina semplicemente dall'espressione

$$R_{\text{iso}}(t) = \mathbf{Re} \left[ H(p_0) E_0 e^{p_0 t} \right] \quad (4.1)$$

che nel caso di regime sinusoidale di pulsazione  $p_0 = j\omega_0$  diventa

$$r_{\text{sinus}}(t) = \mathbf{Re} \left[ E_0 |H(j\omega_0)| e^{j\omega_0 t + j \arg[H(j\omega_0)]} \right] \quad (4.2)$$

Come si vede il fattore  $e^{j\omega_0 t}$  è comune sia all'eccitazione sia alla risposta, quindi lo si può sottintendere; è quello che si fa abitualmente quando una senoide qualunque viene espressa in termini complessi; infatti la senoide reale  $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  può essere scritta come  $\mathbf{Re}[A e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t}]$ , per cui, oltre all'informazione sulla pulsazione, che comunque

è comune all'eccitazione e alla risposta, basta conoscere il numero complesso

$$\bar{A} = A e^{j\varphi} \quad (4.3)$$

per conoscere ogni altra informazione sulla sinusoidale di partenza: l'ampiezza e la fase iniziale. Il numero complesso  $\bar{A}$  che contiene le informazioni sull'ampiezza e la fase della sinusoidale si chiama *fasore*<sup>1</sup>.

Analizzare un circuito in regime sinusoidale significa determinare l'ampiezza e la fase di ogni segnale sinusoidale presente nel circuito, dando per scontato che tutte le eccitazioni abbiano la medesima pulsazione  $\omega_0$ , che si dà per conosciuta. Il fasore di ogni risposta diventa pertanto

$$\bar{R} = H(j\omega_0)\bar{E}$$

essendo  $\bar{E}$  il fasore dell'eccitazione. La sovrapposizione degli effetti in un circuito lineare consente di ricavare ogni risposta che interessi anche per effetto dell'azione simultanea di diverse eccitazioni isofrequenziali.

Vale la pena di sottolineare con vigore che la sovrapposizione dei fasori, come in generale la somma di fasori, è un'operazione fra numeri complessi, non fra grandezze reali, così come ogni altra operazione di moltiplicazione, di divisione, di inversione, eccetera. La difficoltà di operare con grandezze sinusoidali e con seni e coseni è sostituita con la difficoltà assai minore di operare con grandezze complesse.

Non interessando né le condizioni iniziali, né la risposta libera, né il transitorio della risposta forzata, basta analizzare qualsiasi circuito sostituendo alle induttanze, alle capacità, ai trasformatori induttivi e ad accoppiamento unitario, i circuiti equivalenti delle figure 3.1–3.4 senza inserire i generatori delle condizioni iniziali (o considerando condizioni iniziali nulle).

Il circuito viene analizzato nel dominio di  $p$  e nel risultato finale si sostituisce  $p$  con  $j\omega_0$ . Lavorare con  $p$  è comodo, perché durante i calcoli non si deve tenere conto delle varie potenze dell'unità immaginaria; sostituire  $p$  con  $j\omega_0$  nel risultato finale vuol dire inserire “j” un posto sì e un posto no e cambiare segno due posti sì e due posti no. La regola è talmente meccanica, che ci si vergogna quasi ad enunciarla.

---

▽

**Esempio 4.1** — La sostituzione di  $p$  con  $j\omega$  nella funzione

$$H(p) = \frac{1 + p + 2p^2 + 3p^3 + 3p^4 + 2p^5 + p^6}{p + p^2 + 2p^3 + 2p^4 + 3p^5 + 3p^6 + 4p^7}$$

porta a

$$H(p) = \frac{1 + j\omega - 2\omega^2 - 3j\omega^3 + 3\omega^4 + 2j\omega^5 - \omega^6}{j\omega - \omega^2 - 2j\omega^3 + 2\omega^4 + 3j\omega^5 - 3\omega^6 - 4j\omega^7}$$

---

△

A seconda che l'argomento di  $H(j\omega_0)$  sia positivo o negativo, si dice che la risposta

▪ è in anticipo oppure in ritardo di fase rispetto all'eccitazione; se l'angolo è di  $90^\circ$  si dice

Versione del 3 ottobre 2001

- che la risposta è in quadratura rispetto all'eccitazione.

In termini di numeri complessi, la quantità complessa  $H(j\omega_0)$  cambia scala all'eccitazione e ne ruota il fasore di un angolo pari al suo argomento.

▽

**Esempio 4.2** — L'equazione costitutiva di un induttore in regime sinusoidale è

$$\bar{V} = j\omega_0 L \bar{I}$$

perciò la tensione è in quadratura e in anticipo rispetto alla corrente.

L'equazione costitutiva di un condensatore in regime sinusoidale è

$$\bar{I} = j\omega_0 C \bar{V}$$

perciò la tensione è in quadratura e in ritardo rispetto alla corrente.

Più in generale il rapporto  $\bar{V}/\bar{I} = Z(j\omega_0)$  si chiama impedenza e il suo reciproco ammettenza, né più né meno che in regime generico. La componente reale dell'impedenza si chiama resistenza, mentre quella dell'ammettenza si chiama conduttanza; la parte immaginaria dell'impedenza si chiama *reattanza*, mentre quella dell'ammettenza si chiama *suscettanza*. ■

La reattanza di un induttore è positiva, mentre quella di un condensatore è negativa. La suscettanza di un condensatore è positiva, mentre quella di un induttore è negativa.

Lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente è pari all'argomento (angolo) dell'impedenza; lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione è pari all'argomento (angolo) dell'ammettenza.

Poiché vale la relazione

$$Z = R + jX = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB}$$

l'impedenza e l'ammettenza dello stesso bipolo hanno moduli reciproci e angoli opposti.

△

In passato era frequente disegnare i vettori rappresentanti i fasori (*diagramma fasoriale* o anche *diagramma vettoriale*) ed era frequente eseguire i calcoli grafici rappresentando le varie grandezze in scala; oggi, con le calcolatrici da tasca che agevolano i calcoli con i numeri complessi, il disegno dei vettori non serve più come mezzo di calcolo, ma può talvolta essere utile per rendersi conto di alcuni fenomeni. ■

Le funzioni di trasferimento che capita di calcolare più sovente sono le impedenze e le ammettenze proprie e mutue, le amplificazioni di tensione e di corrente. Siccome il loro calcolo non differisce per niente da quanto è stato fatto negli esempi del capitolo precedente, salvo la sostituzione finale di  $p$  con  $j\omega_0$ , qui non si insiste oltre.

## 4.3 Potenza in regime sinusoidale

Se a una porta si misurano una tensione e una corrente sinusoidali rappresentate dai rispettivi fasori, la potenza *istantanea* è data dal prodotto delle rispettive sinusoidi ■

<sup>1</sup> Solamente in questo capitolo distingueremo mediante una barretta il numero complesso  $\bar{A}$ , che rappresenta un fasore, dal numero reale  $A$ , che rappresenta l'ampiezza della sinusoide che esso fasore identifica. Nel seguito dovrà essere chiaro dal contesto se si sta parlando di fasori, di ampiezze o di altro e non si metterà più nessun segno specifico.

$$V \cos(j\omega_0 t + \varphi) I \cos(j\omega_0 t + \psi) = \frac{VI \cos(\varphi - \psi)}{2} + \frac{VI \cos(j2\omega_0 t + \varphi + \psi)}{2} \quad (4.4)$$

Si può constatare che la potenza istantanea è costituita da due addendi, uno costante e un altro a valor medio nullo; perciò la potenza media o *potenza attiva* è data dal termine costante

$$P = \frac{VI \cos(\varphi - \psi)}{2} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi - \psi) \quad (4.5)$$

- dove i termini  $V_{\text{eff}}$  e  $I_{\text{eff}}$  sono rispettivamente i *valori efficaci*<sup>2</sup> della tensione e della corrente. Mediante i valori efficaci il calcolo della potenza (se la tensione e la corrente sono in fase) si esegue come in regime stazionario; per questo gli apparecchi misuratori, i voltmetri e gli amperometri, che si usano in regime sinusoidale, sono tarati in valore efficace e non in ampiezza; la cosa non è né un vantaggio né uno svantaggio, basta solo ricordarsene quando si fa uso di quegli strumenti.

La differenza d'angolo fra la tensione e la corrente, sempre presente nei circuiti in regime dinamico, rende il trasferimento della potenza meno efficace che se detta differenza

- non ci fosse; per questo quando si tratta di grandi potenze in gioco, si cerca di rifasare la corrente, in modo che il coseno non influisca. Infatti a pari potenza erogata, se il coseno ha un valore sensibilmente inferiore all'unità, la corrente deve avere un'ampiezza corrispondentemente maggiore, causando così maggiori e inutili perdite nei conduttori lungo la quale essa scorre. Siccome quando sono in gioco grandi potenze la corrente è in ritardo rispetto alla tensione, bisogna mettere in parallelo al circuito un condensatore che, sottoposto alla stessa tensione, assorbe una corrente in anticipo rispetto alla tensione, ma in quadratura rispetto ad essa. Il condensatore non assorbe potenza, ma la corrente assorbita si somma a quella del carico e rifasa la corrente complessiva.

▽

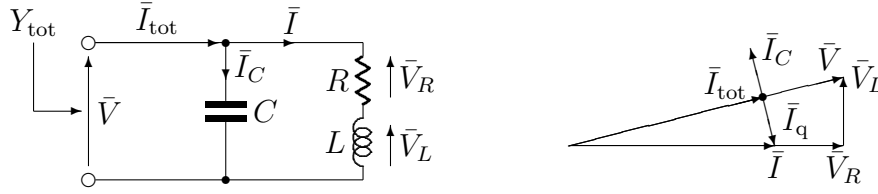
**Esempio 4.3** — Si faccia riferimento al circuito della figura 4.1; l'apparecchio utilizzatore, per esempio un motore, abbia il circuito equivalente rappresentato dalla resistenza e dall'induttanza; la tensione complessiva ai capi dell'utilizzatore e la sua corrente sono chiaramente sfasate. Detto sfasamento si apprezza meglio facendo riferimento alla tensione ai capi dell'induttanza e la tensione ai capi della resistenza, entrambe proporzionali alla stessa corrente  $\bar{I}$  ma una in fase,  $\bar{V}_R$ , e una in quadratura in anticipo,  $\bar{V}_L$ . Il triangolo rettangolo che ne costituisce la somma mostra chiaramente lo sfasamento. Il fasore della corrente  $\bar{I}$  può essere scomposto nelle due componenti, di cui una parallela a  $\bar{V}$  e l'altra in quadratura in ritardo; il condensatore di rifasamento, soggetto alla stessa tensione dell'utilizzatore, deve quindi assorbire una corrente in quadratura in anticipo tale da compensare esattamente (o quasi) la componente in ritardo dell'utilizzatore.

Data la similitudine dei triangoli, senza bisogno di ricorrere alla trigonometria (sebbene non sia particolarmente difficile, visto che oltre tutto la trigonometria non è altro che

<sup>2</sup> Si ricorda che il valore efficace di una grandezza periodica, non necessariamente sinusoidale, è pari alla radice quadrata della media quadratica sul periodo

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

Per una sinusoide il valore efficace è legato all'ampiezza dal fattore  $1/\sqrt{2}$ .



**Figura 4.1.** Condensatore di rifasamento e diagramma fasoriale delle tensioni e delle correnti

una “nobilitazione” del teorema di Pitagora) si vede che  $|\bar{I}_q| : |\bar{V}_L| = |\bar{I}| : |\bar{V}|$ ; ricordando quanto si è osservato nell’esempio 4.2, è immediato ricavare

$$|\bar{I}_q| = |\bar{I}_C| = |\bar{I}| \frac{\omega_0 L}{|R + j\omega_0 L|}$$

e quindi si può ricavare il valore della capacità del condensatore

$$C = \frac{L}{|R + j\omega_0 L|^2}$$

Chiaramente cambiando pulsazione il condensatore di rifasamento va ricalcolato; siccome però il rifasamento si esegue in pratica solo alla frequenza di rete, in Europa a 50 Hz, il problema di cambiare capacità al cambiare della frequenza non si pone nemmeno. Il problema piuttosto si presenta sotto un altro aspetto: la resistenza  $R$  in parte costituisce il modello energetico della potenza meccanica erogata dal motore al suo carico; se cambia questo carico, cambia anche il modello  $R$ , per cui cambia lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione e perciò occorrerebbe un condensatore di valore diverso. Normalmente il condensatore di rifasamento viene calcolato per il carico massimo. ■

Senza fare uso dei triangoli della figura 4.1, chiedere di rifasare il carico mediante il condensatore di rifasamento equivale a chiedere che l’ammettenza  $Y_{\text{tot}}$  indicata nella stessa figura sia rappresentata da una quantità reale; solo così, infatti, non c’è sfasamento fra la tensione  $\bar{V}$  e la corrente  $\bar{I}_{\text{tot}}$ . Ora l’ammettenza totale vale

$$Y(p) = pC + \frac{1}{R + pL}$$

da cui

$$\begin{aligned} Y(j\omega_0) &= j\omega_0 C + \frac{1}{R + j\omega_0 L} \\ &= j\omega_0 C + \frac{R - j\omega_0 L}{|R + j\omega_0 L|^2} \end{aligned}$$

e infine, considerando solo la componente immaginaria da annullare,

$$B(\omega_0) = \omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{|R + j\omega_0 L|^2} = 0$$

si ottiene lo stesso risultato ottenuto con le similitudini dei triangoli.

△

Il termine variabile della potenza istantanea che compare nell’equazione (4.4) non ha un significato particolare oltre a quello di essere la variazione della potenza istantanea

rispetto alla potenza media. Ciò nonostante, ricorrendo ai fasori è possibile associargli un significato.

I fasori della tensione  $\bar{V} = V e^{j\varphi}$  e della corrente  $\bar{I} = I e^{j\psi}$  possono essere moltiplicati assieme mediante un'operazione che assomiglia al prodotto scalare per dare luogo alla

- *potenza complessa*

$$P_{\text{compl}} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ \quad (4.6)$$

La parte reale  $P$  coincide con la potenza media o potenza attiva, che abbiamo già definito nell'equazione (4.5). Il modulo di  $P_{\text{compl}}$  prende il nome di *potenza apparente*, si indica con  $P_{\text{app}} = |P_{\text{compl}}|$  e vale  $P_{\text{app}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ .

- La parte immaginaria  $Q$ , detta *potenza reattiva*, vale invece

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi - \psi) \quad (4.7)$$

La potenza reattiva gode della proprietà di essere nulla quando la tensione e la corrente sono in fase; essa è legata alla potenza istantanea massima  $P_{\text{max}}$  e alla potenza istantanea minima  $P_{\text{min}}$  dalla seguente relazione

$$|Q| = \sqrt{-P_{\text{max}} P_{\text{min}}}$$

Infatti dall'espressione della potenza istantanea possiamo constatare che è  $P_{\text{max}} = P + P_{\text{app}}$  mentre la potenza minima (che in generale è negativa) vale  $P_{\text{min}} = P_{\text{app}} - P$ ; il loro prodotto dà appunto  $P_{\text{app}}^2 - P^2 = Q^2$ . Il significato fisico della potenza reattiva è associato al suo modulo che rappresenta la media geometrica fra i valori assoluti delle potenze istantanee minima e massima.

Il segno della potenza reattiva è del tutto convenzionale; esso è positivo quando la tensione è in anticipo rispetto alla corrente, cioè nei circuiti in cui la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva. Ma non c'è nessun motivo per scegliere questa convenzione, purché se ne scelga una. L'aver definito la potenza complessa come il prodotto del fasore della tensione per il coniugato del fasore della corrente è in accordo con quella scelta convenzionale.

Una notevole proprietà dei fasori è che le potenze sia attive, sia reattive, sia complesse continuano a soddisfare a tutte le condizioni a cui soddisfa la potenza istantanea. In particolare la potenza totale entrante nel connettore (equivalente alla somma delle potenze uscenti da tutti i componenti collegati al connettore) è nulla, e questa proprietà vale complessivamente per la potenza complessa, e quindi per ogni sua componente.

- Questa proprietà è nota come teorema di Boucherot.

## 4.4 Adattamento energetico

Le reattanze che compaiono nel funzionamento in regime sinusoidale sono causa di perdite di potenza o di riduzioni nella trasmissione di potenza, benché esse come tali siano rappresentative solamente di scambi energetici conservativi; in regime sinusoidale ogni componente con o senza memoria riceve o cede energia; i resistori ricevono energia e la dissipano totalmente (in realtà la trasformano irreversibilmente in energia di altra specie; se il resistore è il modello di un resistore elettrico, l'energia elettrica viene trasformata in calore, ma se il resistore è il modello di un generico utilizzatore, eventualmente attraverso

qualche forma di analogia, l'energia viene trasformata in altra forma utile, che può essere ancora calore, ma può essere lavoro meccanico o altro). I trasformatori ideali e i giratori trasferiscono l'energia da una porta all'altra senza immagazzinarne nulla. I generatori indipendenti e quelli dipendenti in generale erogano energia, ma talvolta l'assorbono (si pensi per esempio a un accumulatore durante la ricarica).

Invece i componenti con memoria, condensatori, induttori e trasformatori induttivi, immagazzinano l'energia in certi intervalli di tempo e la erogano negli intervalli complementari. Si pensi a un condensatore in regime sinusoidale alimentato da un generatore ideale che genera una sinusoide di ampiezza  $V$ ; inizialmente il condensatore sia scarico; dopo un quarto di ciclo la sinusoide è passata dal valore zero al valore  $V$  e l'energia nel condensatore è passata dal valore zero al valore  $CV^2/2$ ; dopo un altro quarto di ciclo la tensione raggiunge nuovamente il valore zero così come l'energia nel condensatore. Siccome nulla è stato dissipato, l'energia che nel primo quarto di ciclo il generatore aveva fornito al condensatore, viene restituita dal condensatore al generatore (ecco un altro caso di generatore che riceve energia, invece di erogarla).

Quanto descritto sopra avviene in condizioni ideali; nel mondo reale sia durante la fase di carica, sia durante quella di scarica del condensatore circola una certa corrente, che scorre nei fili di collegamento, i quali sono caratterizzati da una certa sia pur piccola resistenza, nella quale la corrente dissipa un po' di energia in forma irreversibile. Analoghi effetti avvengono nel generatore (che non è ideale) e nel condensatore, dove il dielettrico fra le armature è sede di una sia pur piccola corrente di perdita e dove il continuo ripetuto cambiamento della polarizzazione produce degli effetti irreversibili di trasformazione energetica.

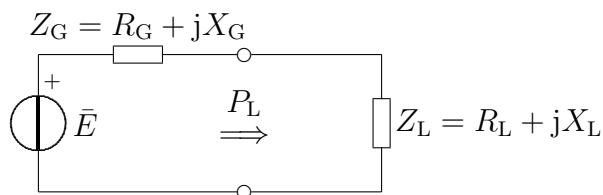
La potenza reattiva  $\omega CV^2/2 = \omega CV_{\text{eff}}^2$  nel condensatore è proporzionale all'energia massima accumulata nel condensatore e alla "velocità"  $\omega$  con cui si ripetono i cicli di carica e scarica (due cicli completi di carica e scarica per ogni periodo della sinusoide). Le stesse cose si possono ripetere per un induttore o per un trasformatore.

Dunque, nella migliore delle ipotesi, la presenza di potenza reattiva implica correnti maggiori di quelle che ci sarebbero senza scambi reversibili di energia e questo implica maggiori perdite e minore efficienza nel trasferimento di energia da un generatore a un utilizzatore.

Non solo, ma la potenza reattiva, legata alla presenza di reattanze e suscettanze, limita la massima corrente che un generatore può erogare a un carico; talvolta (raramente) questo effetto è voluto; si pensi ad una saldatrice ad arco elettrico; la corrente elettrica che viene erogata all'elettrodo di saldatura e ritorna alla saldatrice attraverso il morsetto applicato al pezzo da saldare, viene limitata dalla reattanza (in generale regolabile) presente nel secondario del trasformatore di alimentazione, in modo da limitarne l'ampiezza visto che l'arco ha una resistenza piccolissima, quasi un cortocircuito, affinché il trasformatore di alimentazione non sia sovraccaricato, specialmente durante la fase di innesco dell'arco.

Più in generale le reattanze presenti nel modello del generatore e in quello dell'utilizzatore impediscono che il generatore trasferisca al carico tutta la potenza di cui sarebbe capace.

Si faccia riferimento alla figura 4.2 ricordando che i due bipoli non sono bipoli "reali", ma sono modelli rispettivamente del carico,  $Z_L$ , e del generatore,  $\bar{E}$ ,  $Z_G$ . Questi due circuiti equivalenti non ci dicono nulla di quello che succede *dentro* i dispositivi reali, ma ci consentono di esaminare tutto quanto succede *fuori* di tali dispositivi; nel



**Figura 4.2.** Generatore e carico con impedenze interne complesse in regime sinusoidale

nostro caso “fuori” c’è solo la porta che li connette, e dove potremmo inserire voltmetro, amperometro, wattmetro, eccetera.

La potenza che transita attraverso questa porta dal generatore al carico vale

$$P_L = R_L \left| \frac{E_{\text{eff}}}{Z_G + Z_L} \right|^2 \quad (4.8)$$

e come si vede dipende fortemente dalle reattanze delle impedenze modello. Logicamente la potenza cresce se, come si diceva sopra, si eliminano queste reattanze, se cioè si pone o se si assume che sia

$$X_G = -X_L$$

Ma anche così non è detto che si possa trasferire al carico tutta la potenza di cui è capace il generatore. Se si fa variare la resistenza del carico  $R_L$ , si trova che la potenza assorbita dal carico è nulla sia per  $R_L = 0$  sia per  $R_L = \infty$ ; siccome la potenza è sempre non negativa, vuol dire che fra questi due casi limite c’è un valore privilegiato di resistenza per il quale la potenza trasferita è massima. Qualche semplice calcolo porta a constatare che questo valore privilegiato è

$$R_L = R_G$$

Ne segue che quando

$$Z_L = Z_G^* \quad (4.9)$$

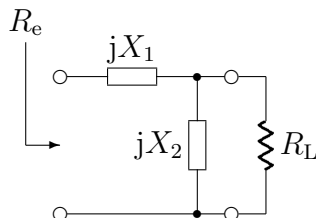
- si ha l’*adattamento coniugato* e in queste condizioni si ha il massimo trasferimento di
- potenza dal generatore al carico; tale massima potenza, detta anche *potenza disponibile* vale

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{4R_G} \quad (4.10)$$

In elettronica si cerca spesso di mettersi nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza; se i modelli del generatore e del carico non hanno inizialmente le impedenze interne che soddisfano alla condizione (4.9), si aggiungono in serie o in parallelo o in cascata opportuni componenti reattivi al fine di far “vedere” al generatore un’impedenza di carico pari alla coniugata della sua stessa impedenza interna. In questo modo il generatore eroga tutta la potenza di cui esso è capace e questa potenza transita tutta fino al carico poiché i componenti reattivi aggiunti per eseguire l’adattamento non assorbono nessuna potenza. Va da sé che il carico deve avere una componente resistiva, altrimenti non può assorbire nessuna potenza.

- Si può dimostrare che per eseguire l’*adattamento energetico* (sinonimo di adattamen-
- to coniugato) ad una sola frequenza sono sufficienti due soli componenti reattivi. Qui ci

limiteremo a considerare il problema senza cercare di minimizzare il numero dei componenti. L'adattamento a larga banda è molto più complesso, ma quando si può utilizzare, l'adattamento mediante un trasformatore induttivo costituisce una buona soluzione; si veda a questo proposito l'esempio 3.10.



**Figura 4.3.** Circuito di adattamento fra resistenze

Consideriamo prima il problema più semplice di adattare due resistenze  $R_G$  e  $R_L$  e facciamo riferimento alla figura 4.3; supponiamo cioè di inserire due bipoli reattivi che alla pulsazione di lavoro  $\omega_0$  consentano di vedere fra i morsetti di sinistra una resistenza  $R_e = R_G$  quando i morsetti di destra sono chiusi sulla resistenza di carico  $R_L$ . Si ottiene

$$R_e = jX_1 + jX_2 \oplus R_L$$

Separando parte reale e parte immaginaria e imponendo che sia  $R_e = R_G$ , si ricava il sistema di equazioni

$$X_2^2 = \frac{R_G R_L^2}{R_L - R_G} \quad (4.11a)$$

$$X_1 = -\frac{X_2 R_L^2}{R_L^2 + X_2^2} \quad (4.11b)$$

Il risultato 4.11 ci obbliga a un paio di commenti.

1. Il sistema di equazioni presenta due soluzioni perfettamente equivalenti: una con  $X_2 > 0$  e l'altra con  $X_2 < 0$ . Entrambe sono valide, visto che non esistono vincoli sui segni delle reattanze; la scelta dell'una o dell'altra dipende da altre considerazioni; prendere  $X_2 > 0$  vuol dire realizzare il componente con un'induttanza; un'induttanza in parallelo si comporta come cortocircuito a frequenza nulla, quindi il circuito di adattamento non è in grado di lasciar passare un'eventuale componente continua verso il carico; se questo è un problema bisogna scegliere l'altra soluzione, altrimenti è del tutto indifferente, anche se spesso si preferisce comunque la soluzione con l'induttanza in serie.
2. L'equazione (4.11a) porge una soluzione accettabile solo se  $R_L > R_G$ ; se così non fosse basterebbe voltare la cella a L dall'altra parte (ramo serie a destra) e risolvere nuovamente il problema (questo argomento è proposto come esercizio 5.8).
3. Se si realizza  $X_2$  con un'induttanza,  $X_1$  va realizzata con una capacità e viceversa.

▽

**Esempio 4.4** — Sia da adattare un'antenna di impedenza pari a  $300 \Omega$  a un generatore con impedenza interna pari a  $50 \Omega$  alla frequenza di 110 MHz.

Versione del 3 ottobre 2001

Le equazioni (4.11) portano a determinare le reattanze necessarie

$$X_2 = \pm 134,16 \Omega \quad X_1 = \mp 111,8 \Omega$$

Se  $X_2$  viene scelta negativa i componenti da usare sono una capacità per  $X_2$  e un'induttanza per  $X_1$ ; i valori sono

$$C = \frac{-1}{\omega_0 X_2} = 10,8 \text{ pF} \quad L = \frac{X_1}{\omega_0} = 162 \text{ nH}$$

△

Il problema generale di adattamento diventa ora facilissimo (sempre ad una sola frequenza); basta mettere in serie al carico una reattanza pari a  $-X_L$ , adattare  $R_L$  a  $R_G$ , e infine mettere in serie alla porta d'entrata dell'adattatore una reattanza pari a  $-X_G$ ; tale ultima reattanza può essere sommata direttamente a  $X_1$  e la reattanza risultante può essere realizzata con un solo componente.

▽

- **Esempio 4.5** — Riprendendo l'esempio precedente si supponga di dover adattare un'antenna con impedenza interna pari a  $(300-j73) \Omega$  alla frequenza di 110 MHz con un generatore avente l'impedenza interna pari a  $(50+j12) \Omega$ .

Dobbiamo cominciare a mettere in serie al carico una reattanza da  $+73 \Omega$ , da realizzarsi con un'induttanza da 106 nH; poi inseriamo l'adattatore calcolato nell'esercizio precedente; in particolare realizziamo  $X_2$  con la stessa capacità da 10,8 pF, ma mettiamo in serie la reattanza  $X_1$  con la reattanza da  $-12 \Omega$  ottenendo un totale di  $+99,8 \Omega$ , da realizzarsi con una induttanza da 144 nH.

△

Alle frequenze alle quali si usano le antenne, è comune usare adattatori a parametri distribuiti; alla frequenza di 110 MHz degli esempi precedenti i componenti a parametri concentrati sono ancora utilizzabili, ma alle frequenze a cui lavorano, per esempio, i telefoni cellulari (circa 900 MHz, oppure, quelli che lavorano in dual band, circa 1,8 GHz) i componenti concentrati o sono costruiti con grandissima cura oppure è meglio ricorrere ai componenti distribuiti. Alle frequenze di comunicazione satellitare (diversi gigahertz) si usano solo adattatori a parametri distribuiti. Questo genere di adattatori viene trattato in corsi successivi a questo, perché per trattarli sono necessarie nozioni che a questo livello non sono ancora state sviluppate.

## 4.5 Risposta in frequenza

Nei sistemi elettronici analogici è estremamente importante saper valutare e analizzare nei dettagli la risposta in frequenza.

- Matematicamente parlando il tutto si riduce ad analizzare la risposta

$$H(j\omega) = \mathbf{Re}[H(j\omega)] + j \mathbf{Im}[H(j\omega)] = |H(j\omega)| \exp\{j \arg[H(j\omega)]\}$$

vuoi nelle sue componenti cartesiane, parti reale e immaginaria, vuoi nelle sue componenti polari, modulo e argomento.

Dotati di adeguati mezzi di calcolo, oggi alla portata di tutti, non è difficile tracciare tutte le informazioni che occorrono sia sotto forma di tabelle di dati, sia sotto forma di diagrammi. Ma questi dati ottenuti a macchina sono freddi e non dicono granché su quello che il sistema elettronico è in grado di dare come prestazione in frequenza.

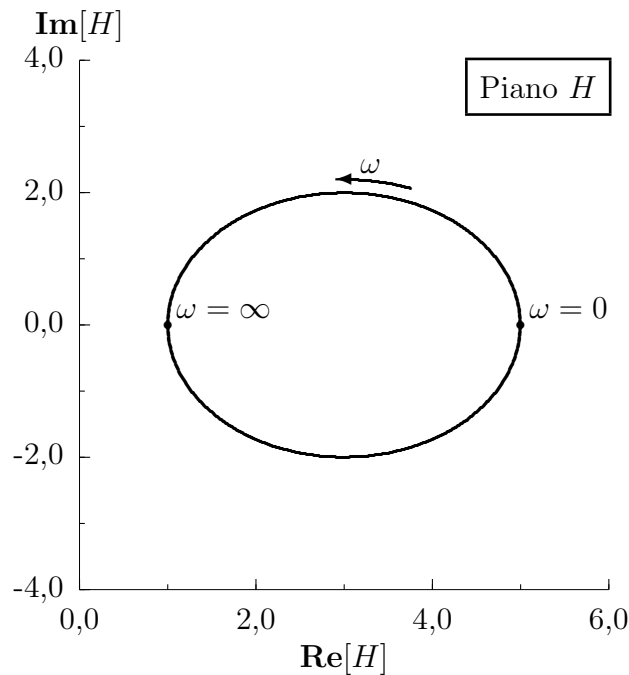
Nello stesso tempo che significato hanno espressioni come “banda passante”, “banda a 3 dB”, “banda attenuata”, eccetera, se non si è in grado di valutare la risposta in frequenza e/o non si sa leggere un diagramma che riporta la risposta in frequenza? ■

È quindi molto importante saper valutare e tracciare i diagrammi di risposta in frequenza, anche senza troppa precisione, ma con rapidità, in modo da poter leggere subito i risultati, sia pure con una certa approssimazione.

Esistono sostanzialmente due rappresentazioni di una funzione complessa:

1. il diagramma “polare” della funzione, cioè il luogo dei punti descritto nel piano  $H$  al variare di  $\omega$ , i cui valori possono essere riportati lungo la curva descritta dalla funzione complessa  $H(j\omega)$  al variare di  $\omega$ ; spesso questo diagramma polare viene chiamato *diagramma di Nyquist*. Nella figura 4.4 è riportato il diagramma della funzione ■

$$H(j\omega) = \left. \frac{p+5}{p+1} \right|_{p=j\omega}$$



**Figura 4.4.** Esempio di diagramma polare

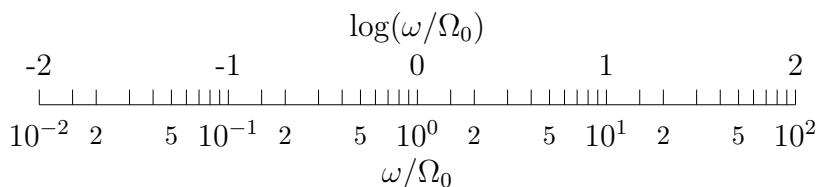
2. due diagrammi cartesiani, ciascuno con  $\omega$  in ascisse, uno con il diagramma della parte reale oppure del modulo, l'altro con il diagramma della parte immaginaria oppure dell'argomento. Se l'asse delle ascisse è logaritmico e se il modulo è riportato in decibel,<sup>3</sup> i corrispondenti diagrammi prendono il nome di *diagrammi di Bode*. ■

<sup>3</sup> Si ricorda che il rapporto  $x$  di due grandezze descrittive, o meglio il rapporto fra le ampiezze o i

## 4.6 I diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono il diagramma di una grandezza associata al modulo di una funzione di trasferimento insieme al diagramma associato al suo argomento. Il modulo si esprime in decibel e l'argomento si esprime in gradi (nonagesimali). Le ascisse sono logaritmiche. A parte le scale essi sono i diagrammi della funzione  $\ln[H(j\omega)]$  la cui parte reale è il logaritmo del modulo e la cui parte immaginaria è l'argomento.

- Conviene sottolineare che la scala logaritmica è la scala lineare del logaritmo di una grandezza, nel nostro caso di  $\log \omega/\Omega_0$  (ricordiamo che l'argomento di una funzione trascendente deve essere adimensionato), ma lungo l'asse non è riportato il valore del logaritmo della grandezza, ma il valore della grandezza stessa, per cui le tacche che delimitano intervalli costanti della grandezza appaiono distanziate secondo la legge logaritmica e non secondo la legge lineare: figura 4.5.



**Figura 4.5.** Scala logaritmica

In questa figura è rappresentata la corrispondenza fra il logaritmo della variabile (riportato sopra) con i corrispondenti valori della variabile (riportati sotto); si vede chiaramente che il logaritmo è riportato in scala lineare e che perciò i valori della variabile sono disuniformemente distribuiti.

L'utilità della scala logaritmica nasce dal fatto che la moltiplicazione dell'argomento per una costante significa semplicemente traslare tutto il disegno orizzontalmente della quantità rappresentata dal logaritmo della costante. In altre parole, cambiare scala alla pulsazione, vuol dire traslare il disegno orizzontalmente senza cambiargli forma.

Si noti ancora che il rapporto  $\omega/\Omega_0$  è esattamente uguale al rapporto  $f/F_0$  purché, evidentemente, la pulsazione di normalizzazione e la frequenza di normalizzazione si corrispondano attraverso il solito fattore  $2\pi$ .

Ciò premesso, supponiamo che la funzione di trasferimento sia scritta con i polinomi a numeratore e a denominatore scomposti in fattori e che entrambi siano monici, così che ci sia un'unica costante moltiplicativa per l'intera funzione; supponiamo anche di scrivere la funzione di trasferimento nel seguente modo un po' insolito

$$H(p) = K \prod_{k=1}^N (p - p_k)^{n_k} \quad (4.12)$$

dove ogni radice  $p_k$  ha la molteplicità  $|n_k|$  ed è uno zero (sta a numeratore) se  $n_k > 0$ , mentre è un polo (sta a denominatore) se  $n_k < 0$ . Se uno zero è complesso, esiste anche il complesso coniugato con la stessa molteplicità; se un polo è complesso esiste il polo complesso coniugato con la stessa molteplicità; ogni radice (polo o zero) ha un modulo  $m_k$

---

valori efficaci di due grandezze descrittive, viene misurato in decibel se se ne esprime il valore mediante  $20 \log x$ ; il rapporto  $y$  di due potenze o di due energie si esprime in decibel se se ne dà il valore mediante  $10 \log y$ .

e un argomento  $\varphi_k$ , così da poter scrivere  $p_k = m_k e^{j\varphi_k}$ . L'unica costante moltiplicativa è una quantità reale positiva o negativa, per cui il modulo  $|K|$  è ovviamente sempre positivo, ma l'argomento  $\arg[K]$  può valere solo  $0^\circ$  o  $180^\circ$ .

Il logaritmo della funzione di trasferimento vale

$$G(p) = \ln K + \sum_{k=1}^N [n_k \ln(p - p_k)] \quad (4.13)$$

ed è quindi la somma di tanti termini simili,  $\ln(p - p_k)$ , moltiplicati per numeri interi positivi o negativi, e il tutto sommato a una costante.

Per avere i diagrammi di Bode, dobbiamo calcolare la funzione (4.13) per  $p = j\omega$ , separare la parte reale da quella immaginaria e riportare le due parti in scala semilogaritmica dopo aver cambiato scale alle ordinate; per il modulo vogliamo i decibel, quindi dobbiamo moltiplicare i logaritmi naturali per 20 e per la costante di conversione per passare ai logaritmi decimali; si fa prima a sostituire il logaritmo neperiano con il logaritmo decimale. Per gli argomenti si tratta di esprimerli in gradi, invece che in... radianti. Traceremo pertanto i diagrammi delle grandezze

$$A(\omega) = 20 \log |K| + \sum_{k=1}^N n_k \ln |j\omega - p_k| \quad (4.14a)$$

$$B(\omega) = \frac{180^\circ}{\pi} \left\{ \arg[K] + \sum_{k=1}^N n_k \arg[j\omega - p_k] \right\} \quad (4.14b)$$

Tutto ciò esaurirebbe l'argomento se non fosse che tutto quello che abbiamo detto sembra un buon procedimento per complicare le cose semplici; non bastava tracciare i diagrammi del modulo in decibel e della fase in gradi della funzione  $H(j\omega)$ ? Non sarebbe bastato prendere il PC, lanciare un programma di matematica qualunque ed avere direttamente il risultato sullo schermo? Certamente, ma non era questo quello che volevamo fare; noi volevamo trovare un metodo semplice, sia pure approssimato, per tracciare i diagrammi di Bode praticamente a vista, senza fare calcoli di nessun genere, se non quelli per scomporre numeratore e denominatore in fattori.

Con le osservazioni fatte in precedenza le due espressioni (4.14) non sono altro che la somma di contributi identici, a parte una traslazione lungo le ascisse e l'aggiunta di una costante; tali contributi identici sono semplicemente

$$a_k(\omega) = 20 \log |j\omega - p_k| \quad (4.15a)$$

$$b_k(\omega) = \frac{180^\circ}{\pi} \arg[j\omega - p_k] \quad (4.15b)$$

Bene, è ora di sfruttare queste semplici espressioni; cominciamo a mettere in evidenza i moduli delle radici raggruppando, per le radici complesse, i contributi dei due termini coniugati; inoltre esprimiamo l'argomento delle radici, non come angolo a partire dall'asse reale, ma come angolo a partire dall'asse immaginario, ma sempre misurato in senso antiorario;

$$\varphi_k = 90^\circ + \vartheta_k$$

per le radici complesse diamo la preferenza a quella che giace nel semipiano superiore, mentre per quella coniugata semplicemente cambiamo segno all'angolo  $\varphi_k$ , e quindi anche a  $\vartheta_k$ : per le radici che stanno nel semipiano inferiore misuriamo gli angoli in senso orario.

Mettere in evidenza il modulo delle radici è equivalente a sommare e sottrarre  $20 \log m_k$ ; il termine sottratto lo usiamo nelle nostre espressioni, quello sommato lo aggregiamo alla costante dell'equazione (4.14a); lo stesso facciamo per le fasi.

#### 4.6.1 Contributi delle radici reali

- Le radici reali contribuiscono pertanto con i termini

$$a_k(\omega) = 10 \log \left( 1 + \frac{\omega^2}{m_k^2} \right) \quad (4.16a)$$

$$b_k(\omega) = \sin \vartheta_k \frac{180^\circ}{\pi} \arctan \frac{\omega}{m_k} \quad (4.16b)$$

e sono riportate nelle figure 4.6 e 4.7.

- Nelle figure i diagrammi sono riportati insieme ad alcune spezzate, che rappresentano gli andamenti approssimati e asintotici dei contributi cercati.

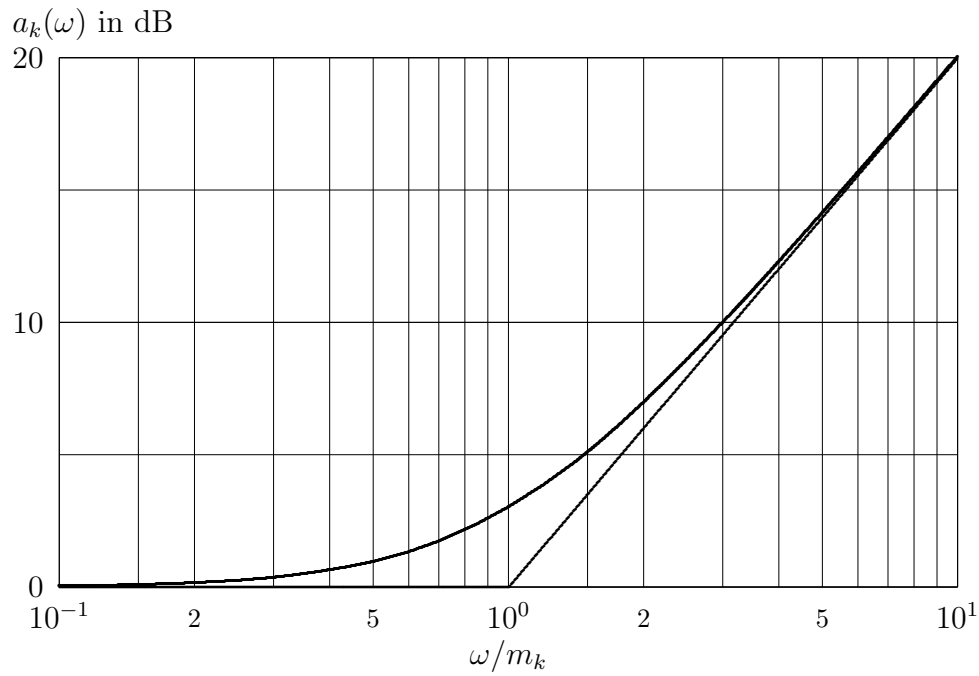
Nel diagramma del modulo della figura 4.7, così come dall'equazione (4.16a), si vede che per  $\omega/m_k \ll 1$  il termine dipendente da  $\omega$  svanisce e il logaritmo tende a zero, così come il diagramma a sinistra presenta un asintoto orizzontale; invece per  $\omega/m_k \gg 1$  il termine dipendente da  $\omega$  prevale e la funzione tende all'asintoto obliquo  $20 \log(\omega/m_k)$ , che, essendo le ascisse logaritmiche, è rappresentato da una retta con una pendenza di 20 dB/decade. Nel punto centrale del diagramma del modulo l'errore rispetto alla curva esatta che la spezzata formata dagli asintoti produce è proprio di 3 dB.

- Per il diagramma di fase della figura 4.7 così come per l'equazione (4.16b), bisogna notare che il termine  $\sin \vartheta_k$  vale semplicemente  $\mp 1$  a seconda che la radice sia sul semiasse positivo ovvero sul semiasse negativo, perché le radici reali hanno l'angolo misurato dall'asse immaginario e vale  $-90^\circ$  per le radici positive e  $+90^\circ$  per le radici negative. Inoltre quando  $\omega/m_k \ll 1$ , l'arcotangente fornisce il valore nullo e il diagramma tende a sinistra all'asintoto orizzontale nullo; quando invece  $\omega/m_k \gg 1$  l'argomento dell'arcotangente tende a  $+\infty$  e il valore principale dell'arcotangente tende a  $90^\circ$ ; corrispondentemente la curva tende all'asintoto orizzontale collocato all'altezza di  $90^\circ$ . Nel passare da un asintoto all'altro la curva sale con continuità, ma la spezzata inclinata di  $45^\circ/\text{decade}$  che passa per il punto centrale all'altezza di  $45^\circ$  approssima visivamente abbastanza bene il diagramma; all'atto pratico l'approssimazione per certe applicazioni non è sufficiente, ma per tracciare un andamento qualitativo della fase può essere accettabile.

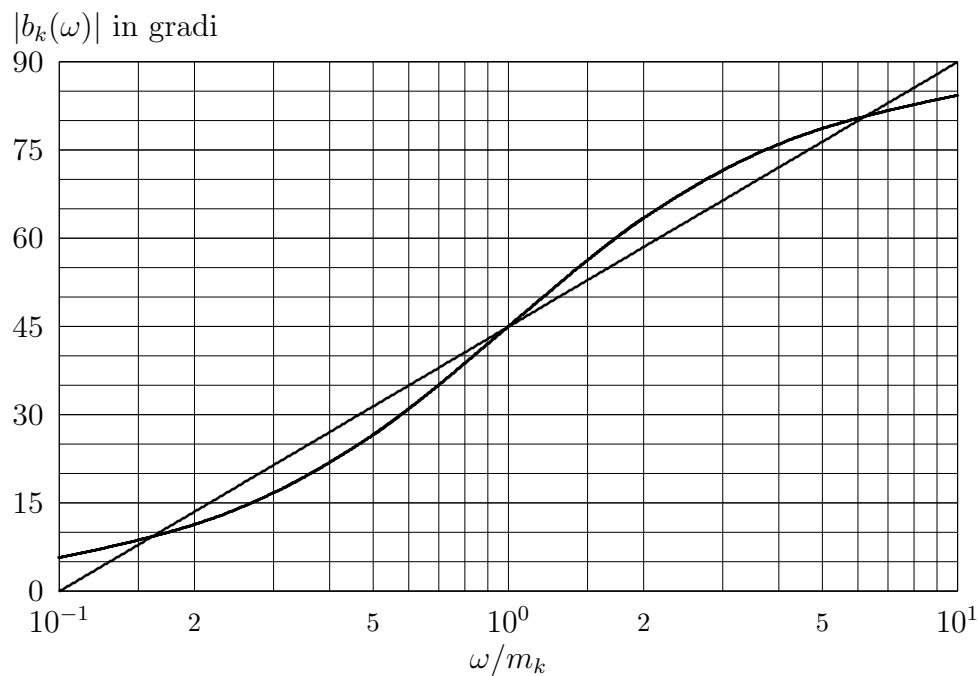
Per entrambi i diagrammi si nota che se le ascisse non fossero tarate in funzione del rapporto  $\omega/m_k$  ma fossero riferite ad una generica (specificata) pulsazione di normalizzazione, cioè fossero riferite a  $\omega/\Omega_0$ , allora il punto centrale di ogni diagramma associato a ciascuna radice con modulo  $m_k$  sarebbe collocato esattamente in  $\omega/\Omega_0 = m_k/\Omega_0$ , cioè sarebbe traslato orizzontalmente in modo che l'ascissa del punto centrale coincida con il modulo della radice sulla scala logaritmica.

È chiaro che se questi diagrammi sono associati a zeri di molteplicità  $n_k$ , le corrispondenti ordinate vanno moltiplicate per il numero positivo  $n_k$ ; se essi sono associati a poli di molteplicità  $|n_k|$ , le corrispondenti ordinate vanno moltiplicate per il numero negativo  $n_k$ , quindi vanno ribaltate dall'alto in basso e scalate in proporzione a  $|n_k|$ .

- Un'ultima avvertenza: il *punto centrale* si chiama proprio così e solo così dovrebbe essere sempre nominato. Generazioni di ingegneri e di tecnici hanno usato un linguaggio



**Figura 4.6.** Diagramma di Bode del modulo di un fattore associato ad una radice reale



**Figura 4.7.** Diagramma di Bode della fase di un fattore associato ad una radice reale

più spiccio e meno preciso, chiamando il punto centrale di un diagramma associato ad uno zero semplicemente “zero” e chiamando il punto centrale di un diagramma associato a un polo semplicemente “polo”. Questo modo di esprimersi è molto pericoloso perché induce a pensare che lo zero o il polo siano sull’asse  $\omega$ , il che è palesamente falso; l’asse  $\omega$  del piano  $p$  ha poco a che vedere con la scala logaritmica dei diagrammi di Bode; sulla scala logaritmica sono collocati i punti centrali dei diagrammi di modulo e di fase di zeri e poli, i quali zeri e poli, invece, sono collocati sull’asse reale del piano  $p$ . Pur di non equivocare, si può continuare ad usare il linguaggio spiccio, ma bisogna stare bene attenti a non equivocare<sup>4</sup>.

#### 4.6.2 Contributo della radice nell’origine

È vero che l’origine fa parte anche dell’asse reale, ma una radice posta nell’origine ha modulo nullo e fase indeterminata; quanto detto nella sezione precedente per la radice nell’origine non può essere applicato; tuttavia il problema è talmente semplice che non

- vale la pena di farci una teoria sopra; i contributi al modulo e alla fase sono dati da

$$a_0(\omega) = 20 \log \frac{\omega}{\Omega_0} \quad (4.17a)$$

$$b_0(\omega) = 90^\circ \quad (4.17b)$$

Il diagramma di modulo è una retta inclinata di 20 dB/decade e il diagramma di fase è una retta orizzontale collocata all’altezza di 90°.

Naturalmente se la radice nulla è uno zero di molteplicità  $n_0$ , i suoi contributi vanno moltiplicati per il numero positivo  $n_0$ , mentre se è un polo di molteplicità  $|n_0|$  i suoi contributi vanno moltiplicati per il numero negativo  $n_0$ .

#### 4.6.3 Contributi delle coppie di radici complesse e coniugate

- Le radici complesse sono sempre a coppie complesse e coniugate, quindi sebbene non ci sia nulla di strano se le si esaminasse separatamente, appare del tutto naturale considerarle i contributi congiuntamente. Detti contributi, dopo aver messo in evidenza modulo e fase delle radici, sono

$$a_k(\omega) = 10 \log \left[ (\omega/m_k)^4 + (4 \sin^2 \vartheta_k - 2)(\omega/m_k)^2 + 1 \right] \quad (4.18a)$$

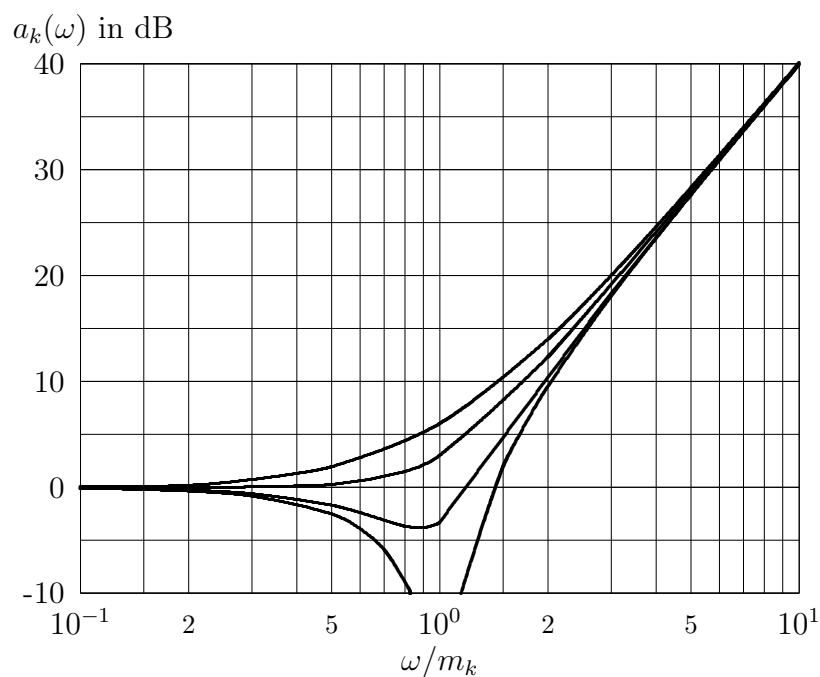
$$b_k(\omega) = \frac{180^\circ}{\pi} \arctan \frac{2(\omega/m_k) \sin \vartheta_k}{1 - (\omega/m_k)^2} \quad (4.18b)$$

e i loro diagrammi sono riportati nelle figure 4.8 e 4.9.

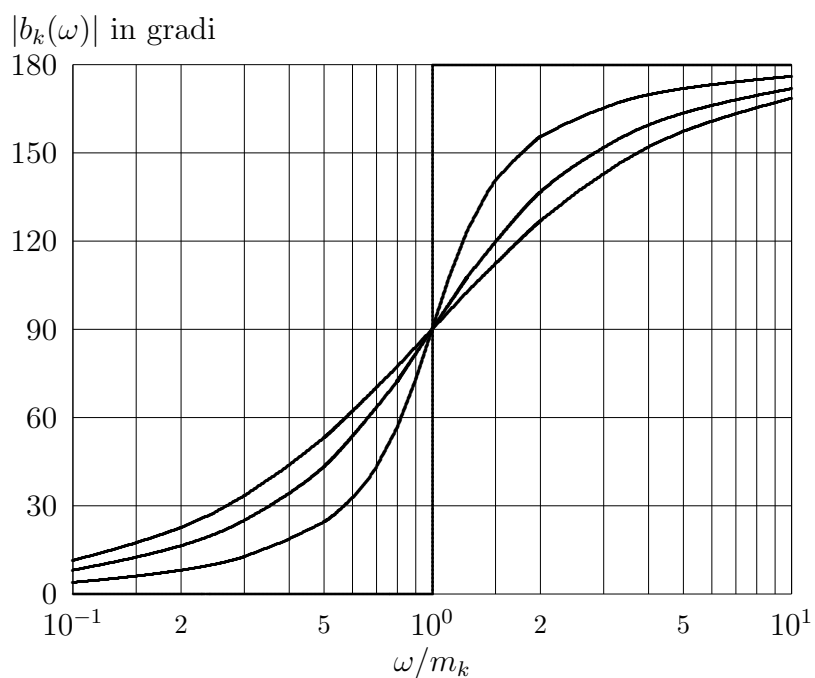
Anche in questo caso è opportuno fare qualche commento.

Per le radici complesse l’angolo  $|\vartheta_k|$  può assumere qualunque valore compreso fra 0° (radici puramente immaginarie) e 90° (due radici reali coincidenti); inoltre  $\vartheta_k$  è positivo se la radice superiore è nel secondo quadrante, mentre è negativo se la radice si trova nel primo quadrante. Quindi siamo in presenza di famiglie di diagrammi. Quando le radici sono abbastanza distanti dall’asse  $\omega$ , le curve sono dolci e poco diverse da quelle delle

<sup>4</sup> Uomo avvisato è mezzo salvato!



**Figura 4.8.** Famiglia di diagrammi del modulo di fattori contenenti radici complesse. A pari ascissa le curve più alte corrispondono a valori di  $|\vartheta_k|$  maggiori. Le curve estreme corrispondono a  $\vartheta_k = 0^\circ$  e a  $|\vartheta_k| = 90^\circ$ .



**Figura 4.9.** Famiglia di diagrammi della fase di fattori contenenti radici complesse. Le curve più dolci corrispondono a valori di  $|\vartheta_k|$  maggiori. Le curve estreme corrispondono a valori di  $\vartheta_k = 0^\circ$  (degenerata in una spezzata) e  $|\vartheta_k| = 90^\circ$ .

radici reali, salvo le ordinate pressappoco raddoppiate, certamente raddoppiate quelle degli asintoti, visto che si riferiscono a una coppia di radici e non a una radice sola.

Le differenze più marcate si notano con le radici vicine all'asse immaginario, perché in questo caso il modulo non è più monotono, ma presenta una depressione che sprofonda fino a  $-\infty$  quando le radici raggiungono l'asse  $\omega$ , e la fase degenera in una spezzata in

- corrispondenza del punto centrale.

È il solito fenomeno della risonanza che si fa sentire in maniera diversa sulla risposta in frequenza rispetto a quanto avviene nella risposta temporale. Si noti che le radici con distanza angolare pari a  $\vartheta_k$  dall'asse  $\omega$  hanno un  $Q$  (vedi esempio 3.11) pari a  $1/(2 \sin \vartheta_k)$ , che vale 0,5 per una coppia di radici reali coincidenti e vale infinito per una coppia di radici puramente immaginarie.

- Quando quindi abbiamo radici vicine all'asse  $\omega$ , la distanza essendo misurata come distanza angolare mediante l'angolo  $\vartheta_k$ , ci troviamo di fronte a fenomeni di forte risonanza, che comporta risposte all'impulso e risposte al gradino poco smorzate (fenomeno di *ringing*) e forti cambiamenti nella risposta in frequenza. Le radici vicine all'asse  $\omega$  sono
- caratteristiche dei filtri selettivi (repentini cambiamenti nella risposta in frequenza), e questo farebbe pensare ad una caratteristica positiva; nello stesso tempo se un sistema, per esempio un braccio di posizionamento o l'indice di uno strumento di misura, è affetto dal fenomeno di ringing, raggiunge l'equilibrio in tempi lunghissimi e, se viene eccitato con un'eccitazione di frequenza prossima a quella di risonanza, esegue delle risposte di grande ampiezza, che potrebbero non solo portarlo fuori di linearità, ma persino portarlo a danneggiarsi; in questi casi la risonanza è una caratteristica negativa. Ecco perché è opportuno sapere com'è la risposta in frequenza e quanto distano i poli complessi dall'asse  $\omega$ , in quanto a seconda delle applicazioni bisogna sapere eventualmente correggere le caratteristiche non desiderate.

Quando le radici sono vicine all'asse  $\omega$  non conviene approssimare la risposta in frequenza con gli asintoti, perché si commetterebbero errori grossolani. Si può verificare per via di calcolo che l'angolo  $|\vartheta_k| = 45^\circ$  è l'elemento di separazione fra le curve di modulo che sono monotone e quelle che presentano una depressione. Quindi quando il  $Q$  delle radici è minore o uguale a  $1/\sqrt{2}$  le curve sono monotone. In questi casi le risposte approssimate con gli asintoti sono perfettamente accettabili.

Per usare i diagrammi asintotici della fase bisognerebbe usare una spezzata dove l'elemento obliquo ha una pendenza dipendente da  $\vartheta_k$ ; tale pendenza sarebbe di  $(90/\sin \vartheta_k)^\circ/\text{decade}$ , cosicché il tratto obliquo passa per il punto centrale alla quota di  $90^\circ$  e interseca i due asintoti  $\sin \vartheta_k$  decadi prima e dopo il punto centrale. Considerando che le curve di fase approssimate con curve a spezzate producono errori spesso grossolani, non vale la pena di darsi troppo da fare per tracciare la curva di fase mediante una curva a spezzate.

Come negli altri casi, se le radici sono multiple, le rispettive ordinate devono essere moltiplicate per la molteplicità e, se si tratta di poli, devono venire capovolte.



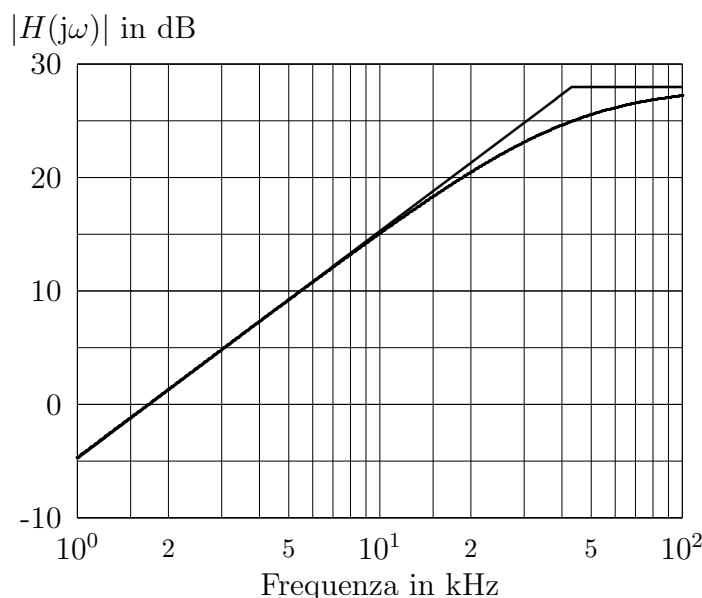
**Esempio 4.6** — Negli apparecchi elettronici i moduli delle radici delle funzioni di trasferimento sono di solito o tutti inferiori al valore corrispondente alla più bassa componente spettrale del segnale da trattare; oppure sono tutti più alti della più alta componente spettrale del segnale, oppure permettono di separare le radici in due sottoinsiemi, uno formato da radici con moduli “piccoli” e l'altro formato da radici con moduli “grandi”; il criterio per

sapere se sono “grandi” o “piccoli” è quello di controllarne il valore a fronte dello spettro del segnale da trattare.

Un circuito che presentasse una funzione di trasferimento

$$H(p) = 25 \frac{p}{p + 270 \mu\text{s}^{-1}}$$

ha la radice nell’origine con modulo incontestabilmente “piccolo”, visto che è nullo; l’altra radice ha un modulo “piccolo” rispetto a segnali la cui più bassa componente dello spettro si aggira attorno a  $2500 \mu\text{s}^{-1} \div 3000 \mu\text{s}^{-1}$  corrispondenti a frequenze dell’ordine dei 400 kHz. Scegliendo la frequenza di normalizzazione  $F_0 = 1 \text{ kHz}$  corrispondente a  $\Omega_0 = 2\pi \mu\text{s}^{-1}$ , possiamo tracciare il diagramma di modulo come indicato nella figura 4.10.



**Figura 4.10.** Modulo di una funzione passaalto

Si noti comunque che per  $p \rightarrow 0$  il modulo di  $H(p)$  tende a zero e la fase tende a  $90^\circ$ . Per  $p \rightarrow \infty$  il modulo di  $H(p)$  tende a 25 e la fase a zero; il valore naturale 25 corrisponde a  $27,96 \text{ dB} \approx 28 \text{ dB}$ .<sup>5</sup> Ci aspettiamo pertanto che il modulo inizialmente cresca linearmente con una pendenza di 20 dB/decade e poi al punto centrale del polo, 42,97 kHz, si adagi sull’asintoto orizzontale; il diagramma della figura 4.10 mostra appunto quanto si è appena descritto qualitativamente. Come si vede anche dalla figura, il diagramma ottenuto con gli asintoti approssima abbastanza bene la curva reale.

Per altro vediamo chiaramente che la curva di risposta trasmette bene le alte frequenze, mentre attenua le basse frequenze, quindi si tratta di una funzione *passaalto*. La frequenza di taglio a 3 dB è proprio quella del punto centrale, cioè di 42,97 kHz e la banda passante a 3 dB va dalla frequenza di taglio all’infinito.

△

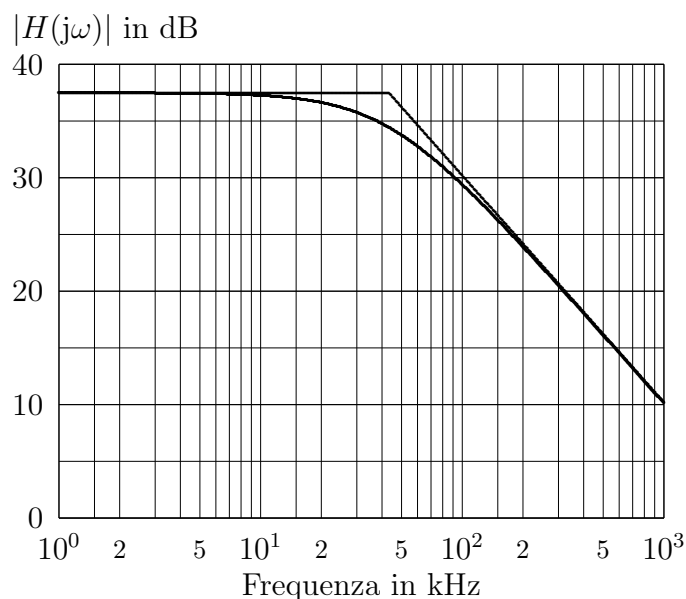
<sup>5</sup> È opportuno esercitarsi a calcolare i decibel a mente; la cosa è più facile di quello che si può immaginare, se ci si abitua a sfruttare le proprietà dei logaritmi e l’interpolazione lineare; in questo caso è  $25 = 100/4$ ; il valore 100 corrisponde a 40 dB, il valore 4 =  $2^2$  corrisponde a  $2 \times 6 \text{ dB}$ ; perciò 25 corrisponde a  $40 \text{ dB} - 12 \text{ dB} = 28 \text{ dB}$ .



**Esempio 4.7** — Si consideri ora la funzione di trasferimento

$$H(p) = \frac{75}{1 + p3,704 \text{ ns}}$$

Si noti che essa ha uno zero all'infinito, sicuramente ad alta frequenza e un polo corrispondente a un punto centrale di  $270 \mu\text{s}^{-1}$ , come nell'esempio precedente; ma si noti come è stata scritta la funzione, non con il suo polo bene in evidenza, ma mediante la costante di tempo corrispondente. Così scritta la funzione è più esplicitamente una funzione *passabasso*, che amplifica 75 volte alle basse frequenze e attenua le alte frequenze. Ci aspettiamo dunque un'amplificazione di 37,5 dB alle basse frequenze<sup>6</sup> e una caduta del modulo con una pendenza di 20 dB/decade. Infatti è proprio ciò che ci mostra la figura 4.11.



**Figura 4.11.** Modulo di una funzione passabasso

- La frequenza di taglio a 3 dB continua ad essere la frequenza di 42,97 kHz, come nell'esempio precedente, ma ora la banda passante a 3 dB va da zero a quella frequenza.



**Esempio 4.8** — Sia ora da esaminare l'andamento del modulo della funzione

$$H(p) = \frac{p}{p + 315 \text{ ms}^{-1}} 33 \frac{1}{1 + p30 \text{ ns}}$$

che, come si vede, è stata scritta mettendo in evidenza un termine passaalto con frequenza a 3 dB a 50,13 kHz, e un termine passabasso con frequenza a 3 dB a 5,305 MHz. Se non ci

<sup>6</sup>  $75 = 100 \times 0,75$ ; 0,75 è il 25% in meno dell'unità; ogni 10% corrisponde a circa 1 dB; quindi  $75 \Rightarrow 40 \text{ dB} - 2,5 \text{ dB} = 37,5 \text{ dB}$ ; il valore esatto è invece a 37,5012 dB.

fossero questi termini, l'amplificazione sarebbe pari a 33, corrispondente a 30,4 dB,<sup>7</sup> ma i termini dipendenti da  $p$  tolgono le basse frequenze e le alte frequenze; quello che resta è una funzione *passabanda*. Ecco infatti il risultato aspettato nella figura 4.12. ■

D'altra parte ora che siamo di fronte ad una funzione semplice, ma pur sempre con due poli, che relazione ha la fase approssimata con i diagrammi a spezzate e il diagramma vero? Lo si può confrontare nella figura 4.13.

A parte le inevitabili imprecisioni grafiche, il diagramma a spezzate e il diagramma reale sono assai simili; l'esempio particolarmente semplice non deve però lasciar pensare che sia sempre così; conviene verificare di volta in volta che l'approssimazione sia accettabile.

Si noti che in questo esempio di filtro passabanda le frequenze di taglio a 3 dB sono due: quella inferiore a 50,13 kHz e quella superiore a 5,305 MHz. La banda passante a 3 dB è compresa fra queste due frequenze. ■

△

▽

**Esempio 4.9** — Il circuito della figura 4.14 rappresenta il circuito equivalente per piccoli segnali di un amplificatore.

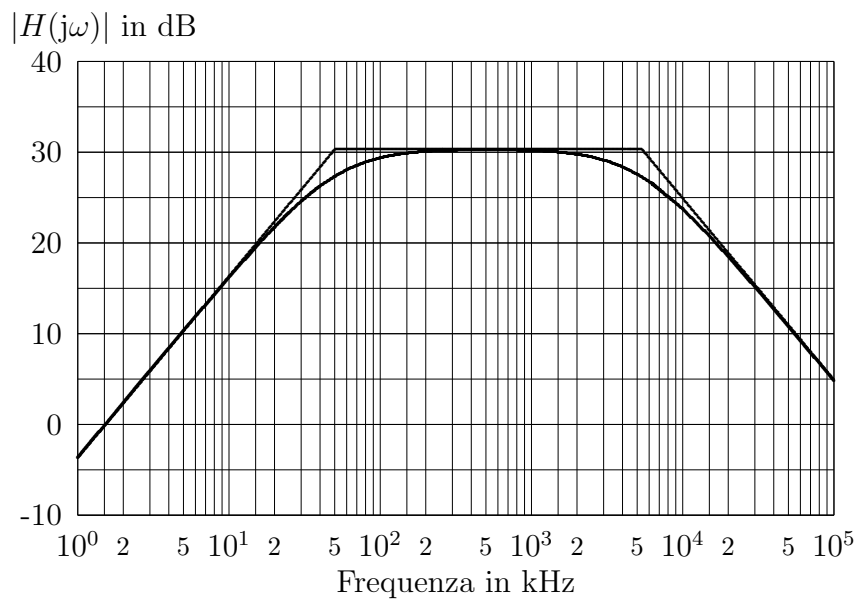
L'analisi del circuito porta a

$$\begin{aligned}
 V_g &= V_{in} \frac{R_2}{R_+ R_2 + \frac{1}{pC_1}} \\
 V_s &= \frac{g_m(V_g - V_s)}{G_3 + pC_2} \\
 V_{out} &= -g_m(V_g - V_s)R_4 \\
 H(p) &= \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{pC_1 R_2}{1 + pC_1(R_1 + R_2)} \frac{g_m R_4(1 + pC_2 R_3)}{1 + g_m R_3 + pC_2 R_3} \\
 &= \frac{p}{p + 0,5 \text{ s}^{-1}} (-1,852) \frac{1 + p22 \text{ ms}}{1 + p4,07 \text{ ms}}
 \end{aligned}$$

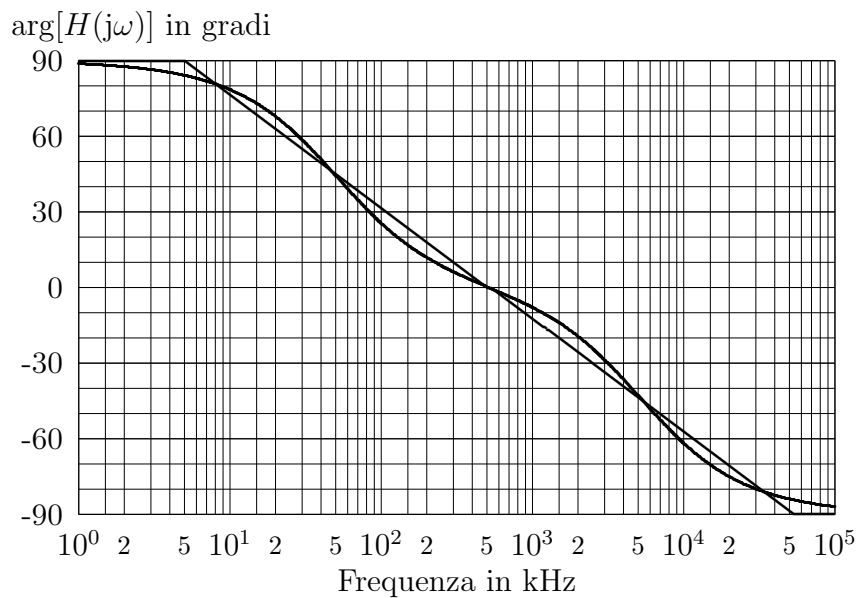
dove nell'ultima espressione si sono arbitrariamente separate le radici in due sottoinsiemi: quelle che influiscono sulla bassa frequenza e quelle che influiscono sull'alta frequenza. In realtà è una scelta infelice, come un modesto disegno con le spezzate permette di constatare: figura 4.15. Infatti dopo i 40 Hz la funzione di trasferimento mantiene il modulo sostanzialmente costante ed è prevedibile che esso sia usato per segnali nella gamma delle frequenze acustiche, piuttosto che per frequenze così basse da raggiungere solamente le frequenze subacustiche. Tuttavia si svolge ugualmente questo esempio facendo finta di niente, per constatare che la scelta arbitraria degli intervalli di frequenza bassi o alti è veramente arbitraria; se la scelta viene fatta tenendo conto anche della realtà fisica, è meglio, ma si arriva al risultato lo stesso.

Nello stesso tempo anche così non è difficile calcolare o leggere sul diagramma l'amplificazione alle "alte" frequenze, trovando che l'amplificatore guadagna 20 dB.

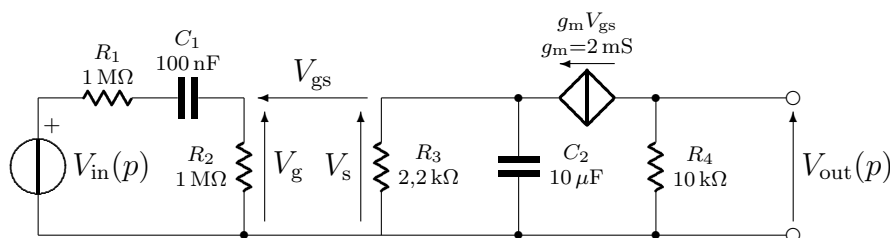
<sup>7</sup> 33 = 100/3 meno l'uno per cento; il valore 3 corrisponde a quasi 10 dB; infatti 10 dB corrisponde esattamente a  $\sqrt{10} = 3,16$  e siccome 3 è il 5% più piccolo, corrisponde a 9,5 dB; c'è poi quell'uno per cento, un decimo del 10%, che corrisponde a 0,1 dB; perciò  $33 \Rightarrow 40 \text{ dB} - 9,5 \text{ dB} - 0,1 \text{ dB} = 30,4 \text{ dB}$ .



**Figura 4.12.** Modulo di una funzione passabanda



**Figura 4.13.** Fase di una funzione passabanda



**Figura 4.14.** Circuito equivalente di un amplificatore

Per quanto riguarda la fase, vediamo che la costante moltiplicativa negativa aggiunge  $-180^\circ$  alla fase dipendente dai termini contenenti la pulsazione complessa. Nelle figure 4.15 e 4.16 possiamo vedere le curve calcolate esattamente insieme a quelle ottenute con l'approssimazione a spezzate.

Bisogna riconoscere che l'approssimazione a spezzate della fase non è proprio delle migliori: essa dà luogo ad errori dell'ordine di  $13^\circ$ , che nella grande maggioranza delle applicazioni sono eccessivi. Tuttavia nonostante l'approssimazione non eccellente quei diagrammi rendono abbastanza chiaro qual è l'andamento generale della fase.

L'amplificatore in questione si comporta sostanzialmente come un passabasso: attenua le basse frequenze e amplifica in modo uniforme le alte frequenze. Però vicino all'inizio della banda passante non si ha una pendenza uniforme e si può leggere il valore della frequenza di taglio a 3 dB solo svolgendo i calcoli, oppure tracciando la curva del modulo esattamente, non mediante le spezzate.

△

## Esercizi

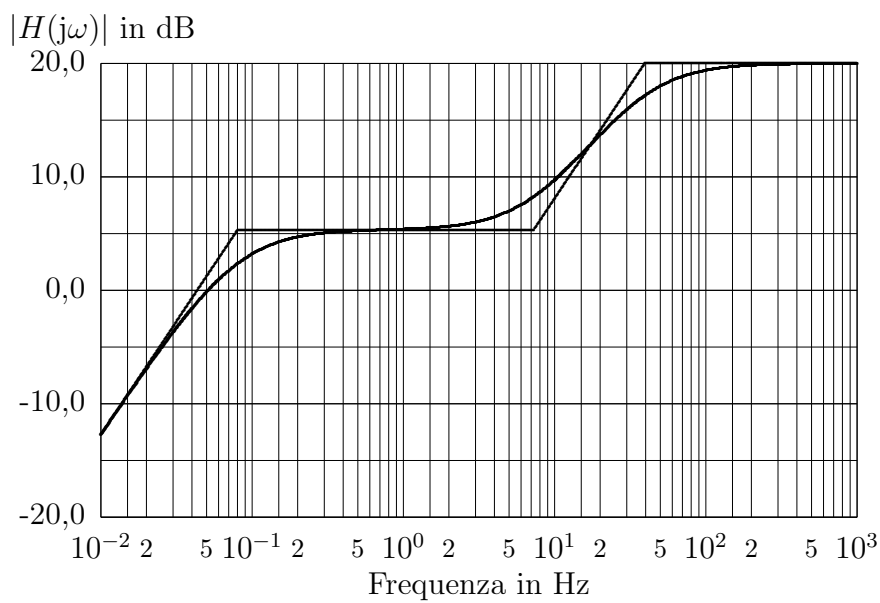
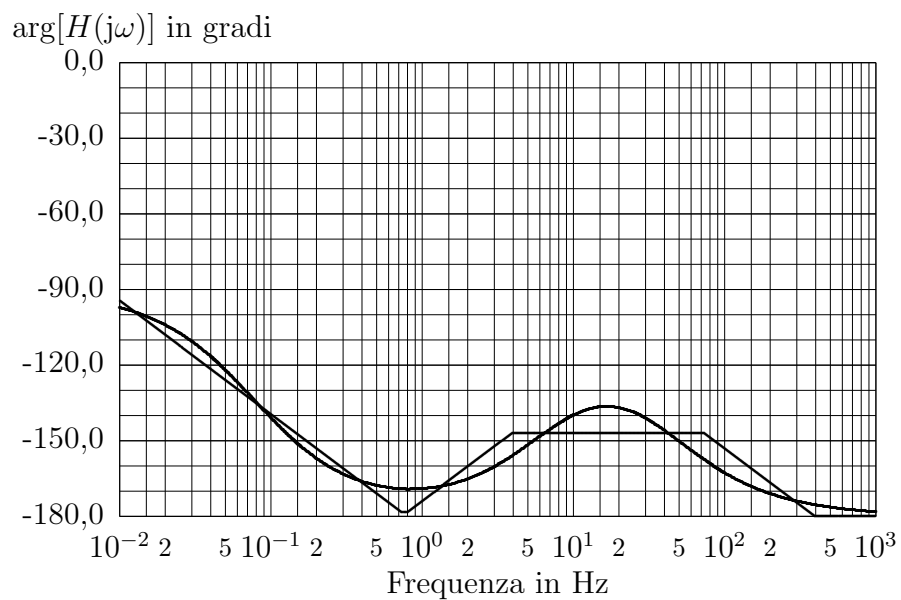
**4.1 Determinazione del coefficiente di risonanza** Sia dato un risonatore parallelo di cui si vuole determinare il coefficiente di risonanza; si supponga di rappresentare le perdite complessive prodotte tanto dall'induttore quanto dal condensatore mediante una sola resistenza parallelo come è mostrato nella figura E-4.1. In laboratorio si applica un voltmetro elettronico ai capi del risonatore che viene alimentato con un generatore di corrente avente valore efficace costante ma regolabile in frequenza a piacere entro un intervallo conveniente. Manovrando la manopola che regola la frequenza del generatore, il voltmetro segna che il risonatore è in risonanza quando la frequenza è di 860 kHz; a questa frequenza esso misura una tensione di 27,2 V. Aumentando la frequenza a 866,15 kHz, la tensione ai capi del risonatore diminuisce fino a 13 V. Ricordando che la curva di risonanza è sostanzialmente simmetrica (entro un intervallo ristretto di frequenza) rispetto alla frequenza di risonanza, determinare il coefficiente di risonanza  $Q$  del risonatore. [4 min]

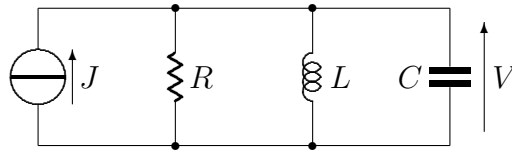
**4.2  $Q$  come inverso della banda relativa a 3 dB** Alla luce dei risultati del precedente esercizio 4.1 spiegare perché il  $Q$  di un risonatore si definisce anche come inverso della banda relativa a 3 dB

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{3\text{dB}}}$$

**4.3 Q-metro** La figura E-4.2 mostra lo schema di principio di uno strumento di laboratorio che serve per misurare il  $Q_L$  degli induttori, e perciò prende il nome di  $Q$ -metro. ■

Versione del 3 ottobre 2001

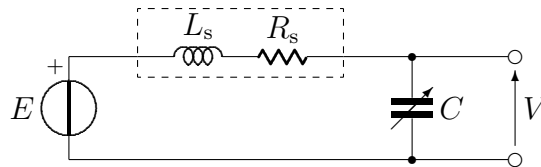
**Figura 4.15.****Figura 4.16.**



**Figura E–4.1.** Per l'esercizio 4.1

Esso consta di un generatore di tensione sinusoidale molto preciso, regolabile in frequenza e avente un'impedenza interna trascurabile, di un condensatore tarato, variabile, in aria, avente perdite trascurabili, e di un voltmetro elettronico con impedenza interna grandissima. A due morsetti accessibili viene collegato l'induttore da misurare, indicato entro il riquadro tratteggiato nella figura E–4.2. Per misurare il coefficiente di qualità dell'induttore ad una certa frequenza, vi si regola la frequenza del generatore e poi si varia il condensatore variabile, leggendone il valore sulla scala graduata, fino a portare il circuito in risonanza; in queste condizioni si misura la tensione ai capi del condensatore e, conoscendo la tensione del generatore, si calcola il  $Q_L$  dell'induttore; in realtà la scala del voltmetro è tarata direttamente con i valori di  $Q_L$ , poiché il calcolo è stato fatto una volta per tutte.

Si supponga che il generatore di tensione produca una forza elettromotrice di 20 mV, che la frequenza di misura sia di 800 kHz e che si raggiunga la risonanza variando il condensatore fino al valore di 282 pF; si supponga che in queste condizioni la tensione indicata dal voltmetro ai capi del condensatore valga 4,7 V. Calcolare il valore di  $Q_L$  e i parametri  $L_s$  e  $R_s$  del modello serie dell'induttore. [5 min]



**Figura E–4.2.** Per l'esercizio 4.3

**4.4 Adattamento energetico e rifasamento** L'adattamento energetico e il rifasamento sono la stessa cosa? Se sì spiegare perché, se no indicare le differenze.

**4.5 Resistenza interna** Una lavastoviglie domestica ha una potenza nominale di 2 kW che assorbe quando sono in attività tutte le parti elettriche interne dell'apparecchio (pompe varie, riscaldatore, ecc.); supponendo che nel suo complesso la macchina sia già rifasata, a quanto ammonterebbe la sua resistenza interna equivalente?

**4.6 Condensatore di rifasamento** L'alimentatore del cellulare ha una potenza di 1 W, e una tensione nominale in uscita di 3,6 V continui. Esso dispone al suo ingresso di un piccolo trasformatore induttivo del quale sono trascurabili le resistenze degli avvolgimenti e l'induttanza di dispersione; l'induttanza di magnetizzazione primaria valga 2 H. Che condensatore bisogna mettere in parallelo al primario del trasformatore perché l'alimentatore sia rifasato? Il rifasamento deve essere approssimativamente corretto tanto in Europa quanto nel Nordamerica.

**4.7 Resistenza del dispersore di terra** Normalmente negli appartamenti la Compagnia Elettrica eroga l'energia elettrica limitandone la potenza mediante un sezionatore

magnetotermico tarato per scattare quando la corrente supera il valore corrispondente a 3,3 kW secondo il contratto sottoscritto dall'utente. L'impianto dell'appartamento deve essere dotato di sezionatore differenziale tarato a non più di 30 mA, e di un impianto di terra il cui dispersore deve garantire che in caso di guasto, in assenza di intervento del differenziale, la corrente massima erogabile non porti nessun apparecchio elettrico a superare la tensione efficace di 50 V. Qual è la resistenza massima che può avere il dispersore di terra?

**4.8 Risposta in frequenza** Un circuito amplificatore ha una funzione di trasferimento pari a

$$A_{vs}(p) = -25 \frac{p - 0,2}{(p + 0,1)(0,0625p^2 + 0,25p + 1)}$$

Tracciare i diagrammi asintotici di Bode del modulo e della fase, tenendo conto che la pulsazione è normalizzata e la frequenza di normalizzazione vale 100 Hz.

# Capitolo 5

## I doppi bipoli

### 5.1 Generalità

I compiti principali dei sistemi elettronici sono quelli di elaborare segnali; un generatore applica un segnale a un circuito elettronico, il segnale viene elaborato, e il circuito trasferisce il segnale elaborato a un utilizzatore.

Tipicamente perciò il sistema elettronico è un circuito a due porte, una destinata all'entrata del segnale "grezzo", l'altra destinata all'uscita del segnale elaborato. Non mancano esempi di sistemi a tre o più porte, ma questi rappresentano più l'eccezione che la regola.

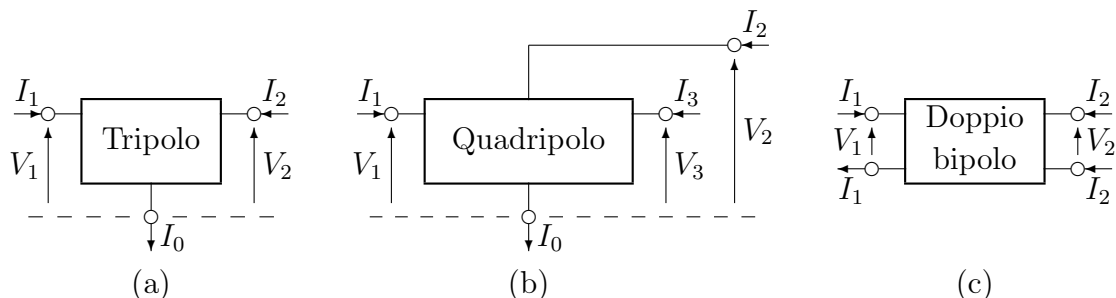
L'elaborazione a cui il segnale (analogico nei sistemi analogici lineari, oggetto di questo testo) può essere sottoposto può consistere nell'amplificazione, nell'inversione, nel filtraggio, nell'equalizzazione d'ampiezza, o di fase o di ritardo. La modulazione e la demodulazione possono essere visti in parte come processi lineari, ma sono intrinsecamente non lineari e quindi qui non se ne parla. D'altra parte la quasi totalità dei sistemi elettronici a cui si è fatto cenno verranno trattati in corsi successivi. Qui è importante imparare a trattare i circuiti a due porte come si deve, sapendoli innanzi tutto riconoscere, e poi sapendoli maneggiare in diversi modi, così da poterli connettere fra loro nei modi desiderati.

I sistemi diversi da quelli elettrici o elettronici possono svolgere funzioni simili di elaborazione del segnale, ma più spesso i "segnali" sono le prestazioni stesse dei sistemi stessi in condizioni normali di esercizio.

### 5.2 Il doppio bipolo

Si definisce *doppio bipolo* un circuito con due porte; esso ha quindi tre o quattro morsetti fra i quali si possono definire certe tensioni e nei quali scorrono certe correnti. Perché il circuito abbia due sole porte sono necessarie alcune condizioni. ■

Con riferimento alla figura 5.1 (a) si può notare che un *tripolo* è intrinsecamente un circuito a due porte; infatti, avendo solo tre morsetti, solo due delle tre tensioni fra coppie di morsetti sono indipendenti, visto che la loro somma algebrica lungo una maglia che comprenda i tre morsetti è nulla. Allo stesso modo solo due correnti sono indipendenti, ■



**Figura 5.1.** Il tripolo, il quadripolo, il doppio bipolo

visto che la loro somma algebrica attraverso un taglio che recida i tre morsetti è nulla. Nella figura si sono scelte come indipendenti le tensioni fra i morsetti 1 e 0 e fra i morsetti 2 e 0; si sono scelte come indipendenti le correnti entranti nei morsetti 1 e 2, mentre la corrente uscente dal morsetto 0 è data dalla somma delle altre due e non è indipendente.

- Con riferimento invece alla figura 5.1 (b) si vede che un quadripolo in generale è caratterizzato da tre tensioni indipendenti e da tre correnti indipendenti; nella figura si sono scelte le tensioni fra i tre nodi numerati da 1 a 3 e il morsetto 0; nello stesso modo si sono scelte come indipendenti le correnti entranti nei morsetti da 1 a 3, mentre la corrente uscente dal morsetto 0 è pari alla somma delle altre tre e non è quindi indipendente. Avendo tre tensioni e tre correnti indipendenti il quadripolo è un circuito a tre porte.
- Con riferimento infine alla figura 5.1 (c) si vede che il doppio bipolo è un quadripolo usato in una maniera un po' particolare; infatti le correnti indipendenti sono solo due, perché quel quadripolo è fatto funzionare in modo che per le due coppie di morsetti indicate la corrente entrante in un morsetto sia uguale alla corrente uscente dall'altro morsetto; siccome solo due correnti sono indipendenti, anche per le tensioni si prendono come indipendenti le due tensioni indicate, senza porre nessuna attenzione ai legami dei potenziali dei vari nodi fra di loro; il doppio bipolo, insomma, è un quadripolo usato in modo che funzioni con solo due porte.

Il tripolo e il doppio bipolo sono entrambi circuiti a due porte; nel tripolo i potenziali dei morsetti inferiori delle due porte sono vincolati ad essere uguali, mentre nel doppio bipolo non esiste nessun legame esplicito; ovviamente quando il doppio bipolo viene innestato in un connettore, i potenziali dei suoi morsetti vengono ad assumere valori ben precisi in relazione a come sono i vincoli imposti dal connettore e dagli altri componenti innestati nel connettore.

- Ogni porta di bipolo, di doppio bipolo, eccetera, può essere *sbilanciata*, *bilanciata* o con potenziali generici.

Si dice *sbilanciata* una porta della quale uno dei morsetti è vincolato al potenziale nullo. Si dice *bilanciata* una porta i morsetti della quale sono a potenziali uguali e opposti. Se non sono verificate né le une né le altre condizioni i potenziali sono generici.

- Un circuito con più porte si dice *sbilanciato* se tutte le sue porte sono sbilanciate;
- un circuito con più porte si dice *bilanciato* se tutte le sue porte sono bilanciate.

Si noti che lo sbilanciamento o il bilanciamento dei potenziali in generale non è una caratteristica del singolo doppio bipolo o del singolo tripolo, ma dipende dai vincoli imposti ai potenziali dal connettore e dagli altri componenti. Talvolta, però, la struttura

interna del doppio bipolo contiene riferimenti specifici a potenziali definiti; in tal caso bisogna stare molto attenti a come tali componenti vengono connessi agli altri; in questi casi il bilanciamento e lo sbilanciamento non dipendono solo dal connettore e dagli altri componenti.

In elettronica si usano molto spesso circuiti sbilanciati; in telefonia fissa si usano molto spesso circuiti bilanciati. Talvolta è necessario trasferire i segnali da circuiti bilanciati a circuiti sbilanciati o viceversa; è evidente dalle definizioni che i circuiti non possono essere collegati direttamente, ma i segnali vanno trasferiti attraverso circuiti che consentano di avere una porta sbilanciata e una bilanciata. A bassa frequenza, specialmente in telefonia, si usano spesso trasformatori, detti *traslatori*, con gli avvolgimenti collegati in modo particolare; sullo stesso nucleo, spesso di forma toroidale, vengono avvolti simultaneamente quattro avvolgimenti, che così vengono ad avere certamente lo stesso numero di spire; gli avvolgimenti vengono collegati a due a due in serie così da ottenere un trasformatore con rapporto spire  $2n : 2n$  e il primario e il secondario sono indistinguibili. Per uno dei due avvolgimenti il nodo centrale viene messo a massa, cioè a potenziale nullo, mentre per l'altro avvolgimento un'estremità viene messa a massa. Il primo avvolgimento viene collegato alla parte bilanciata del circuito, il secondo alla parte sbilanciata; i due avvolgimenti non sono in contatto l'uno con l'altro ma il trasferimento di segnale avviene solo per accoppiamento magnetico; i potenziali dei morsetti primari e secondari non hanno nulla a che vedere gli uni con gli altri, ma solo le tensioni e le correnti di porta sono legate dalle equazioni costitutive del trasformatore; ecco perché è possibile vincolare separatamente i potenziali dei due avvolgimenti attraverso i collegamenti del connettore.

Queste informazioni possono sembrare di lana caprina; non lo sono, perché quando si collegano fra loro doppi bipoli, se non si fa attenzione alla situazione bilanciata/sbilanciata/generica, si rischia di introdurre vincoli non desiderati che riportano il doppio bipolo a funzionare da quadripolo con equazioni costitutive differenti da quelle del doppio bipolo.

### 5.3 Caratterizzazione del doppio bipolo

Assumendo che il doppio bipolo sia inerte, cioè non sia sede di segnali quando è a vuoto o in cortocircuito (quando le sue porte sono a vuoto o in cortocircuito), delle quattro grandezze descrittive, due tensioni e due correnti, due si possono scegliere come grandezze indipendenti, cioè come eccitazioni, e le altre due come grandezze dipendenti dalle prime due, cioè come risposte alle prime due.

Per tradizione si è soliti cominciare scegliendo come indipendenti le due correnti; l'equazione costitutiva del doppio bipolo diventa

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Analogamente se si prendono successivamente come grandezze indipendenti le due tensioni o una tensione e una corrente si ottiene rispettivamente

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= H_{11}I_1 + H_{21}V_2 \\ I_2 &= H_{21}I_1 + H_{22}V_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \hat{H}_{11}V_1 + \hat{H}_{12}I_2 \\ V_2 &= \hat{H}_{21}V_1 + \hat{H}_{22}I_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Cambiando convenzione dei segni per la porta 2, cioè assumendo la convenzione dei generatori con la corrente  $I_2$  uscente, si può ancora avere

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2 \\ I_1 &= CV_2 + DI_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

oppure lasciando la convenzione degli utilizzatori per la porta 2 ma prendendo quella dei generatori per la porta 1

$$\begin{aligned} V_2 &= \hat{A}V_1 + \hat{B}I_1 \\ I_2 &= \hat{C}V_1 + \hat{D}I_1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sembra un esercizio d'algebra; per dargli un aspetto ancora più matematico si potrebbe usare la notazione matriciale, il che si fa spesso, ma non è essenziale.

In realtà le sei descrizioni appena fornite hanno sei diversi significati fisici; inoltre non è detto che uno stesso doppio bipolo sia descrivibile con tutte e sei le descrizioni; se almeno una manca, il doppio bipolo presenta sicuramente qualche cosa di speciale, talvolta di patologico.

Si noti ancora che nelle equazioni non si è indicata la variabile indipendente né delle grandezze descrittive, né dei loro coefficienti. Le grandezze descrittive possono essere

- pensate come valori stazionari, per cui quelle equazioni costitutive valgono “sempre”, proprio perché in regime stazionario non avvengono mai mutamenti.

Le variabili descrittive potrebbero essere pensate come fasori in un regime sinusoidale di pulsazione nota; potremmo indicare la barretta sopra le variabili, come abbiamo fatto nel capitolo 4, ma sarebbe una notazione ridondante; l'abbiamo usata in quel capitolo per tradizione, ma quando si sa di che cosa si sta parlando si tratta di una notazione inutile. I coefficienti che compaiono nelle equazioni da (5.1) a (5.6) allora possono essere esplicitamente indicati come dipendenti dalla pulsazione di lavoro, scrivendo per esempio  $Z_{11}(j\omega)$ . Questa notazione, anch'essa spesso ridondante, può rivelarsi utile in diverse circostanze.

Le variabili descrittive, infine, potrebbero essere pensate come trasformate di Laplace del sistema inizialmente a riposo, oppure in regime cisoidale, e i loro coefficienti sono le funzioni di trasferimento, dipendenti dalla pulsazione complessa  $p$ . Anzi, conviene sempre pensare di essere in questa situazione, perché è la più generale e le altre due non sono altro che le espressioni delle componenti isomorfe rispettivamente alla pulsazione nulla e alla pulsazione  $p = j\omega$ .

### 5.3.1 Significato fisico dei parametri

I parametri  $Z_{ij}$  che compaiono nelle equazioni (5.1) hanno il significato di *impedenze a vuoto*;  $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  sono le impedenze proprie alla porta 1 e alla porta 2 rispettivamente, mentre le altre due impedenze sono le impedenze mutue o di trasferimento fra le due

Versione del 3 ottobre 2001

porte; si badi bene: il primo indice indica la porta dove si osserva la risposta, mentre il secondo indica la porta dove si applica l'eccitazione.

Si noti ancora che ognuno dei quattro parametri  $Z_{ij}$  può venire misurato eseguendo l'esperimento descritto dall'equazione

$$Z_{ij} = \left. \frac{V_i}{I_j} \right|_{I_{k \neq j} = 0}$$

e descritto dalla frase “l'impedenza  $Z_{ij}$  è il rapporto fra la risposta di tensione alla porta  $i$  e l'eccitazione di corrente applicata alla porta  $j$  purché si lasci l'altra porta a vuoto”. Il riferimento al numero di porta  $k$  diverso da quello a cui è applicata l'eccitazione fa sì che l'espressione matematica e la frase (messa al plurale: le altre porte) siano valide anche per circuiti con più di due porte. La parola “a vuoto” è l'espressione comune per indicare che una porta viene terminata con un *circuito aperto* che, appunto, è governato dall'equazione  $I = 0$ .

Analogamente i parametri  $Y_{ij}$  che compaiono nelle equazioni (5.2) prendono il nome di *ammettenze di cortocircuito*; infatti le si può misurare eseguendo l'esperimento descritto matematicamente mediante l'espressione

$$Y_{ij} = \left. \frac{I_i}{V_j} \right|_{V_{k \neq j} = 0}$$

e mediante la frase “l'ammettenza  $Y_{ij}$  è il rapporto fra la risposta di corrente alla porta  $i$  e l'eccitazione di tensione alla porta  $j$ , purché l'altra porta venga mantenuta in cortocircuito”. Anche in questo caso l'espressione matematica e la frase (messa al plurale) valgono per un circuito con più di due porte.

Si sottolinea il fatto che nel caso delle impedenze a vuoto si può, anzi si deve immaginare: (a) di chiudere il circuito fra i generatori di corrente indipendenti  $I_1$  e  $I_2$ ; (b) di inserire dei voltmetri ideali in parallelo alle due porte; (c) di tenere acceso un solo generatore alla volta mentre si mantiene spento l'altro generatore; (d) di misurare le tensioni alle due porte per effetto di un solo generatore di corrente a turno. È chiaro che il generatore di corrente spento è governato dall'equazione  $I = 0$  e quindi è equivalente a un circuito aperto; in certe circostanze è anzi utile non considerare i circuiti aperti come validi componenti dei circuiti, ma è utile pensare al loro posto dei generatori di corrente spenti.

Nella fattispecie dell'esperimento in questione potrebbe venire invece in mente di inserire in serie ai due generatori di corrente due interruttori e forzare il circuito aperto aprendo ora l'uno ora l'altro interruttore; in un laboratorio reale dove non esistono generatori ideali, la cosa sarebbe anche immaginabile, pur di prendere le dovute precauzioni; in un laboratorio reale un generatore di corrente “ideale” verrebbe approssimato con un generatore di tensione con forza elettromotrice elevatissima in serie con una resistenza elevatissima; quando l'interruttore è aperto il generatore è a vuoto e si rischia di prendere delle “scosse” tali da ricordarsi in futuro di non commettere più un simile errore<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Per fortuna in laboratorio, anche se non esistono i generatori ideali, non è necessario ricorrere a tensioni elevate; basta mettere un amperometro in serie a un generatore qualsiasi e rilevare mediante i voltmetri le tensioni che interessano e la corrente che alimenta il circuito mediante l'amperometro. Bisogna però ricordarsi di chiudere l'altra porta solo sul voltmetro (equivalente a un circuito aperto) senza generatori, accessi o spenti che siano.

Nell'esperimento per misurare le ammettenze di cortocircuito, analogamente, basta usare generatori ideali di tensione e amperometri e leggere le risposte sugli amperometri mentre si accende un generatore di tensione alla volta, lasciando l'altro spento. Che non venga in mente di lasciarlo acceso e di metterlo in cortocircuito mediante un interruttore in parallelo; l'effetto pirotecnico a cui si andrebbe incontro, sempre che non vi siano altri danni, permetterebbe di ricordare di non connettere mai più un generatore di tensione in cortocircuito.

Gli esperimenti descritti qui e nel seguito sono esperimenti da svolgere nel pensiero; quello che in realtà si vorrebbe fare sarebbe di misurare risposte isomorfe ad eccitazioni cisoidali per un'infinità di valori della pulsazione complessa; è chiaro che si tratta di esperimenti ideali; solo in regime sinusoidale e in regime stazionario si riescono ed eseguire delle misure vere e proprie, ma gli esperimenti ideali descritti servono più per avere le idee chiare quando si devono "calcolare" le impedenze o le ammettenze definite dalle espressioni e dalle frasi suddette. Servono per chiudere il circuito correttamente mediante il generatore di prova (generatore di corrente o di tensione), per inserire correttamente il misuratore della risposta e, infine, per chiudere correttamente l'altra porta.

- I parametri  $H_{ij}$  e  $\hat{H}_{ij}$  che compaiono nelle equazioni (5.3) e (5.4) si chiamano *parametri ibridi*; la parola "ibrido" nasce dal fatto che essi non sono dimensionalmente omogenei ma sono due amplificazioni, un'impedenza e un'ammettenza; descriveremo il significato solo dei parametri  $H_{ij}$  perché i parametri  $\hat{H}_{ij}$  hanno gli stessi significati pur di scambiare la porta 1 con la porta 2.

Il loro significato fisico deriva dagli esperimenti descritti dalle formule

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} & H_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \\ H_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} & H_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned}$$

Come si vede  $H_{11}$  e  $H_{21}$  sono misurati mantenendo la porta 2 in cortocircuito (o meglio mantenendo spento il generatore  $V_2$ ); invece  $H_{12}$  e  $H_{22}$  sono misurati mantenendo la porta 1 a vuoto (o meglio mantenendo spento il generatore  $I_1$ );  $H_{11}$  è un'impedenza,  $H_{22}$  è un'ammettenza,  $H_{12}$  è un'amplificazione di tensione e  $H_{21}$  è un'amplificazione di corrente.

La rappresentazione di un circuito con molte porte, due o più di due, mediante i parametri ibridi è una delle più generali e comprende le rappresentazioni mediante le impedenze a vuoto e mediante le ammettenze di cortocircuito come casi particolari. Si immagini un circuito con  $N$  porte delle quali le prime  $K$  sono eccitate in corrente e le restanti  $N - K$  sono eccitate in tensione. Le equazioni (5.3) possono ora essere lette in termini matriciali, con  $H_{11}$  che rappresenta la matrice  $K \times K$  che lega le tensioni delle prime  $K$  porte con le correnti delle prime  $K$  porte, quando le restanti  $N - K$  porte sono chiuse su cortocircuiti (su generatori di tensione spenti); con  $H_{12}$  che rappresenta la matrice... Se  $K = N$  tutte le porte sono eccitate in corrente e la matrice  $H_{11}$  coincide con la matrice delle impedenze a vuoto; se  $K = 0$  nessuna porta è eccitata in corrente, ma tutte le porte sono eccitate in tensione e la matrice  $H_{22}$  coincide con la matrice delle ammettenze di cortocircuito.

Si osservi ancora che tutti i parametri ibridi sono rapporti fra risposte ed eccitazioni, così come lo sono le impedenze a vuoto e le ammettenze di cortocircuito, che ne sono solo dei casi particolari.

Non succede più così con i *parametri di catena* o *parametri di trasmissione*  $A, B, C, D$  e  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  delle equazioni (5.5) e (5.6); qui si descriverà il significato fisico solo dei parametri della catena diretta delle equazioni (5.5). Il loro significato fisico deriva dagli esperimenti descritti dalle seguenti espressioni

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} & B &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \\ C &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} & D &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned}$$

Si nota subito che tutti e quattro questi parametri sono rapporti fra eccitazioni e risposte, non fra risposte ed eccitazioni; sono tutti e quattro reciproci di funzioni di trasferimento. Il discorso vale per tutti e quattro, ma la spiegazione viene mostrata solo per il parametro  $A$ . Si vede subito, infatti, che se  $I_2 = 0$  la porta 2 non può essere quella eccitata, perciò l'eccitazione deve essere applicata alla porta 1 e  $V_1$  è l'eccitazione e  $V_2$  è la risposta.

### 5.3.2 Trasformazione da una rappresentazione all'altra

Un doppio bipolo senza “stranezze” può essere descritto indifferentemente da una qualunque delle sei rappresentazioni date dalle equazioni (5.1)–(5.6); se un dato doppio bipolo non ammette una o più rappresentazioni si dice che è *patologico*; non è un problema di particolare difficoltà quello di passare da una rappresentazione all'altra, ma per esaminare dove possono essere le patologie e come queste si manifestino sulle equazioni costitutive dei doppi bipoli conviene impostare il problema in modo generale.

Supponiamo che il doppio bipolo sia caratterizzato da una qualunque rappresentazione fra le sei descritte, e senza perdita di generalità supponiamo che questa descrizione avvenga mediante le impedenze a vuoto; scriviamo allora il sistema di equazioni in forma omogenea e per maggiore ordine usiamo la notazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -Z_{11} & -Z_{12} \\ 0 & 1 & -Z_{21} & -Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supponiamo ora di voler ottenere i parametri ibridi  $H_{ij}$ ; riordiniamo allora le colonne della matrice in modo che le prime due incognite siano  $V_1$  e  $I_2$  e le ultime due siano nell'ordine  $I_1$  e  $V_2$ ; otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -Z_{12} & -Z_{11} & 0 \\ 0 & -Z_{22} & -Z_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \\ I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Riportiamo ora a secondo membro le seconde due colonne e risolviamo il sistemino  $2 \times 2$  per esempio premoltiplicando per l'inverso della matrice del sistema

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{12} \\ 0 & -Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \\ Z_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Ora la matrice inversa può essere calcolata a vista, ma prima di farlo è opportuno fare la seguente considerazione: se  $Z_{22}$  fosse nulla la matrice inversa non esisterebbe perché il sistema sarebbe singolare; se quindi fosse verificata questa insolita condizione

- (insolita ma non impossibile), allora il doppio bipolo sarebbe patologico. Sviluppando i calcoli si ottiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{12}/Z_{22} \\ 0 & -1/Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \\ Z_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det[\mathbf{Z}]/Z_{22} & Z_{12}/Z_{22} \\ -Z_{21}/Z_{22} & 1/Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Con il medesimo tipo di operazioni e con i medesimi tipi di ragionamenti si possono

- ricavare le espressioni di conversione da una rappresentazione all'altra, come sono riportate nella tabella 5.1. Nella tabella non sono citati i parametri  $\hat{H}_{ij}$  e i parametri della matrice di catena inversa perché essi vengono usati raramente.

**Tabella 5.1.** Conversione fra i parametri; l'indicazione  $|\mathbf{X}|$  rappresenta il determinante della matrice  $\mathbf{X}$ .

	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Y}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{M}$
$Z_{11}$		$Y_{22}/ \mathbf{Y} $	$ \mathbf{H} /H_{22}$	$A/C$
$Z_{12}$		$-Y_{12}/ \mathbf{Y} $	$H_{12}/H_{22}$	$ \mathbf{M} /C$
$Z_{21}$		$-Y_{21}/ \mathbf{Y} $	$-H_{21}/H_{22}$	$1/C$
$Z_{22}$		$Y_{11}/ \mathbf{Y} $	$1/H_{22}$	$D/C$
$Y_{11}$	$Z_{22}/ \mathbf{Z} $		$1/H_{11}$	$D/B$
$Y_{12}$	$-Z_{12}/ \mathbf{Z} $		$-H_{12}/H_{11}$	$- \mathbf{M} /B$
$Y_{21}$	$-Z_{21}/ \mathbf{Z} $		$H_{21}/H_{11}$	$-1/B$
$Y_{22}$	$Z_{11}/ \mathbf{Z} $		$ \mathbf{H} /H_{11}$	$A/B$
$H_{11}$	$ \mathbf{Z} /Z_{22}$	$1/Y_{11}$		$B/D$
$H_{12}$	$Z_{12}/Z_{22}$	$-Y_{12}/Y_{11}$		$ \mathbf{M} /D$
$H_{21}$	$-Z_{21}/Z_{22}$	$Y_{21}/Y_{11}$		$-1/D$
$H_{22}$	$1/Z_{22}$	$ \mathbf{Y} /Y_{11}$		$C/D$
$A$	$Z_{11}/Z_{21}$	$-Y_{22}/Y_{21}$	$- \mathbf{H} /H_{21}$	
$B$	$ \mathbf{Z} /Z_{21}$	$-1/Y_{21}$	$-H_{11}/H_{21}$	
$C$	$1/Z_{21}$	$- \mathbf{Y} /Y_{21}$	$-H_{22}/H_{21}$	
$D$	$Z_{22}/Z_{21}$	$-Y_{11}/Y_{21}$	$-1/H_{21}$	

Dall'esame delle formule di conversione, precisamente dal loro denominatore, si capisce facilmente quali sono le condizioni affinché la conversione abbia senso, e quando invece, non avendo significato, il doppio bipolo presenta qualche grado di patologia.

Fra i componenti a due porte visti in precedenza si vede per esempio che il trasformatore induttivo ad accoppiamento unitario non ammette la rappresentazione con le ammettenze di cortocircuito; che il trasformatore ideale ammette solo i parametri ibridi e i parametri di catena; che i generatori controllati ammettono sempre i parametri ibridi, talvolta le impedenze a vuoto o le ammettenze di cortocircuito; che l'amplificatore ideale ammette solo i parametri di catena. In tutti i casi si tratta di componenti più o meno idealizzati, il cui grado di idealizzazione è spesso "troppo" spinto; tuttavia grazie a questo elevato grado di idealizzazione essi sono preziosi nel costituire parte di modelli di componenti reali con gradi diversi di approssimazione.

## 5.4 Condizioni di reciprocità e di simmetria

Un doppio bipolo si dice *reciproco* se gode della seguente proprietà: siano  $V'_1, I'_1, V'_2, I'_2$  e  $V''_1, I''_1, V''_2, I''_2$  due diverse configurazioni di tensioni e di correnti che soddisfano alle equazioni costitutive del doppio bipolo; queste due diverse configurazioni possono essere ottenute con diverse alimentazioni alle porte, ma la proprietà fondamentale è che devono essere due *qualsiasi* configurazioni diverse, non devono essere in qualche modo correlate. Se vale la relazione

$$\sum_{k=1}^2 V'_k I''_k = \sum_{k=1}^2 V''_k I'_k \quad (5.7)$$

allora il doppio bipolo è reciproco. La definizione di reciprocità si estende in modo ovvio a circuiti con più di due porte.

Si noti che questa è una definizione, non un teorema, benché abbia il costrutto grammaticale "se... allora...". Il *teorema* della reciprocità, invece, afferma che se un circuito a due o più porte è formato da componenti reciproci, allora esso è reciproco alle porte. Si noti ancora che questo teorema è una implicazione, non una coimplicazione, quindi non è vero che se un doppio (o multi) bipolo è reciproco allora è formato di componenti reciproci.

Se si esamina quali sono le conseguenze sui parametri del doppio bipolo provocate dalla condizione/definizione di reciprocità (5.7) si ricavano i vincoli seguenti

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (5.8a)$$

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (5.8b)$$

$$H_{12} = -H_{21} \quad (5.8c)$$

$$AD - BC = 1 \quad (5.8d)$$

Per i componenti elementari lineari visti nel paragrafo 1.2, si vede che tutti i bipoli sono reciproci; i trasformatori lo sono anche in tutte le varie versioni più o meno idealizzate; il giratore, i generatori controllati e l'amplificatore operazionale invece non sono reciproci.

La non reciprocità non deve essere confusa con la *unidirezionalità*; i generatori controllati e l'amplificatore operazionale sono unidirezionali, mentre il giratore è bidirezionale. L'unidirezionalità implica la non reciprocità, ma non vale l'affermazione opposta.

Versione del 3 ottobre 2001

Un doppio bipolo è unidirezionale se applicando il segnale ad una porta, esce il segnale elaborato dall'altra porta, mentre applicando un segnale alla seconda porta non esce nessun segnale dalla prima. L'unidirezionalità implica che una delle due funzioni  $Z_{12}$  o  $Z_{21}$  sia nulla, che una delle due funzioni  $Y_{12}$  o  $Y_{21}$  sia nulla, che una delle due funzioni  $H_{12}$  o  $H_{21}$  sia nulla, che una delle due coppie di funzioni  $A, C$  oppure  $B, D$  sia costituita da funzioni nulle. In elettronica, e in generale in tutte le applicazioni di elaborazione del segnale, è particolarmente comodo poter disporre di sistemi unidirezionali, perciò li si incontra molto frequentemente.

- Un doppio bipolo si dice *simmetrico* se le sue due porte sono indistinguibili; vale a dire che se si innesta un doppio bipolo in un connettore a cui sono connessi altri componenti, il resto del circuito non si accorge se il doppio bipolo è inserito in un verso o nel verso opposto; se la sua porta “targata” 1 è innestata nei morsetti  $a$  e  $b$  del connettore, e la porta “targata” 2 è innestata nei morsetti  $c$  e  $d$ , oppure se la porta 1 è innestata nei morsetti  $c$  e  $d$  e la porta 2 nei morsetti  $a$  e  $b$ .

La simmetria implica la reciprocità, nel senso che nell'inserzione di un doppio bipolo non reciproco il resto del circuito si accorge sempre dell'inversione della connessione anche se fossero verificate le condizioni espresse dalle equazioni (5.9).

- Ferme restando le condizioni di reciprocità (5.8), la simmetria elettrica implica che siano soddisfatte le seguenti ulteriori condizioni

$$Z_{11} = Z_{22} \quad (5.9a)$$

$$Y_{11} = Y_{22} \quad (5.9b)$$

$$H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1 \quad (5.9c)$$

$$A = D \quad (5.9d)$$

- Sopra si è specificato “simmetria elettrica” invece che semplicemente “simmetria”; la simmetria elettrica implica dei vincoli sulle equazioni costitutive e quindi sui vincoli esistenti fra le tensioni e le correnti alle porte, ma non implica nulla sulla costituzione interna del doppio bipolo. Al contrario se un doppio bipolo è reciproco e ha una struttura interna tale da poter essere diviso in due metà specularmente uguali, allora detta simmetria topologica implica la simmetria elettrica.

▽

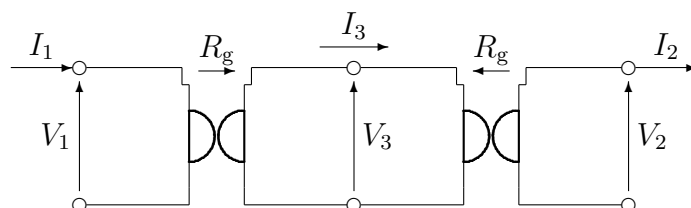
**Esempio 5.1** — Nel dividere il doppio bipolo in due metà specularmente uguali può essere necessario ricorrere a qualche trucco; infatti la possibilità di dividere in due metà specularmente uguali sembra cadere se la “mezzeria” passa attraverso alcuni componenti oppure se sulla linea di mezzzeria cadono connessioni incrociate.

Se la linea di mezzzeria attraversa alcuni bipoli, non è un problema dividerli in due metà uguali in serie. Se la linea di mezzzeria attraversa per il lungo dei bipoli, non è un problema dividerli in due metà uguali in parallelo. Attenzione: le “due metà uguali” in serie o in parallelo non hanno necessariamente i valori divisi per due. Un resistore diviso in due metà uguali in serie ha ciascuna metà con il valore di resistenza dimezzato; un condensatore diviso in due metà uguali in serie ha ciascuna metà con il valore di capacità raddoppiato.

Se la mezzzeria attraversa un trasformatore induttivo bisogna che questo sia simmetrico e quindi abbia lo stesso numero di spire primarie e secondarie, non necessariamente avvolte nello stesso senso; in altre parole l'induttanza mutua può essere sia positiva sia negativa. Per dividere il circuito è meglio fare riferimento al circuito equivalente a T, così che la

linea di mezzeria passa lungo il bipolo centrale del modello a T e può essere trattato come una bipolo qualsiasi.

Se la linea di mezzeria passa attraverso un trasformatore ideale, questo può avere solo il rapporto di trasformazione  $+1$  o  $-1$ ; se il rapporto è positivo esso può essere sostituito da due trasformatori ideali di rapporto spire  $+1$  in cascata; dopo la sostituzione la mezzeria passa attraverso i collegamenti intermedi fra i due trasformatori e non ci sono altri problemi. Se il rapporto di trasformazione vale  $-1$ , ci vuole un trucco più drastico; bisogna sostituire il trasformatore di rapporto  $-1$  con due giratori in cascata con la stessa resistenza di girazione (di valore per altro arbitrario), ma con il segno opposto.



**Figura 5.2.** Due giratori in cascata

Infatti, facendo riferimento alla figura 5.2, se le equazioni dei due giratori sono<sup>2</sup>

$$\begin{cases} V_1 = +R_g I_3 \\ V_3 = +R_g I_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} V_3 = -R_g I_2 \\ V_2 = -R_g I_3 \end{cases}$$

eliminando le variabili  $V_3$  e  $I_3$  fra le equazioni si ricava

$$\begin{cases} V_1 = -V_2 \\ I_1 = -I_2 \end{cases}$$

che sono proprio le equazioni costitutive di un trasformatore ideale di rapporto  $-1$ ; al limite anche di due fili incrociati percorsi da correnti “diagonalmente” uguali.

Proprio quest’ultima osservazione ci permette anche di sostituire in certe circostanze (correnti diagonalmente uguali) due fili incrociati nella mezzeria con un trasformatore ideale di rapporto  $-1$  e quindi con due giratori uguali contrapposti.

In definitiva con questo genere di trucchi il doppio bipolo originale non ha più componenti sulla mezzeria ma solo collegamenti orizzontali da un lato all’altro, attraverso i quali può benissimo passare lo “specchio” che divide il circuito in due metà specularmente uguali.

△

▽

**Esempio 5.2** — L’esempio precedente ci consente di sviluppare un semplice trucco per analizzare un doppio bipolo strutturalmente simmetrico, riducendo la mole dei calcoli a metà. Supponiamo di disporre di un doppio bipolo strutturalmente simmetrico e di averlo eventualmente sottoposto al trattamento di maquillage dell’esempio precedente. Dopo tale trattamento lungo la linea di mezzeria non ci sono più componenti ma tale linea è attraversata solo da collegamenti orizzontali. Supponiamo di voler determinare le impedenze a vuoto di un simile circuito, ammesso che non sia visibilmente patologico.

<sup>2</sup> Attenzione alla convenzione dei segni.

Sappiamo che dobbiamo determinare solo due funzioni, per esempio  $Z_{11}$  e  $Z_{21}$ , perché le altre due funzioni sono legate a queste dai vincoli di simmetria elettrica e di reciprocità.

Dobbiamo fare solo due esperimenti, ma sta a noi scegliere quali esperimenti fare per semplificare i conti a circa la metà. Se alimentiamo simultaneamente le due porte con correnti uguali, cioè con  $I_1 = I_2 = I$ , data la simmetria topologica i voltmetri alle due porte misureranno la stessa tensione  $V_1 = V_2 = V$ . L'impedenza  $Z_{mc} = V/I$  è legata ai parametri incogniti da

$$Z_{mc} = Z_{11} + Z_{21}$$

Se invece alimentiamo le due porte con correnti uguali e opposte  $I = I_1 = -I_2$ , sempre per gli stessi motivi di simmetria i voltmetri alle due porte misureranno due tensioni uguali e opposte  $V = V_1 = -V_2$ . Il rapporto  $Z_{md}$  fra la tensione  $V$  e la corrente  $I$  in questo secondo esperimento vale

$$Z_{md} = Z_{11} - Z_{21}$$

Le due grandezze incognite si ricavano semplicemente eseguendo la semisomma e la semi-differenza

$$Z_{11} = \frac{Z_{mc} + Z_{md}}{2}$$

$$Z_{21} = \frac{Z_{mc} - Z_{md}}{2}$$

Bene, dove ci ha portato tutto ciò? Apparentemente a fare esperimenti più complicati con il vantaggio di usare un solo voltmetro, invece di due. Non sembra granché. Il vantaggio invece è insito negli esperimenti che abbiamo appena eseguito.

- Infatti, a causa della simmetria nel primo esperimento, detto di eccitazione in *modo comune* (da cui il pedice “mc”), tutte le correnti nei fili che attraversano la linea di mezzzeria *sono nulle*; i fili perciò possono essere sostituiti con circuiti aperti e in definitiva ci obbligano a tagliare a metà il circuito e ad analizzare solo la metà di sinistra ridotta a un bipolo poiché è rimasta un'unica porta.
- Nel secondo esperimento, detto di eccitazione in *modo differenziale* (da cui il pedice “md”), tutti i fili che attraversano la mezzzeria sono allo stesso potenziale, quindi possono essere collegati fra di loro con un unico cortocircuito. In sostanza possiamo tagliare a metà il circuito lungo la linea di mezzzeria, connettere fra di loro in cortocircuito i moncherini dei collegamenti tagliati e analizzare il solo bipolo di sinistra, visto che siamo rimasti con una sola porta. È chiaro che avendo diviso a metà il circuito ed essendoci ridotti con due soli semplici bipoli, le difficoltà di calcolo si sono ridotte a circa la metà.
- I prossimi esempi dimostrano la validità di questo metodo, talvolta chiamato *metodo di bisezione*.

△

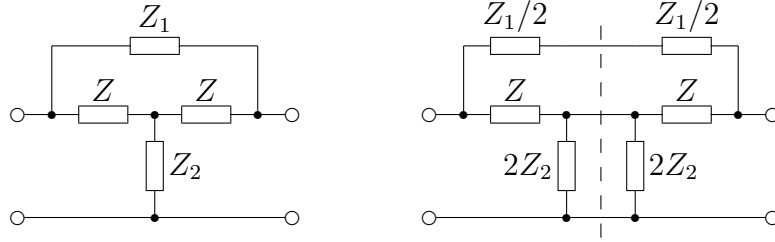
▽

**Esempio 5.3** — La figura 5.3 mostra un semplice doppio bipolo (tripolo) detto *cella a T composito*. Se i due bracci del T sono uguali, come nella figura, il circuito è strutturalmente simmetrico e si può applicare il metodo di bisezione, come indicato nella parte destra della stessa figura, nella quale è anche indicata tratteggiata la linea di simmetria.

Il primo esperimento in modo comune taglia il circuito a metà lungo la linea di mezzzeria lasciando i collegamenti aperti e lasciando sostanzialmente disconnessa la mezza impedenza  $Z_1/2$ , che non conta più; l'impedenza di modo comune diventa pertanto

$$Z_{mc} = Z + 2Z_2$$

Versione del 3 ottobre 2001

**Figura 5.3.** Cella a T composito

Il secondo esperimento in modo differenziale taglia a metà il circuito lungo la linea di mezzzeria e connette tutti i collegamenti recisi in cortocircuito fra di loro; in questo modo l'impedenza doppia  $2Z_2$  non conta più e l'impedenza di modo differenziale diventa

$$Z_{\text{md}} = Z \oplus Z_1/2$$

Ora abbiamo tutti gli elementi per determinare le impedenze a vuoto

$$Z_{11} = \frac{Z + 2Z_2 + (Z \oplus Z_1/2)}{2} \quad \text{e} \quad Z_{21} = \frac{Z + 2Z_2 - (Z \oplus Z_1/2)}{2}$$

avendo svolto calcoli elementari praticamente a mente.

△

▽

**Esempio 5.4** — Si faccia riferimento alla figura 5.4; le quattro impedenze della cella di sinistra, detta *cella a ponte* o *cella a traliccio*, sono a due a due uguali e il doppio bipolo è simmetrico elettricamente e strutturalmente. Ciò premesso, le due impedenze di modo comune e di modo differenziale si calcolano a vista e risultano

$$Z_{\text{mc}} = Z_2 \quad Z_{\text{md}} = Z_1$$

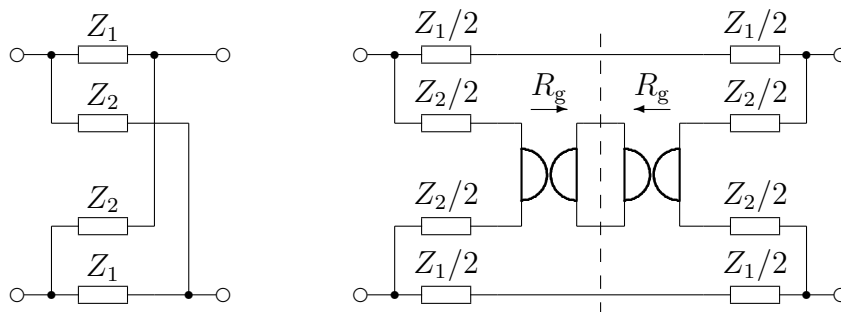
Infatti, quando si taglia il circuito lungo la mezzzeria, indicata con la linea tratteggiata, i moncherini delle due mezz impedenze  $Z_1/2$  restano aperti, e queste due impedenze non intervengono più; invece il circuito aperto al secondario del giratore viene visto al primario come un cortocircuito (la tensione primaria è proporzionale alla corrente secondaria), per cui dai morsetti di sinistra si vedono solo le due mezz impedenze  $Z_2/2$  in serie. Quando si chiudono i collegamenti della mezzzeria in cortocircuito fra di loro, succede esattamente il contrario e le uniche impedenze che intervengono sono le due mezz impedenze  $Z_1/2$  in serie.

I parametri del doppio bipolo diventano allora semplicemente

$$Z_{11} = \frac{Z_2 + Z_1}{2} \quad \text{e} \quad Z_{21} = \frac{Z_2 - Z_1}{2}$$

Come si vede l'analisi della cella a ponte è stata eseguita a vista, senza svolgere nessun calcolo che non si potesse fare a mente.

△



**Figura 5.4.** Doppio bipolo a ponte o a traliccio

## 5.5 Connessione di doppi bipoli

I doppi bipoli possono essere connessi fra di loro in vari modi. I più comuni sono: ■

- ▷ in serie,
- ▷ in parallelo,
- ▷ in serie-parallelo
- ▷ in cascata

In tutti i casi se i doppi bipoli sono descritti nel modo “giusto”, con l’insieme di parametri più appropriato, i parametri del doppio bipolo risultante si determinano praticamente a vista.

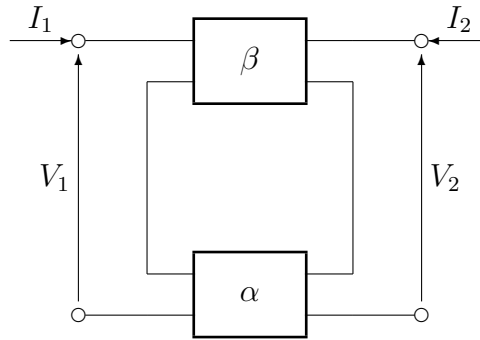
Il punto importante da tenere presente è che i doppi bipoli devono continuare a funzionare come tali anche dopo la connessione; in altre parole la connessione non deve alterare la condizione per la quale la corrente entrante in un morsetto di una porta deve essere uguale alla corrente uscente dall’altro morsetto della stessa porta.

- Per essere totalmente tranquilli su questa condizione basta connettere sia all’ingresso sia all’uscita un trasformatore ideale di rapporto unitario; tale rapporto non modifica le relazioni fra le tensioni e le correnti di ciascuna porta, ma tramite l’accoppiamento magnetico ideale i segnali vengono trasferiti alle porte originali, senza porre loro altri vincoli. Certo da un punto di vista teorico questa soluzione non fa una piega; dal punto di vista pratico si ricorre ai trasformatori solo quando la tecnologia lo consente e non se ne può proprio fare a meno. Quando, allora, se ne può fare a meno? Quando si connettono fra di loro in modo coerente i tripoli (che sono intrinsecamente circuiti con due sole porte), quando si connettono in modo coerente doppi bipoli in parallelo, quando non si pretende che due doppi bipoli bilanciati dopo la connessione diano ancora luogo ad un doppio bipolo bilanciato, insomma quando non si pretende di connettere assieme doppi bipoli strani in modi strani<sup>3</sup>.

### 5.5.1 Connessione in serie

- Due doppi bipoli sono connessi in serie (eventualmente con l’ausilio di trasformatori ideali) se le porte omonime di ogni doppio bipolo sono connesse in serie; il doppio bipolo risultante è caratterizzato dalle stesse correnti, ma le tensioni alle porte sono la somma delle tensioni parziali dei doppi bipoli componenti.

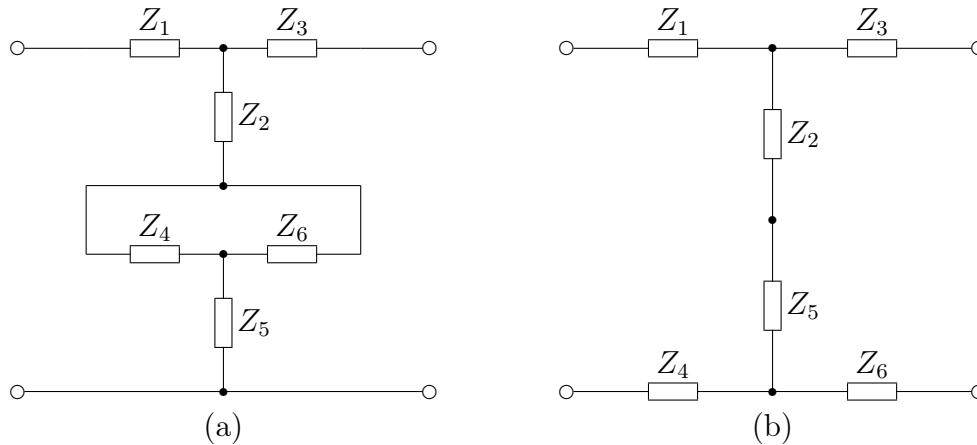
<sup>3</sup> Non è molto precisa come descrizione, ma ritengo che sia meglio affidarsi a un po’ di ragionamento e di buon senso, piuttosto che essere sommersi da serie lunghissime di condizioni da verificare.

**Figura 5.5.** Connessione in serie di due doppi bipoli

Con le osservazioni precedenti e con l'aiuto della figura 5.5, diventa semplice rendersi conto che la descrizione di funzionamento più comoda è mediante le impedenze a vuoto e che di conseguenza le equazioni descrittive del doppio bipolo risultante dalla connessione sono semplicemente

$$\begin{cases} V_1 = (Z_{11\alpha} + Z_{11\beta})I_1 + (Z_{12\alpha} + Z_{12\beta})I_2 \\ V_2 = (Z_{21\alpha} + Z_{21\beta})I_1 + (Z_{22\alpha} + Z_{22\beta})I_2 \end{cases} \quad (5.10)$$

Conviene sempre ricordare che le equazioni (5.10) sono valide *solo* se i due doppi bipoli continuano a funzionare come tali anche dopo la connessione. Si riporta un esempio di connessione sbagliato per sottolineare questo concetto e poi non lo si ripeterà più: figura 5.6.

**Figura 5.6.** Connessione in serie: (a) sbagliata; (b) corretta.

Si vede infatti che nella connessione sbagliata della figura 5.6-(a) i due doppi bipoli (i due tripoli) non funzionano più come circuiti in cui la corrente entrante in un morsetto di una porta è uguale alla corrente uscente dall'altro morsetto della stessa porta; nella maglia che si forma a causa della connessione circola una corrente che si sovrappone alle correnti di porta e che consente di soddisfare il vincolo imposto dalla connessione e cioè che la tensione ai capi di  $Z_4$  deve essere uguale alla tensione ai capi di  $Z_6$ . Semplici calcoli

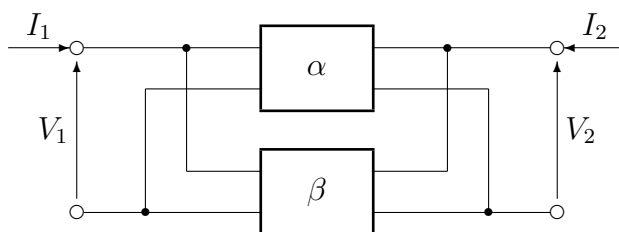
consentono di determinare che la corrente  $I_0$  di questa maglia (in senso orario) vale

$$I_0 = \frac{I_1 Z_4 - I_2 Z_6}{Z_4 + Z_6}$$

e, per esempio, nella coppia di morsetti di sinistra del doppio bipolo superiore la corrente entrante nel morsetto superiore vale  $I_1$ , mentre quella uscente dal morsetto inferiore vale  $I_1 - I_0$ ; il doppio bipolo non funziona più come tale.

### 5.5.2 Connessione in parallelo

- La connessione in parallelo di due doppi bipoli avviene connettendo in parallelo le loro porte omonime. Siccome la connessione in parallelo non influisce troppo sulle correnti, a meno che i due doppi bipoli non siano connessi in modi palesemente assurdi o non siano degeneri, la connessione in parallelo è quasi sempre lecita senza la necessità di inserire trasformatori ideali di isolamento. La figura 5.7 mostra la tipica connessione in parallelo; se i due doppi bipoli sono tripoli, allora i due terminali etichettati “0” devono essere connessi assieme.



**Figura 5.7.** Due doppi bipoli connessi in parallelo

Proprio perché le porte sono connesse in parallelo, la descrizione dei doppi bipoli componenti e del doppio bipolo risultante avviene in modo più diretto facendo uso delle

- ammettenze di cortocircuito.

$$\begin{cases} I_1 = (Y_{11\alpha} + Y_{11\beta})V_1 + (Y_{12\alpha} + Y_{12\beta})V_2 \\ I_2 = (Y_{21\alpha} + Y_{21\beta})V_1 + (Y_{22\alpha} + Y_{22\beta})V_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

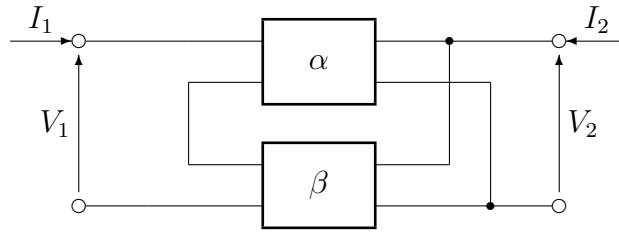
### 5.5.3 Connessione in serie-parallelo

- La connessione in serie-parallelo di due doppi bipoli avviene connettendo una coppia di porte omonime in serie e l'altra coppia in parallelo, come nella figura 5.8.

In certi casi (da evitare) potrebbe essere necessario inserire dei trasformatori ideali di isolamento per consentire la connessione, specialmente dal lato delle porte in serie. Dovrebbe essere del tutto ovvio che la connessione delle porte in serie potrebbe coinvolgere le porte di destra invece che quelle di sinistra, e quanto viene detto ora va modificato in modo ovvio.

La descrizione dei doppi bipoli componenti e di quello risultante avviene più comoda-

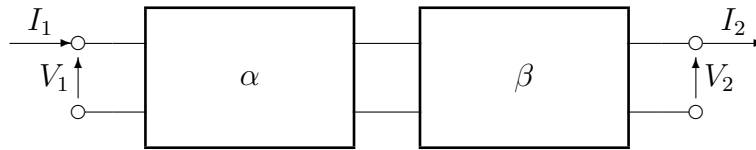
- damente se si usano i parametri ibridi; si ottiene

**Figura 5.8.** Due doppi bipoli connessi in serie-parallelo

$$\begin{cases} V_1 = (H_{11\alpha} + H_{11\beta})I_1 + (H_{12\alpha} + H_{12\beta})V_2 \\ I_2 = (H_{21\alpha} + H_{21\beta})I_1 + (H_{22\alpha} + H_{22\beta})V_2 \end{cases} \quad (5.12)$$

#### 5.5.4 Connessione in cascata

La connessione in cascata è molto frequente con i sistemi elettrici ed elettronici; essa differisce dalle connessioni viste in precedenza perché viene coinvolta una sola porta di ogni doppio bipolo. La necessità di introdurre trasformatori ideali di accoppiamento è piuttosto rara; con i tripoli è importante che i morsetti etichettati “0” siano connessi assieme.

**Figura 5.9.** Due doppi bipoli connessi in cascata

La connessione in cascata è mostrata nella figura 5.9. La descrizione dei doppi bipoli connessi in cascata e di quello risultante avviene più comodamente facendo uso dei parametri di catena; inoltre, sebbene non sia strettamente necessario, il risultato è più evidente se lo si scrive in forma matriciale, invece che in forma scalare

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ C_\alpha & D_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\beta & B_\beta \\ C_\beta & D_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

In forma matriciale, infatti, è più evidente che la matrice dei parametri di catena del doppio bipolo risultante si ottiene moltiplicando fra di loro le matrici di catena dei doppi bipoli componenti, stando attenti a moltiplicare i fattori matriciali esattamente nello stesso ordine in cui sono connessi questi doppi bipoli componenti.

#### 5.5.5 Considerazioni sulla connessione di doppi bipoli

Vale la pena di mettere in evidenza i punti seguenti:

1. Le connessioni descritte nei paragrafi precedenti facendo riferimento a due soli doppi bipoli componenti possono essere ripetute iterativamente con un numero qualsiasi di doppi bipoli componenti.

2. Se con una moltitudine di doppi bipoli i tipi di connessione variano, per esempio due doppi bipoli connessi in cascata sono a loro volta connessi in parallelo con un terzo doppio bipolo, basta cambiare rappresentazione facendo buon uso delle formule di trasformazione della tabella 5.1.
- 3. Bisogna fare molta attenzione con i doppi bipoli patologici; con questi doppi bipoli non sono lecite tutte le connessioni e quindi o le si esegue lo stesso rinunciando al fatto che i doppi bipoli continuino a comportarsi come tali, oppure si evitano dette connessioni. Quest'ultima raccomandazione potrebbe sembrare un po' ipocrita e richiede una spiegazione. Qui si sta studiando la Teoria dei Circuiti Elettrici per applicarla prima o poi in situazioni di progetto, anche se per ora ci accontentiamo di applicarla in situazioni di analisi. In una situazione di progetto siamo effettivamente in grado di evitare le situazioni patologiche. In una situazione di analisi domandiamoci: chi ha messo insieme un circuito patologico e a che scopo? Potrebbe essere un errore di disegno o un errore di cablaggio involontario, oppure potrebbe essere una manifestazione sadica del professore che mette alla prova gli studenti con trabocchetti insidiosi. In entrambi i casi c'è qualcosa che non va.
4. In situazioni di analisi essere capaci di spezzare un circuito complicato in parti più semplici connesse fra di loro, consente di eseguire l'analisi delle parti semplici e di ottenere il risultato desiderato sul circuito complesso tenendo conto delle connessioni; questo modo di procedere prende il nome di *analisi a blocchi* e in generale si dimostra il modo più semplice ed efficiente di operare, specialmente quando si lavora a mano; per altro anche diversi programmi di analisi automatica fanno riferimento a questo procedimento con il vantaggio di aumentare sensibilmente la velocità di esecuzione. L'analisi a blocchi è particolarmente raccomandata quando si intende analizzare un circuito complicato allo scopo di ottenere le variabili descrittive o le funzioni di trasferimento alle porte complessive, e non interessino le variabili descrittive all'interno del circuito.
- 

## 5.6 Analisi a blocchi

Secondo la linea dell'ultima osservazione del paragrafo precedente, è conveniente disporre di ulteriori formule generali che consentano di usare espressioni semplici in cui innestare analisi di blocchi parziali eseguite a parte; fra queste formule sono particolarmente utili

- quelle che consentono di determinare le impedenze o le ammettenze d'entrata e di uscita,
- le amplificazioni di tensione e di corrente e il fattore di inserzione.

Le formule che seguono fanno riferimento alle funzioni di trasferimento che compaiono nella tabella 5.1; alcune di queste funzioni sono direttamente le impedenze d'entrata o di uscita, a vuoto, in cortocircuito, o con un carico definito. Analogamente le amplificazioni di tensione o di corrente possono essere messe in relazione con alcune delle funzioni che compaiono nella tabella 5.1 della pagina 126.

- Nelle formule che seguono  $Z_G$  e  $Z_L$  sono rispettivamente l'impedenza interna del generatore e quella del carico; ponendo l'una o l'altra (o entrambe) pari a zero o pari a infinito, si ottengono i casi speciali che si hanno con i generatori ideali o con i carichi degeneri; quando entrambe le impedenze assumono valori estremi si riottengono le espressioni di trasformazione fra parametri riportate nella tabella 5.1.
- **Impedenze di entrata e di uscita** — Le impedenze di entrata e di uscita possono es-

sere calcolate attraverso le relazioni seguenti dove i pedici ‘G’ e ‘L’ si riferiscono rispettivamente al generatore o al carico.

$$Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} = \frac{Z_{11}Z_L + \det[\mathbf{Z}]}{Z_{22} + Z_L} \quad (5.14a)$$

$$Y_e = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_L} = \frac{Y_{11}Y_L + \det[\mathbf{Y}]}{Y_{22} + Y_L} \quad (5.14b)$$

$$Z_e = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_L} = \frac{H_{11}Y_L + \det[\mathbf{H}]}{H_{22} + Y_L} \quad (5.14c)$$

$$Z_e = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad (5.14d)$$

$$Z_u = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_G} = \frac{Z_{22}Z_G + \det[\mathbf{Z}]}{Z_{11} + Z_G} \quad (5.14e)$$

$$Y_u = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_G} = \frac{Y_{22}Y_G + \det[\mathbf{Y}]}{Y_{11} + Y_G} \quad (5.14f)$$

$$Y_u = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_G} = \frac{H_{22}Z_G + \det[\mathbf{H}]}{H_{11} + Z_G} \quad (5.14g)$$

$$Z_u = \frac{DZ_G + B}{CZ_G + A} \quad (5.14h)$$

**Fattore di inserzione** — Il fattore di inserzione è una funzione di trasferimento che indica in che misura si modifica la risposta quando si inserisce il doppio bipolo fra il generatore e il carico, rispetto a quando il generatore è collegato direttamente al carico. ■

$$K_i = \frac{(Z_G + Z_L)Z_{21}}{\det[\mathbf{Z}] + Z_{22}Z_G + Z_{11}Z_L + Z_GZ_L} \quad (5.15a)$$

$$K_i = \frac{-(Y_G + Y_L)Y_{21}}{\det[\mathbf{Y}] + Y_{22}Y_G + Y_{11}Y_L + Y_GY_L} \quad (5.15b)$$

$$K_i = \frac{-(Z_G + Z_L)H_{21}}{H_{11} + Z_G + \det[\mathbf{H}]Z_L + H_{22}Z_GZ_L} \quad (5.15c)$$

$$K_i = \frac{(Z_G + Z_L)}{B + DZ_G + AZ_L + CZ_GZ_L} \quad (5.15d)$$

**Amplificazione di tensione** — Attraverso il fattore di inserzione è possibile calcolare le amplificazioni di tensione e quelle di corrente; le equazioni che permettono di calcolare il fattore di inserzione sono indicate nel sistema (5.15); per l'amplificazione di tensione si ha il seguente legame ■

$$A_{vs} = \frac{V_2}{E} = \frac{Z_L}{Z_G + Z_L} K_i = \frac{Y_G}{Y_G + Y_L} K_i \quad (5.16)$$

dove  $E$  è la forza elettromotrice del modello di Thevenin del generatore.

Versione del 3 ottobre 2001

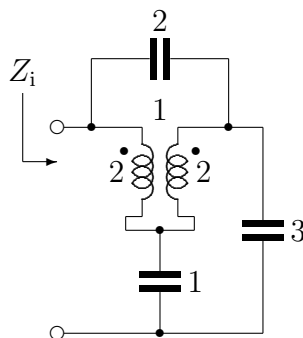
**Amplificazione di corrente** — Analogamente il rapporto fra la corrente che scorre nel carico e la corrente impressa del modello di Norton del generatore è data da

$$A_{is} = \frac{I_2}{J} = \frac{Y_L}{Y_G + Y_L} K_i = \frac{Z_G}{Z_G + Z_L} K_i \quad (5.17)$$

Resta sempre il fatto che se il generatore degenera in un generatore ideale di tensione o di corrente, le formule si modificano come accennato prima, cioè ponendo rispettivamente  $Z_G$  o  $Y_G$  a zero; analogamente se si desiderano le risposte con la porta di uscita a vuoto (per  $A_{vs}$ ) o in cortocircuito (per  $A_{is}$ ) basta porre rispettivamente  $Y_L$  o  $Z_L$  a zero.

▽

**Esempio 5.5** — Si desidera determinare l'impedenza d'ingresso  $Z_i$  del circuito mostrato nella figura 5.10.



**Figura 5.10.** Circuito da analizzare a blocchi

Benché il circuito sia abbastanza semplice, nonostante la presenza del trasformatore, l'analisi risulta più complessa di quanto non ci si aspetterebbe; si possono seguire diversi metodi, ma quello che porta più rapidamente al risultato è costituito dall'analisi a blocchi<sup>4</sup>; si considera dapprima il solo blocco costituito dal trasformatore e dalla capacità normalizzata unitaria e si scrivono a vista le impedenze a vuoto

$$Z'_{11} = Z'_{22} = \frac{2p^2 + 1}{p}$$

$$Z'_{21} = \frac{p^2 + 1}{p}$$

Si passa alle ammettenze di cortocircuito mediante le formule della tabella 5.1

$$Y'_{11} = Y'_{22} = \frac{2p^2 + 1}{3p^3 + 2p}$$

$$-Y'_{21} = \frac{p^2 + 1}{3p^3 + 2p}$$

<sup>4</sup> Di analisi a blocchi se ne possono fare tante; qui se ne presenta una, ma si può fare di meglio. Si confronti il procedimento illustrato qui con quelli suggeriti negli esercizi 5.11–5.13.

per poi mettere in parallelo al blocco la capacità normalizzata di valore 2

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{6p^4 + 6p^2 + 1}{3p^3 + 2p}$$

$$-Y_{21} = \frac{6p^4 + 5p^2 + 1}{3p^3 + 2p}$$

Infine, mediante l'aiuto delle formule 5.14, si può calcolare l'impedenza d'entrata del doppio bipolo caricato all'uscita dall'impedenza della capacità normalizzata di valore 3 (ovviamente conviene lavorare con le ammettenze)

$$Y_e = \frac{18p^5 + 22p^3 + 4p}{15p^4 + 12p^2 + 1}$$

Conviene constatare a scopo di verifica che per  $p \rightarrow 0$  l'ammettenza tende al comportamento di un condensatore di valore 4, così come il circuito della figura 5.10 a frequenza nulla si riduce ai due condensatori di valore 1 e di valore 3 in parallelo, corrispondenti ad un condensatore equivalente di valore 4; analogamente in alta frequenza, per  $p \rightarrow \infty$ , l'ammettenza calcolata tende al comportamento di un condensatore di valore  $18/15 = 1,2$ , così come il circuito della figura 5.10 si riduce al condensatore di valore 2 in serie al condensatore di valore 3, corrispondenti ad un condensatore equivalente di valore  $2 \oplus 3 = 1,2$ . Con queste verifiche non si ha la certezza assoluta di avere svolto correttamente i calcoli, ma la probabilità di non aver fatto errori è alta.

Benché questo esempio riporti i punti salienti del calcolo, non si sono esposti alcuni dettagli cruciali; lo studente è invitato a svolgere questo esempio senza saltare passaggi e rendendosi conto dei dettagli omessi e della loro importanza.

Se si fosse voluto determinare direttamente il risultato senza eseguire l'analisi a blocchi, si sarebbe potuto usare un metodo generale di analisi, come per esempio il metodo dei nodi; la presenza del trasformatore, però, avrebbe reso necessario inserire uno dei circuiti equivalenti del trasformatore induttivo, obbligando a una prima analisi parziale per inserire il circuito equivalente a II, oppure ad introdurre un quarto nodo con il circuito equivalente a T. Nel primo caso per ottenere l'impedenza d'ingresso sarebbe stato necessario calcolare il determinante del terzo ordine della matrice delle ammettenze nodali e un suo minore; nel secondo caso sarebbe stato necessario calcolare il determinante del quarto ordine di una diversa matrice delle ammettenze nodali e di un suo minore; lo studente è invitato a eseguire anche questi calcoli per rendersi conto "sperimentalmente" dell'efficienza di economia di calcoli che si può ottenere con l'analisi a blocchi.

△

## Esercizi

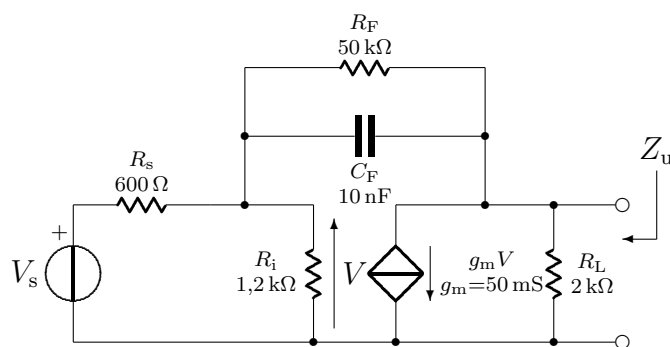
**5.1 Passività di un doppio bipolo simmetrico in regime sinusoidale** Si consideri un doppio bipolo simmetrico operante in regime sinusoidale a una qualunque pulsazione  $\omega$ . A quali condizioni debbono soddisfare le impedenze a vuoto, le ammettenze di cortocircuito e i parametri ibridi a quella pulsazione affinché il doppio bipolo possa considerarsi passivo, cioè affinché la potenza attiva entrante simultaneamente nelle porte sia non negativa? Commentare i risultati.

**5.2 Porte in serie** Determinare le condizioni sotto le quali le due porte di un doppio bipolo possono essere connesse in serie fra di loro e determinare l'impedenza del bipolo risultante.

Versione del 3 ottobre 2001

**5.3 Porte in parallelo** Determinare le condizioni sotto le quali le due porte di un doppio bipolo possono essere connesse in parallelo fra di loro e determinare l'ammettenza del bipolo risultante.

**5.4 Impedenza di uscita** Facendo riferimento al risultato dell'esercizio 5.3, determinare l'impedenza o l'ammettenza di uscita del doppio bipolo della figura E-5.1, già proposto per l'esercizio 3.8. Si suggerisce di staccare il lato destro del bipolo formato da  $C_F$  e da  $R_F$ , in modo da ottenere un doppio bipolo.



**Figura E-5.1.** Per l'esercizio 5.4

**5.5 Porte in serie-parallelo** È possibile connettere le due porte di un doppio bipolo in serie-parallelo? Se sì, determinare l'impedenza del bipolo risultante.

**5.6 Doppi bipoli sbilanciati in serie** Due doppi bipoli sbilanciati non possono essere connessi in serie e rimanere sbilanciati; nella soluzione indicata nella parte di destra della figura 5.6 i doppi bipoli sono connessi in serie ma non sono più sbilanciati e non c'è nessuna possibilità di connettere un morsetto di ciascuna porta a massa. Come bisogna inserire uno o più trasformatori ideali per mantenere sbilanciati sia i doppi bipoli componenti sia il doppio bipolo risultante?

**5.7 Doppi bipoli a resistenza costante** Un doppio bipolo si dice *a resistenza costante* se esistono due valori  $R_{01}$  e  $R_{02}$  di resistenza tali che chiudendo la porta secondaria sulla resistenza  $R_{02}$ , nella porta primaria si vede  $R_{01}$  e viceversa. Mediante i parametri di catena, assumendo che il doppio bipolo sia reciproco, determinare i vincoli che la proprietà in esame impone ai parametri.

**5.8 Adattamento energetico ad una sola frequenza** Sfruttando i risultati dell'esercizio precedente, determinare le formule di progetto più generali per realizzare l'adattamento energetico a una sola frequenza, senza le limitazioni che si sono incontrate nel paragrafo 4.4 dove si è trovata un'espressione per il caso  $R_L > R_G$  ma che richiedeva di affrontare il problema ex novo nell'altro caso. Determinare le formule per dimensionare la cella adattatrice senza limitazioni sul rapporto  $R_G/R_L$ .

**5.9 Adattamento energetico di impedenze generiche ad una sola frequenza** Sfruttando i risultati dell'esercizio precedente scegliere il parametro  $\beta$  per adattare due impedenze complesse del tutto arbitrarie (ma non puramente immaginarie) ad una frequenza assegnata seguendo la linea d'approccio delineata nel paragrafo 4.4 ma usando una cella a L e senza restrizioni sul rapporto delle parti reali. Discutere i risultati e verificare che le soluzioni possono in certe circostanze essere fino a quattro.

**5.10 Adattamento di due impedenze assegnate** Ripetere l'esempio 4.5 ma adattando l'antenna e il generatore con una cella a L.

**5.11 Analisi con il metodo dei nodi** Ripetere l'analisi del circuito proposto nell'esempio 5.5 usando il metodo dei nodi.

**5.12 Analisi con il metodo delle maglie** Ripetere l'analisi del circuito proposto nell'esempio 5.5 usando il metodo delle maglie.

**5.13 Analisi con il metodo di bisezione** Ripetere l'analisi del circuito proposto nell'esempio 5.5 usando il metodo di bisezione.



# Appendice A

## Approfondimenti

### A.1 Premessa

In questa appendice verranno trattati alcuni argomenti un po' avanzati rispetto a quelli trattati nel resto del libro. Servono per approfondire, per chi lo desidera, alcune questioni che nel corpo del testo sono state appena accennate con frasi del tipo "... si potrebbe dimostrare che..." e simili.

Esse tratteranno delle matrici topologiche, dei loro legami e delle loro proprietà; dei circuiti variamente degeneri o patologici; della causalità, con applicazioni a dispositivi ideali, quali ad esempio il filtro ideale; della passività.

È chiaro che si potrebbero approfondire moltissimi altri argomenti; alcuni di quelli trattati e molti altri verranno ripresi nei corsi successivi; alcuni altri non verranno ripresi mai durante il percorso della laurea triennale. Comunque mi pare giusto che un libro universitario non si limiti allo stretto indispensabile per "passare l'esame". La cultura superiore non è fatta dalle conoscenze strettamente indispensabili!

### A.2 Le matrici topologiche

Nel capitolo 1 si è fatto riferimento al grafo di un circuito come insieme dei nodi e dei lati orientati formati dalle frecce delle tensioni prese in prestito dalla convenzione dei segni dei componenti collegati ai vari nodi. Abbiamo ricordato che il grafo può essere fatto di una sola parte o di diverse parti staccate, ma che per ogni parte si può prendere un nodo, etichettato "0", come nodo di riferimento, poi si possono numerare gli altri nodi progressivamente da 1 a  $N$ ;  $N$  rappresenta il numero di nodi indipendenti. Abbiamo ricordato che il disegno del grafo permette di scrivere le equazioni di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti, nelle quali compaiono dei coefficienti che valgono solo 0, +1 o -1.

Tutto ciò può essere scritto in forma matriciale; sebbene non sia necessario, non è inutile numerare i lati del grafo (di ogni parte separata del grafo) in relazione alla scelta di un albero. Abbiamo ricordato già che un albero è un insieme connesso di lati che collega tutti i nodi senza formare percorsi chiusi. ■

Si può pensare a due generi distinti di alberi: (a) l'albero *stellato* e (b) l'albero ■

- *ramificato*. Non hanno caratteristiche molto diverse, ma l'albero stellato permette di numerare tutti i suoi lati con lo stesso numero del nodo a cui il lato è collegato, mentre l'albero ramificato non lo consente.

Nell'albero stellato ogni ramo collega il nodo 0 con uno degli altri nodi; se il circuito non contiene nessun lato direttamente connesso fra il nodo 0 e ogni altro nodo, basta immaginare che fra ogni nodo e il nodo 0 sia inserita un'ulteriore freccia di tensione, che,

- assunto nullo il potenziale del nodo 0, prende il nome di *potenziale nodale*; non importa che il circuito contenga effettivamente un componente in quella posizione, perché in effetti noi possiamo sempre immaginare di avere inserito fra ogni nodo e massa un voltmetro ideale; e un voltmetro non è forse un componente?

Scelto dunque un albero, si numerino i lati del grafo in modo che i primi  $N$  siano numerati da 1 a  $N$ , e i restanti  $M = L - N$  siano numerati da  $N + 1$  a  $L$ .

- Si definisce *matrice di incidenza*  $\mathbf{A}$  la matrice rettangolare di  $N$  righe e  $L = N + M$  colonne associata a un albero stellato i cui elementi  $a_{ij}$  valgono

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il lato } j \text{ ha la punta della freccia sul nodo } i \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ ha la coda della freccia sul nodo } i \\ 0 & \text{se né la punta né la coda della freccia del lato } j \text{ si appoggiano al nodo } i \end{cases}$$

Si noti che avendo numerato i lati del grafo come si è detto ed avendo elencato per primi i

- rami, i lati dell'albero, e per secondi le corde, i lati del coalbero, le prime  $N$  colonne della matrice  $\mathbf{A}$  formano una matrice identità, mentre le altre colonne formano una matrice rettangolare che non ha un ordine evidente, salvo che ogni colonna contiene al più due soli elementi diversi da zero, eventualmente uno che vale +1 e l'altro che vale -1, ma mai dello stesso segno.

Numerate corrispondentemente le correnti uscenti dai nodi (attraverso i componenti) con le prime  $N$  numerate come i rami corrispondenti, e le restanti  $M = L - N$  numerate come le corde corrispondenti, la legge di Kirchhoff delle correnti si esprime semplicemente mediante

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

Ogni riga del prodotto, infatti, contiene la somma dei prodotti<sup>1</sup> dei coefficienti  $a_{ij}$  per le correnti  $I_j$ , cioè esprime la somma algebrica delle correnti uscenti dal nodo  $i$ .

▽

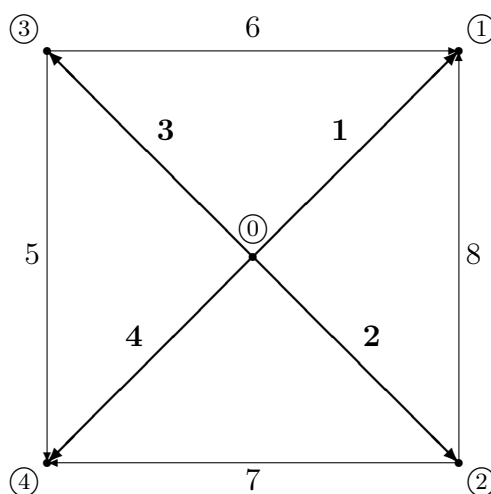
**Esempio A.1** — Si faccia riferimento al semplice grafo della figura A.1. È individuato un nodo "0" e un albero stellato; i rami dell'albero sono indicati con frecce più scure e sono numerati come i corrispondenti nodi a cui sono collegati.

La matrice di incidenza vale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

△

<sup>1</sup> Qui si useranno le lettere maiuscole per le variabili descrittive; le si può intendere sia come valori in regime stazionario, sia come fasori, sia come trasformate di Laplace.



**Figura A.1.** Grafo con albero stellato. I nodi sono identificati dai numeri racchiusi in un cerchietto; i rami sono tracciati con linee più scure di quelle usate per le corde e sono individuati con numeri in neretto.

Se l'albero non è stellato, si possono numerare i lati nello stesso modo, cioè numerando da 1 a  $N$  i rami e da  $N + 1$  a  $L$  le corde, e si definisce *matrice dei tagli*  $Q$  una matrice di  $N$  righe e di  $L = N + M$  colonne. Per attribuire i valori dei coefficienti  $q_{ij}$  conviene associare un verso convenzionale positivo, così da poter dire se la freccia indicata su ogni lato sia concorde o discorde con tale verso. ■

Si tolga un ramo qualsiasi, per esempio il ramo  $k$ ; l'albero così tagliato (ecco da dove viene il nome *taglio*) si disconnette in due sotto alberi e i nodi vengono separati in due sottoinsiemi  $X$  e  $Y$ ; il ramo  $k$  ha la punta della freccia su un nodo dell'insieme  $X$  e la coda della freccia su un nodo dell'insieme  $Y$ . Si assuma come verso convenzionale positivo quello del ramo  $k$ , cioè quello che va da uno dei nodi dell'insieme  $Y$  a uno dei nodi dell'insieme  $X$ ; ogni altra freccia del grafo può collegare due nodi dello stesso insieme, e quindi non ha nessun verso, oppure un nodo dell'insieme  $X$  e un nodo dell'insieme  $Y$  e allora ha un verso concorde o discorde secondo la convenzione assunta. ■

Gli elementi  $q_{ij}$  della matrice  $Q$  valgono

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il lato } j \text{ è concorde con il ramo } i \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ è discorde con il ramo } i \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non è né concorde né discorde con il ramo } i \end{cases}$$

Si noti che così facendo, nuovamente, le prime  $N$  colonne formano una matrice identità, e le altre  $M$  colonne non hanno una struttura particolare, salvo che ogni colonna può avere diversi elementi diversi da 0; precisamente sono diversi da 0 gli elementi corrispondenti ai rami che insieme alla corda considerata formano una maglia. ■

La legge di Kirchhoff delle correnti si scrive ora

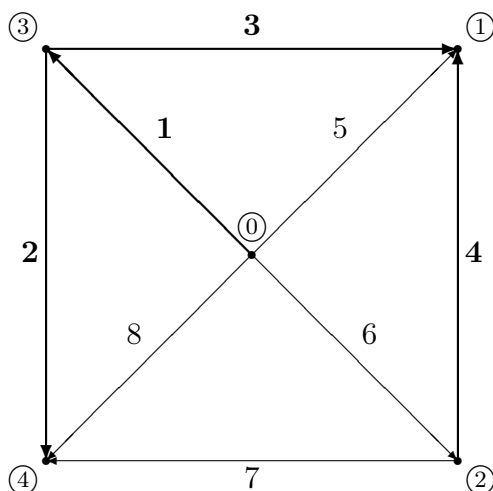
$$QI = 0 \quad (\text{A.2})$$



**Esempio A.2** — Si faccia riferimento allo stesso grafo riportato nuovamente nella figura A.2 con i lati rinumerati in accordo con la loro presenza sull'albero.

Ora la matrice dei tagli vale

$$Q = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$



**Figura A.2.** Grafo con albero ramificato. I nodi sono identificati dai numeri racchiusi in un cerchietto; i rami sono tracciati con linee più scure di quelle usate per le corde e sono individuati con numeri in neretto.



- Si definisce *matrice delle maglie*  $\mathbf{B}$  una matrice di  $M$  righe e  $L$  colonne costruita numerando da 1 a  $M$  le corde di un coalbero e da  $M+1$  a  $L$  i rami dell'albero; gli elementi  $b_{ij}$  della matrice  $\mathbf{B}$  hanno i valori corrispondenti alla regola seguente; ogni corda insieme
- ad alcuni rami dell'albero individua una e una sola *maglia*, etichettata mediante un numero identico a quello della corrispondente corda, lungo la quale si può definire un verso convenzionale positivo di percorrenza, per esempio concorde al verso della corda. Perciò gli elementi della matrice delle maglie valgono

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se la freccia sul lato } j \text{ è concorde con il verso della maglia } i \\ -1 & \text{se la freccia sul lato } j \text{ è discorde con il verso della maglia } i \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non è lungo la maglia } i \end{cases}$$

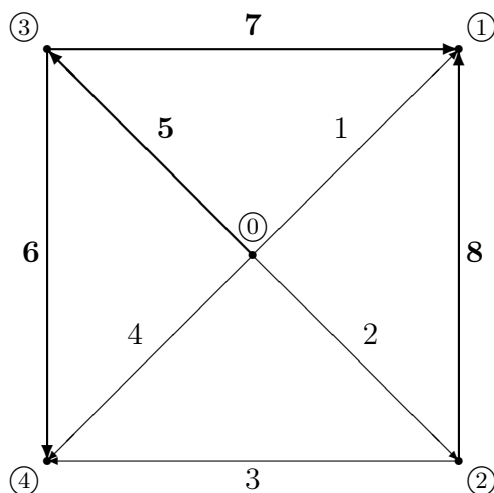
In questo modo è evidente che le prime  $M$  colonne formano una matrice identità.

- Mediante la matrice delle maglie la legge di Kirchhoff delle tensioni si scrive semplicemente

$$\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$



**Esempio A.3** — Riprendiamo il solito grafo riportato nuovamente nella figura A.3 con i lati rinumerati.



**Figura A.3.** Maglie associate a un albero. I nodi sono identificati dai numeri racchiusi in un cerchietto; i rami sono tracciati con linee più scure di quelle usate per le corde e sono individuati con numeri in neretto.

La matrice delle maglie vale ora

$$B = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



È evidente che le tre matrici  $A$ ,  $B$  e  $Q$  descrivono la stessa realtà, lo stesso *connettore*; esse descrivono i vincoli che il connettore impone alle tensioni e alle correnti di qualsivoglia componente venga collegato ai suoi nodi. Se vogliamo, possiamo pensare a una qualunque formulazione della legge di Kirchhoff delle correnti e ad una corrispondente formulazione della legge di Kirchhoff delle tensioni e considerarle come le equazioni costitutive di un circuito con  $L$  porte indipendenti; le  $N$  leggi delle correnti e le  $M$  leggi delle tensioni formano appunto un sistema di  $L$  equazioni. ■

Ma visto che le tre matrici descrivono la stessa realtà, esistono dei rapporti fra di loro? Ebbene sì. Le matrici  $A$  e  $Q$  si ricavano l'una dall'altra rinumerando i lati (quindi riordinando le colonne) ed eseguendo delle combinazioni lineari delle righe; con queste operazioni le leggi delle correnti che esse individuano non cambiano (cioè cambiano aspetto, ma esprimono sempre la stessa realtà).

▽

**Esempio A.4** — Riprendiamo la matrice di incidenza dell'esempio A.1 e vediamo come trasformarla con le operazioni indicate nella matrice dei tagli dell'esempio A.2. Prima rieichettiamo le colonne con la numerazione dei rami omologhi della figura A.2 e riordiniamo le colonne corrispondentemente ottenendo

$$\mathbf{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Poi cerchiamo di diagonalizzare la prima sottomatrice quadrata; per fare questo numeriamo le righe 3, 4, 1 e 2 e riordiniamole secondo questi indici

$$\mathbf{A} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora eseguiamo combinazioni di righe al fine di togliere i due valori  $-1$  che compaiono nella prima riga, il valore  $+1$  che compare fuori della diagonale nella terza riga e infine cambiamo segno all'ultima riga

$$\mathbf{A} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}$$

e constatiamo di avere ottenuto la matrice  $\mathbf{Q}$ .

△

Il legame fra le tre matrici topologiche è più sottile quando interviene la matrice  $\mathbf{B}$ . Tuttavia se definiamo i potenziali nodali mediante il vettore  $\mathbf{V}_n$ , con  $i$  che va da 1 a  $N$  in corrispondenza dei rami dell'albero stellato (cioè è  $V_{ni} = V_i$  per  $i = 1, \dots, N$ ), possiamo constatare che vale la relazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}_n \quad (\text{A.4})$$

- che non rappresenta altro che la legge delle tensioni; infatti l'equazione (A.4) conferma che le prime  $N$  tensioni di ramo sono identiche ai corrispondenti potenziali nodali, mentre tutte le altre tensioni sono date dalla differenza fra due potenziali nodali; detto in altri termini la legge delle tensioni è formulata con riferimento a semplici maglie triangolari delle quali due lati sono rami e il terzo è una corda.

Con la matrice  $\mathbf{Q}$  vale una relazione simile; dette  $\mathbf{V}_t$  le tensioni ai capi dei rami dell'albero, tutte le tensioni del grafo sono esprimibili come

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_t \quad (\text{A.5})$$

Le prime  $N$  righe sono delle identità, mentre le altre  $M$  righe dicono che ogni tensione di corda è una somma algebrica delle tensioni di lato lungo la maglia identificata da quella

- corda. Si tratta quindi di una formulazione alternativa della legge delle tensioni.

Infine con la matrice  $\mathbf{B}$  è possibile definire le correnti di maglia  $\mathbf{I}_m$  corrispondenti alla corrente della corda che identifica ogni maglia. Si può allora scrivere

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}_m \quad (\text{A.6})$$

Versione del 3 ottobre 2001

Le prime  $M$  equazioni sono identità, mentre le equazioni relative alle correnti di ramo dicono che queste correnti sono una somma algebrica delle correnti di maglia relative a tutte le maglie di cui quel ramo fa parte. Anche in questo caso si può verificare che l'equazione (A.6) è una formulazione alternativa della legge delle correnti. ■

È piuttosto semplice verificare la correttezza delle leggi delle tensioni e delle correnti espresse mediante le equazioni (A.4)–(A.6).

Se ne deduce anche che le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{Q}$  sono *ortogonali* alla matrice  $\mathbf{B}$ , cioè che i loro prodotti “scalari” sono nulli; per esempio ■

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$$

Lo si potrebbe verificare “sperimentalmente” sulle matrici ricavate negli esempi A.1–A.3, il che non guasta affatto, ma non sarebbe una dimostrazione. In realtà basta premoltiplicare per il vettore trasposto dei potenziali nodali; si ha che

$$\mathbf{V}_n^T \mathbf{A} = \mathbf{V}^T$$

perciò

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B}^T = (\mathbf{B}\mathbf{V})^T = \mathbf{0}$$

il che prova l'ortogonalità. La stessa dimostrazione può essere ripetuta per l'ortogonalità della matrice  $\mathbf{B}$  con la matrice  $\mathbf{Q}$ .

Tale ortogonalità serve anche per provare il teorema di Tellegen e la reciprocità del connettore. ■

Siano  $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{I}'$  e  $\mathbf{V}''$ ,  $\mathbf{I}''$  due sistemi di tensioni e di correnti alle porte del connettore che ne soddisfano le equazioni costitutive, cioè che soddisfano alle leggi delle tensioni e delle correnti descritte dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{Q}$  relative allo stesso grafo del connettore.

La reciprocità di un circuito con diverse porte esiste se vale la condizione ■

$$(\mathbf{V}')^T \mathbf{I}'' = (\mathbf{V}'')^T \mathbf{I}' \quad (\text{A.7})$$

Il teorema di Tellegen si riferisce ad una rete chiusa e dice che ogni membro dell'equazione (A.7) è nullo, interpretando però le tensioni e le correnti come quelle che si stabiliscono alle porte dei componenti. È evidente però che una volta che i componenti sono inseriti nel connettore e sono soggetti a due diversi insiemi di eccitazioni le tensioni e le correnti alle porte dei componenti sono anche le tensioni e le correnti alle porte del connettore. ■

Ora, poiché le tensioni e le correnti soddisfanno alle equazioni costitutive del connettore, valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \mathbf{A}^T \mathbf{V}'_n \\ \mathbf{I}'' &= \mathbf{B}^T \mathbf{I}''_m \end{aligned}$$

che, sostituite nel primo membro dell'equazione (A.7), porgono

$$\mathbf{V}'_n{}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{I}''_m = \mathbf{0}$$

grazie all'ortogonalità delle matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Perciò la reciprocità del connettore e il teorema di Tellegen dipendono entrambi dall'ortogonalità delle matrici topologiche e, in sostanza, dai due principi di Kirchhoff. ■

Come l'ortogonalità rende le tre matrici topologiche ricavabili l'una dall'altra? Per le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{Q}$  abbiamo già visto; per ricavare  $\mathbf{B}$  da  $\mathbf{Q}$  si può procedere come segue.

Versione del 3 ottobre 2001

Si numerano i lati con lo stesso indice per scrivere entrambe le matrici; quindi i rami sono numerati da 1 a  $N$  e le corde da  $N + 1$  a  $L$ , le colonne delle due matrici sono ordinate secondo gli indici dei lati; le colonne relative all'albero, come si è già notato formano una matrice identità dentro la matrice  $\mathbf{Q}$ ; le restanti colonne della matrice  $\mathbf{Q}$  si riferiscono alle corde e la chiamiamo  $\mathbf{Q}_c$ ; riordinata la numerazione delle colonne come si è detto, le colonne della matrice  $\mathbf{B}$  relative al coalbero formano una matrice identità, e le altre colonne si riferiscono ai rami e formano una matrice che chiamiamo  $\mathbf{B}_t$ ; possiamo quindi porre<sup>2</sup>

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{1} : \mathbf{Q}_c] \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_t : \mathbf{1}]$$

L'ortogonalità impone che sia

$$\mathbf{Q}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}_t^T + \mathbf{Q}_c = \mathbf{0}$$

da cui

$$\mathbf{B}_t = -\mathbf{Q}_c^T \quad (\text{A.8})$$

▽

**Esempio A.5** — I risultati degli esempi A.2 e A.3 confermano pienamente l'equazione (A.8) purché bene inteso ci si riferisca alla stessa numerazione dei lati del grafo.

△

Le matrici topologiche sono molto utili per sviluppare concetti teorici, come si è fatto per esempio nel provare la reciprocità del connettore e il teorema di Tellegen. Esse sono molto utili anche per agevolare la scrittura dei programmi di analisi automatica. Il programma PSpice, senza che l'utente se ne accorga, usa la matrice di incidenza, che fra le tre è quella che si scrive più facilmente anche senza fare riferimento esplicito all'albero stellato a cui ci siamo riferiti qui.

Il programma PSpice analizza circuiti lineari e non lineari; facendo riferimento a quelli lineari esso usa il metodo dei nodi “modificato”; secondo tale metodo tutti i componenti le cui porte siano governate da un'equazione costitutiva del tipo

$$I_k = \sum_{j=1}^L Y_{kj} V_j + J_k \quad (\text{A.9})$$

vengono trattate senza modifiche; per le altre porte le correnti di porta vengono aggiunte alle incognite<sup>3</sup>, ma per ciascuna di queste porte viene aggiunta un'ulteriore equazione costitutiva al sistema di equazioni; per esempio, per un generatore ideale di tensione, costituente il lato  $k$  collegato fra i nodi  $r$  ed  $s$ , e governato dall'equazione costitutiva  $V_r - V_s = E_k$  viene aggiunta la corrente  $I_k$  alle incognite, e l'equazione costitutiva del generatore viene aggiunta al sistema di equazioni. C'è quindi un'incognita in più e un'equazione in più.

<sup>2</sup> Indichiamo con  $\mathbf{1}$  la matrice identità, visto che il simbolo  $\mathbf{I}$  è già usato per la matrice delle correnti.

<sup>3</sup> Per non confondere i simboli, si può pensare di ricorrere al principio di sostituzione, lasciando la corrente di porta  $I_k$  indicata con questo simbolo, affinché non siano da modificare le leggi delle tensioni e delle correnti, ma la corrente incognita viene sostituita con la corrente impressa del generatore di corrente sostitutivo, scrivendo in sostanza  $I_k = J_k$ , così che anche la porta  $k$ -esima viene trattata con un'equazione costitutiva del tipo dell'equazione (A.9), ma trattando  $J_k$  come un'incognita.

Riscrivendo l'equazione (A.9) in termini matriciali e applicando alle varie grandezze le leggi delle tensioni e delle correnti espresse mediante la matrice di incidenza si ricava

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \mathbf{YV} + \mathbf{J} \\
 \mathbf{Y}_n &= \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T \\
 \mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n &= -\mathbf{AJ} \\
 \mathbf{V}_n &= -\mathbf{Y}_n^{-1} \mathbf{AJ} \\
 \mathbf{V} &= \mathbf{A}^T \mathbf{V}_n
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

La prima equazione è l'insieme delle equazioni costitutive dei componenti; sostituendo formalmente le tensioni di lato con i potenziali nodali e imponendo la legge delle correnti si ottiene la terza equazione, dove la matrice di sistema è data dalla seconda equazione. Se non ci sono rami anomali e non è necessario aggiungere altre equazioni, la matrice delle ammettenze nodali  $\mathbf{Y}_n$  è molto più piccola e meno sparsa della matrice  $\mathbf{Y}$ . Se il circuito non è patologico, essa è invertibile, come formalmente indicato nella quarta equazione (in realtà basta risolvere un sistema di equazioni); ottenuti i potenziali nodali li si sostituisce nella quinta equazione per trovare le tensioni di lato, che a loro volta, ora che sono note, vengono sostituite nella prima per ricavare tutte le correnti di lato.

Tranne la quarta equazione, che può essere un po' laboriosa se il numero di nodi indipendenti è elevato, tutte le altre equazioni non sono altro che combinazioni lineari di oggetti noti dalla descrizione stessa del circuito. Questa infatti richiede che il circuito sia descritto specificando quale componente (forma dell'equazione costitutiva) caratterizzato da quali parametri numerici (valori numerici) sia collegato fra quali nodi (coefficienti della matrice di incidenza).

### A.3 Circuiti degeneri o patologici

Nei circuiti lineari abbiamo notato che è possibile che le funzioni di trasferimento siano di grado inferiore al numero dei componenti con memoria, o meglio, al numero di equazioni costitutive di tipo differenziale del primo ordine dei vari componenti con memoria.

Trattando il problema direttamente nel dominio del tempo, si dice che sono degeneri i circuiti nei quali i vincoli imposti dal connettore impediscono di fissare arbitrariamente le condizioni iniziali di tutti i componenti con memoria. Questo implica che se il circuito chiuso contiene maglie di soli condensatori e generatori ideali di tensione e/o contiene tagli di soli induttori e generatori ideali di corrente, allora non è possibile fissare una condizione iniziale per ognuno di questi oggetti topologici "strani".

Infatti lungo una maglia formata da soli condensatori e generatori ideali di tensione, le condizioni iniziali devono soddisfare la legge delle tensioni, quindi lungo questo tipo di maglia una condizione iniziale è combinazione lineare delle altre. Per ogni istante successivo la tensione ai capi di quel condensatore continua ad essere la stessa combinazione lineare delle tensioni sugli altri condensatori e generatori ideali della stessa maglia, quindi l'equazione differenziale di quel condensatore può essere sostituita a tutti gli effetti da una combinazione lineare delle tensioni degli altri condensatori. Il numero di equazioni differenziali indipendenti diminuisce di una unità. Le stesse considerazioni si possono

fare per i tagli di soli induttori e generatori ideali di corrente<sup>4</sup>.

Con la trasformazione di Laplace e il metodo simbolico l'argomentazione precedente non è più tanto rigorosa; abbiamo infatti visto l'esempio 3.14 dove era presente una maglia di soli condensatori e dove nonostante tutto abbiamo fissato le condizioni iniziali in modo totalmente arbitrario e il metodo simbolico ci ha consentito di trovare una soluzione corretta e comprensiva della discontinuità all'istante iniziale.

L'argomento delle condizioni iniziali e delle equazioni differenziali non linearmente indipendenti non sembra più applicabile, ma gli elementi topologici degeneri producono lo stesso l'abbassamento del grado delle funzioni di trasferimento o la riduzione del numero di modi propri indipendentemente dalle condizioni iniziali.

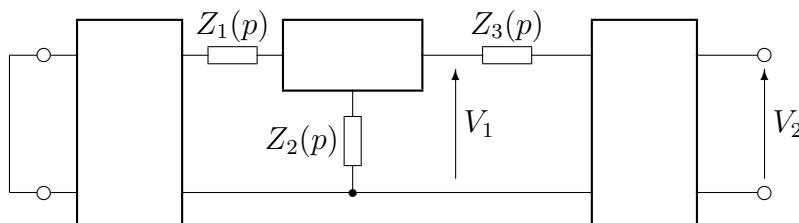
Per quanto riguarda la riduzione del numero dei modi propri di oscillazione libera è opportuno liberarsi dei generatori indipendenti e spegnerli tutti.

Successivamente si possono identificare i tagli patologici e le maglie patologiche.

- Un taglio di impedenze è patologico alla pulsazione  $p_0$  se questa pulsazione costituisce un polo per tutte le impedenze del taglio. Una maglia di ammettenze è patologica alla pulsazione  $p_0$  se questa pulsazione costituisce un polo per tutte le ammettenze della maglia. La riduzione del numero di modi propri è pari al numero totale di tagli e maglie indipendenti patologiche alla pulsazione  $p_0$ . Lo stesso taglio e/o la stessa maglia può essere patologico a più di una pulsazione. La pulsazione  $p_0$  generalmente non compare fra i modi propri del sistema; dipende se il sistema è osservato mediante un misuratore che fa parte del taglio oppure che non ne fa parte.

Non cercherò di dimostrare le affermazioni precedenti in modo completo e rigoroso, ma cercherò di farne intuire la validità.

Supponiamo di avere un circuito come quello indicato nella figura A.4.



**Figura A.4.** Taglio di impedenze patologico alla pulsazione  $p_0$

Supponiamo che alla pulsazione  $p_0$  le tre impedenze  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  presentino tutte e tre un polo. Esse formano un taglio, quindi il taglio è patologico alla pulsazione  $p_0$ . Il generatore di tensione a sinistra è spento, quindi si comporta come un cortocircuito; due voltmetri ideali misurano le tensioni  $V_1$  e  $V_2$  della risposta libera che il circuito manifesta quando i suoi componenti reattivi siano inizialmente carichi. Si noti che  $V_1$  fa parte del taglio, mentre  $V_2$  è collegato fra due nodi che non fanno parte del taglio.

- Supponiamo di applicare al circuito un'eccitazione di tensione, per esempio "accendendo" un generatore ideale di tensione in serie a  $Z_2$  e questo generatore generi un'eccitazione cisoidale di pulsazione  $p_0$ . La componente della risposta isomorfa all'eccitazione, misurata in qualunque punto del circuito, è nulla se la funzione di trasferimento verso quel punto è nulla. Ora poiché le tre impedenze si comportano come circuiti aperti alla pulsazione complessa della risposta isomorfa, è chiaro oltre ogni dubbio che  $V_2$  non rivela

<sup>4</sup> Il precedente paragrafo sulla topologia e le matrici topologiche dei circuiti dovrebbe avere tolto ogni dubbio sul fatto che un taglio non è formato in generale dai lati che convergono in un nodo.

nessuna componente isomorfa. Potrebbe nascere qualche dubbio per il voltmetro  $V_1$ . La corrente isomorfa che il generatore eroga è nulla, è vero, ma questa corrente “percorre” dei circuiti aperti, e fino a prova contraria prodotti del tipo  $0 \times \infty$  possono dare luogo a un risultato non nullo. Per calcolare correttamente il risultato bisogna eseguire un passaggio al limite per  $p \rightarrow p_0$  sulla funzione di trasferimento che dà ragione della tensione  $V_1$  per effetto di un’eccitazione  $E$  in serie a  $Z_2$ . Se il risultato di questo passaggio al limite è diverso da zero, vuol dire che la funzione di trasferimento da  $E$  a  $V_1$  calcolata in  $p_0$  ha un valore finito e diverso da zero. In ogni caso questa funzione di trasferimento non presenta sicuramente un polo in  $p_0$ .

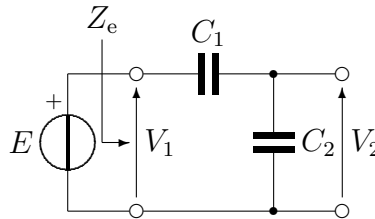
Se invece del generatore di tensione mettiamo in parallelo a  $Z_2$  un generatore di corrente che produca un’eccitazione cisoidale di pulsazione  $p_0$ , la componente isomorfa della corrente in  $Z_2$  è nulla, ma la corrente da qualche parte deve pur passare. Essa si ripartirà fra gli altri componenti del taglio in proporzione ai limiti per  $p \rightarrow p_0$  delle loro ammettenze, cosicché una parte di questa corrente cisoidale arriva anche nella parte destra del circuito facendo segnare un valore in generale non nullo di componente isomorfa al voltmetro  $V_2$ . Che cosa succede invece per il voltmetro  $V_1$ ? Succede che una corrente finita che attraversa un circuito aperto, l’impedenza  $Z_3$ , vi produce una tensione infinita. Quindi la funzione di trasferimento dal generatore di corrente al voltmetro  $V_1$  presenta sicuramente un polo in  $p_0$ , mentre la funzione di trasferimento dal generatore di corrente verso  $V_2$  è finita e in generale non nulla, quindi non presenta certamente un polo in  $p_0$ .

Possiamo ripetere ragionamenti analoghi se riaccendessimo il generatore inizialmente presente alla sinistra del primo doppio bipolo; esso con il primo doppio bipolo e l’impedenza  $Z_1$  avrebbe un circuito equivalente di Thevenin con un’impedenza interna che contiene anche  $Z_1$  e quindi continua ad esistere il taglio patologico in  $p_0$ . Si potrebbe concludere che la tensione isomorfa segnata dal voltmetro  $V_1$  potrebbe essere diversa da zero, ma la tensione isomorfa segnata da  $V_2$  è senz’altro nulla.

Ragionando nello stesso modo si può concludere che la presenza di diversi tagli fra di loro collegati e formati da impedenze con poli coincidenti portano a un numero di zeri di trasmissione che non corrisponde al numero di bipoli che si comportano da circuito aperto, ma al loro numero diminuito del numero dei tagli indipendenti formati da impedenze con gli stessi poli. Siccome il numero di zeri di una funzione razionale, contando anche l’eventuale zero all’infinito con la sua molteplicità, uguaglia il numero di poli, se diminuisce il numero di zeri, diminuisce dello stesso valore il numero di poli.

▽

**Esempio A.6** — Si consideri il partitore capacitivo della figura A.5; esso presenta sia una maglia patologica sia un taglio patologico; la maglia è patologica per  $p = \infty$ , il taglio è patologico per  $p = 0$ .



**Figura A.5.** Partitore capacitivo

Per quanto si è detto, quando si osserva la tensione di uscita  $V_2$  la funzione di trasferimento  $H(p) = V_2/E$  non deve presentare modi propri né a frequenza nulla né a frequenza infinita, perché il voltmetro  $V_2$ , pur facendo parte del taglio, è “esterno” alla maglia. In effetti il calcolo del rapporto di tensioni porta a

$$H(p) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Per quanto riguarda l'impedenza d'entrata  $Z_e(p)$  dobbiamo sostituire il generatore di tensione  $E$  con un generatore di corrente  $J$ ; con questa sostituzione i tagli indipendenti diventano due, quello formato da  $C_1$  e da  $C_2$  e quello formato da  $C_1$ , dal generatore  $J$  spento e dal voltmetro  $V_1$ . L'impedenza  $Z_e(p)$  è definita come  $Z_e(p) = V_1/J$ ; il voltmetro  $V_1$  è parte integrante di uno dei due tagli, quindi il polo che rende patologico quel taglio rimane presente nella funzione di trasmissione cercata; il calcolo diretto dà infatti

$$Z_e(p) = \frac{1}{(C_1 \oplus C_2)p}$$

Lo stesso ragionamento è applicabile all'impedenza di trasferimento  $Z_m(p) = V_2/J$ .

Lasciando al suo posto il generatore  $E$ , si potrebbe calcolare l'ammettenza  $Y_e(p)$ , ma bisogna inserire un amperometro  $I_e$  in serie al generatore di tensione; l'amperometro, equivalente circuitalmente a un cortocircuito, non distrugge la maglia patologica all'infinito formata dal generatore  $E$  (spento), dall'amperometro  $I_e$ , da  $C_1$  e da  $C_2$ ; poiché l'amperometro è parte integrante della maglia patologica il polo all'infinito resta nella funzione ammettenza cercata; infatti il calcolo diretto dà

$$Y_e = (C_1 \oplus C_2)p$$

△

## A.4 La causalità e le funzioni di trasferimento

Abbiamo già visto che l'antitrasformata di Laplace eseguita su una funzione avente determinate caratteristiche produce una funzione del tempo causale, cioè nulla per tempi negativi. Intendendo la funzione di trasferimento come risposta all'impulso vuol dire che il sistema risponde contemporaneamente o successivamente all'eccitazione. Il che non ci sorprende perché non abbiamo mai visto un sistema fisico iniziare a rispondere

- prima di essere stato eccitato. I sistemi fisici reali sono causali; quelli che cominciassero a rispondere prima di essere eccitati sarebbero sistemi predittivi.
- Ovviamente un sistema causale deve essere stabile, altrimenti produce una “risposta”
- anche da solo, senza bisogno di essere eccitato; gli oscillatori, che appunto oscillano senza ricevere nessun segnale in ingresso, sono intrinsecamente instabili e sono costruiti in modo da mantenere le proprie oscillazioni di ampiezza, frequenza e forma molto controllate, ma non sono sistemi destinati a ricevere un'eccitazione e a produrre una conseguente risposta.

- Per semplicità supponiamo inizialmente che il sistema di cui vogliamo studiare le proprietà derivanti dalla causalità sia asintoticamente stabile e che la sua funzione di trasferimento  $H(p)$  sia nulla all'infinito. Successivamente rilasceremo queste condizioni.

Versione del 3 ottobre 2001

Abbiamo già visto che una funzione di trasferimento asintoticamente stabile deve essere regolare su tutto il semipiano destro chiuso, cioè per  $\sigma \geq 0$ , non semplicemente per  $\sigma > 0$ ; si confronti con il paragrafo 3.9.

In quanto analitica in tutto il semipiano di destra chiuso la funzione  $H(p)$  annulla l'integrale di Cauchy (2.5) esteso al contorno del semipiano destro

$$\oint_{\gamma} H(p) dp = 0$$

Inoltre la funzione analitica è completamente definita dentro e sul contorno dai valori che essa assume sul contorno, come ci ricorda l'equazione (2.6)

$$H(p) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{H(z)}{z - p} dz$$

Se  $H(p)$  è nulla all'infinito,  $H(z)/(z - p)$  ha all'infinito (del piano  $z$ ) uno zero di molteplicità superiore a 1; questo fatto unito alla considerazione che il contorno  $\gamma$  è formato dall'asse immaginario e da una semicirconferenza di raggio infinito giacente nel semipiano destro, permette di concludere che il contributo all'integrale di Cauchy del percorso su questa semicirconferenza è nullo, benché la lunghezza del percorso sia infinita (però solo di ordine 1). Resta pertanto

$$H(j\omega) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(jy)}{y - \omega} dy \quad (\text{A.11})$$

Finalmente separando parte reale e parte immaginaria nell'equazione (A.11) si ricava l'importantissima condizione di causalità che lega parte reale e parte immaginaria fra di loro

$$\text{Re}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[H(jy)]}{y - \omega} dy \quad (\text{A.12a})$$

$$\text{Im}[H(j\omega)] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}[H(jy)]}{y - \omega} dy \quad (\text{A.12b})$$

La coppia di equazioni (A.12) costituisce anche una coppia di trasformate-antitrasformate integrali che passano sotto il nome di *trasformata e antitrasformata di Hilbert*. A parte i nomi, le due relazioni (A.12) dicono una cosa importantissima: in un sistema causale la parte reale della funzione di trasferimento e la sua parte immaginaria hanno i loro valori sull'asse  $\omega$  reciprocamente legati dalle equazioni appena trovate. Per avere un sistema causale non si possono specificare le prestazioni in regime sinusoidale arbitrariamente e separatamente per la parte reale e per la parte immaginaria. ■

Se la funzione  $H(p)$ , oltre ad essere analitica nel semipiano destro chiuso, è anche priva di zeri in quello stesso semipiano, anche la funzione  $\ln[H(p)]$  è analitica nel semipiano destro chiuso e le si possono applicare le due trasformate di Hilbert ottenendo così un legame fra il modulo e l'argomento

$$\ln |H(j\omega)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arg[H(jy)]}{y - \omega} dy \quad (\text{A.13a})$$

$$\arg[H(j\omega)] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |H(jy)|}{y - \omega} dy \quad (\text{A.13b})$$

Anche questi vincoli sul modulo e sull'argomento della funzione di trasferimento sono molto importanti e derivano sempre dalla causalità.

Che cosa succede se  $H(p)$  ha un valore non nullo, ma limitato, all'infinito? Nulla di particolare, perché le relazioni (A.12) valgono per la funzione  $H(p) - H(\infty)$  e quindi, con piccole modifiche, quelle equazioni continuano a valere. Esistono delle funzioni di trasferimento la cui parte reale non può essere negativa (vedi il paragrafo A.5), quindi l'equazione (A.12a) deve avere a secondo membro l'aggiunta di un valore costante affinché la parte reale così determinata abbia la parte reale non negativa. Il più piccolo valore della costante che rende la parte reale non negativa, non ha un nome particolare, ma la

- funzione  $H(p)$  corrispondente a questo valore si chiama *a parte reale minima*.

Che cosa succede se la funzione  $H(p)$  ha poli (di molteplicità non superiore a 1 per la stabilità) sull'asse immaginario? Non succedono grandi cose, ma gli integrali di Hilbert andrebbero calcolati deformando il percorso  $\gamma$  in modo da girare attorno ai poli sull'asse immaginario, sconfinando dentro il semipiano destro con semicirconferenze di raggio tendente a zero. Per una certa categoria di funzioni di trasferimento questo si può evitare; queste particolari funzioni hanno i loro poli sull'asse immaginario con residui reali, per cui la funzione  $H(p)$  può essere scomposta in

$$H(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \sum_i \frac{2A_i p}{p^2 + \omega_i^2} + H_r(p)$$

dove  $A_\infty$ ,  $A_0$  e  $A_i$  sono i residui nei poli all'infinito, nell'origine e nei punti  $\omega_i$ , e dove  $H_r(p)$  è regolare su tutto il semipiano destro chiuso perché le singolarità di  $H(p)$  sull'asse immaginario sono state tutte messe in evidenza con gli altri termini. Si noti che i termini con poli immaginari messi in evidenza hanno tutti parte reale nulla sull'asse immaginario, quindi  $H_r(j\omega)$  e  $H(j\omega)$  hanno la stessa parte reale. Le trasformate di Hilbert applicate a  $H_r$  danno luogo ad una certa parte reale e alla corrispondente parte immaginaria. Se a quest'ultima si aggiungono i contributi dei poli immaginari di  $H$  si hanno direttamente le relazioni fra parte reale e parte immaginaria di  $H(j\omega)$ . La funzione  $H_r(p)$ , priva dei

- poli immaginari di  $H(p)$ , proprio per questo motivo si dice *a parte immaginaria minima*.

Discorsi simili si possono ripetere per la coppia di trasformate di Hilbert che legano modulo e argomento; una differenza essenziale è che il concetto di funzione di trasferimento a modulo minimo non ha nessun senso, perché il modulo è sempre non negativo e il minimo di una grandezza non negativa è zero.

Invece dobbiamo rimuovere la limitazione della mancanza di zeri nel semipiano destro chiuso. Supponiamo che  $H(p)$  abbia  $n$  zeri  $p_k$  (reali o complessi e coniugati) nel semipiano destro. Allora può essere scritta nella forma

$$H(p) = H_{\text{fm}}(p) \prod_{k=1}^n \frac{p - p_k}{p + p_k}$$

dove  $H_{\text{fm}}(p)$  differisce da  $H(p)$  solo nel senso che tutti i suoi zeri a destra sono stati “riflessi” a sinistra; l'altro fattore, che possiamo chiamare  $H_{\text{pt}}(p)$ , tiene conto di questa

- riflessione. Il secondo fattore prende il nome di *funzione passatutto* perché il suo modulo è unitario per qualsiasi pulsazione; il suo compito consiste solo nel ruotare la fase; esso infatti aggiunge all'argomento di  $H_{\text{fm}}(j\omega)$  un termine negativo pari a

$$\arg[H_{\text{pt}}(j\omega)] = -2 \sum_{k=1}^n \arctan \frac{\omega - \omega_k}{\sigma_k}$$

come si ricava dall'equazione (4.18b), tenendo conto che ogni zero a destra contribuisce alla fase come un polo a sinistra.

Si definisce *ritardo di gruppo* la funzione

$$\tau(\omega) = -\frac{d\{\arg[H_{pt}(j\omega)]\}}{d\omega} \quad (\text{A.14})$$

Il ritardo di gruppo ha significato per i segnali modulati; se esso è costante, tutte le componenti dello spettro di un segnale sono ritardate della stessa quantità e la forma d'onda del segnale non risulta deformata; esso differisce dal *ritardo di fase* che vale invece

$$T = -\frac{\arg[H_{pt}(j\omega)]}{\omega}$$

Il ritardo di fase rappresenta la pendenza della corda fra l'origine e la funzione argomento, mentre il ritardo di gruppo rappresenta la pendenza della tangente alla funzione argomento (entrambe a parte il segno).

Il ritardo di gruppo della funzione passatutto vale

$$\tau(\omega) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{(\omega - \omega_k)^2 + \sigma_k^2}$$

ed è una quantità sempre positiva. La funzione  $H_{fm}(p)$  dovrebbe quindi chiamarsi funzione *a ritardo minimo*, mentre per ragioni storiche continua a chiamarsi funzione *a fase minima*.

Tutto ciò premesso le trasformate di Hilbert date dalle equazioni (A.13) permettono di ricavare dal modulo l'argomento della funzione a ritardo minimo e dall'argomento a ritardo minimo il corrispondente modulo. Il passaggio dal modulo ad un argomento a ritardo non minimo si ottiene spostando da sinistra a destra un certo numero di zeri, cosa che si può fare in un numero discreto, ma finito, di modi diversi.

Vediamo ora perché non è possibile costruire o approssimare un filtro ideale il cui modulo e la cui fase siano specificati separatamente; supponiamo di definire il filtro passabasso ideale nel modo seguente

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0) \\ \arg[H(j\omega)] &= -\omega T \end{aligned}$$

Tale funzione di trasferimento definisce un modulo unitario in una certa banda di pulsazione e nullo esternamente a tale banda; in questo senso essa rappresenta la funzione di trasferimento di un filtro ideale.

Innanzitutto la fase: le trasformate di Hilbert (A.13) consentono di determinare la fase associata alla funzione a ritardo minimo, la quale non ha necessariamente il ritardo pari a  $T$ , come è stato specificato; però non è escluso che aggiungendo altro ritardo mediante una funzione passatutto non si possa raggiungere il ritardo costante  $T$  specificato o magari un altro ritardo, eventualmente maggiore, purché costante. In fondo avere la risposta ritardata di più rispetto al desiderato non è un fatto grave, basta solo aspettare un poco più a lungo che il sistema risponda, ma poi quando risponde dà la risposta desiderata. Lasciamo quindi perdere la fase e concentriamoci sul modulo.

La forma del modulo ideale ci presenta una finestra di pulsazioni fra  $-\omega_0$  e  $+\omega_0$  dove le componenti dello spettro del segnale vengono trasferite inalterate dall'ingresso

all'uscita, mentre esternamente a questo intervallo nessuna componente dello spettro del segnale transita dall'ingresso all'uscita. Si tratta di un filtro passabasso ideale avente la banda passante compresa<sup>5</sup> fra  $-\omega_0$  e  $+\omega_0$ .

La trasformata di Hilbert (A.13b) non consente però di determinare la fase, perché il logaritmo del modulo è infinito esternamente alla banda passante e l'integrale non converge. Che ci sia qualche problema con la causalità? Sì, appunto, il filtro ideale non è causale. Se si considera la specificazione richiesta come la risposta all'impulso e si usa la trasformata e l'antitrasformata di Fourier (quindi come sezione lungo l'asse immaginario della trasformata di Laplace bilatera) si trova che l'antitrasformata di Fourier restituisce la seguente risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{\sin[\omega_0(t - T)]}{(t - T)} \quad \text{per } -\infty < t$$

e si vede bene che questa risposta non è causale (d'altra parte il riferimento alla trasformata di Laplace bilatera ce lo doveva lasciare prevedere).

Per  $T$  sufficientemente grande l'ampiezza della parte non causale della risposta diventa abbastanza piccola, quindi in realtà sarà possibile costruire filtri passabasso causali e molto selettivi in grado di approssimare il filtro passabasso ideale, ma che prevedono un ritardo piuttosto grande. Però questi filtri reali e causali, se realizzati con funzioni a ritardo minimo risultano molto *dispersivi*, cioè il loro ritardo di gruppo sarà tutt'altro che costante e ogni forma d'onda del segnale in ingresso risulterà molto deformata in uscita poiché le varie componenti dello spettro avranno subito ritardi molto diversi.

Proviamo a rilassare la definizione del filtro passabasso ideale e cerchiamo di vedere quanto vale la fase o il ritardo di gruppo associato al modulo

$$|H(j\omega)| = 1/M + (1 - 1/M)(u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0))$$

con  $M$  grande ma non infinito. Questo filtro non introduce nessuna attenuazione in banda passante, ma in banda attenuata introduce un'attenuazione costante, grande ma non infinita, pari a  $\alpha_s = 20 \log M$  per tutte le componenti dello spettro del segnale d'ingresso che cadono fuori della banda passante.

Ora la seconda trasformata di Hilbert (A.13b) ci porge

$$\arg[H(j\omega)] = -\frac{\ln M}{2\pi} \ln \left| \frac{\omega_0 - \omega}{\omega + \omega_0} \right|$$

$$\tau(\omega) = \frac{\ln M}{\pi} \left( \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Come si vede, sia la fase sia il ritardo di gruppo presentano asintoti verticali in corrispondenza delle due frequenze di taglio; il ritardo di gruppo è tutt'altro che costante. Un filtro reale che approssimi la caratteristica del modulo del filtro passabasso ideale causale non avrà il ritardo di gruppo infinito in corrispondenza delle frequenze di taglio, ma l'avrà molto elevato, tanto più elevato quanto maggiore sarà la *discriminazione*

<sup>5</sup> A molti dà fastidio pensare alle frequenze e alle pulsazioni negative; la cosa non deve infastidire affatto, perché nasce proprio dal significato di risposta isomorfa in regime sinusoidale, risposta isomorfa che implica l'uso della formula di Eulero  $\cos \omega t = (e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ , cioè implica la sovrapposizione delle risposte a un segnale complesso di pulsazione positiva e a un secondo segnale complesso di pulsazione negativa.

$\alpha_s = 20 \log M$  e quanto maggiore sarà la *selettività*, data dalla pendenza dei fianchi della curva del modulo<sup>6</sup>. Il filtro reale a ritardo minimo che approssima il filtro ideale causale dovrebbe venire corretto mediante l'aggiunta in cascata di un filtro *passatutto* che inserisca tanto ritardo quanto basta affinché almeno in banda passante il ritardo complessivo sia abbastanza costante.

Conclusione: nel mondo reale, dove i filtri ideali non esistono, selettività e discriminazione non vanno d'accordo con la conservazione delle forme d'onda dei segnali da filtrare; se si desidera un maggiore accordo bisogna accettare un notevole ritardo nella risposta e un costo aggiuntivo tutt'altro che trascurabile.

## A.5 La passività

Nell'esercizio 5.1 è stato proposto di studiare le condizioni di passività in regime sinusoidale in un doppio bipolo simmetrico. Possiamo qui esaminare la passività in generale.

Esaminiamo dapprima la passività di un bipolo; la passività di un doppio o di un multi bipolo si ricava da quella del bipolo connettendo le varie porte fra loro in serie o in parallelo mediante l'interposizione di trasformatori ideali o di giratori i quali, essendo privi di memoria e non assorbendo nessuna energia, non alterano il bilancio energetico del circuito a più porte.

▽

**Esempio A.7** — Tanto per essere specifici, supponiamo di disporre di un doppio bipolo caratterizzato dai parametri ibridi; connettiamo in cascata alla porta 1 un trasformatore di rapporto  $x_1$  e in cascata alla porta 2 un giratore con resistenza di girazione  $x_2$ ; il doppio bipolo risultante ha le grandezze intensive ed estensive scambiate alla porta 2, a causa del giratore (e ovviamente anche moltiplicate o divise per la resistenza di girazione) per cui l'intero doppio bipolo viene ad avere le correnti alle porte come grandezze indipendenti e le tensioni alle porte come grandezze dipendenti. La matrice delle impedenze a vuoto del doppio bipolo risultante diventa

$$\mathbf{Z} = \mathbf{diag}(x_1, x_2) \mathbf{H} \mathbf{diag}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 H_{11} & x_1 x_2 H_{12} \\ x_1 x_2 H_{21} & x_2^2 H_{22} \end{bmatrix}$$

Connettendo ora in serie le porte del doppio bipolo, il bipolo risultante ha un'impedenza equivalente data da

$$Z_e = x_1^2 H_{11} + x_1 x_2 H_{12} + x_1 x_2 H_{21} + x_2^2 H_{22} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

L'impedenza risultante, pertanto, è data da una *forma quadratica* associata alla matrice dei parametri.

Le proprietà di passività che verranno ricavate per i bipoli, quindi anche per  $Z_e$ , dovranno valere per i circuiti con più porte *qualunque* siano i valori dei rapporti di trasformazione e/o le resistenze di girazione. L'ultima espressione trovata lascia subito intuire che le affermazioni "scalari" valide per  $Z_e$  si applicano anche alle matrici  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{H}$  semplicemente enunciandole con linguaggio matriciale.

△

<sup>6</sup> Nel caso del filtro passabasso ideale causale usato qui la selettività è infinita perché i fianchi della curva del modulo sono verticali; ma se anche si prendesse una curva ideale formata da un trapezio, invece che da un rettangolo, il ritardo di gruppo presenterebbe sempre dei massimi piuttosto aguzzi in corrispondenza delle frequenze di taglio.

- Applicando un generatore sinusoidale a un bipolo, la potenza media che esso assorbe vale

$$P_{\text{att}} = I_{\text{eff}}^2 \mathbf{Re}[Z(j\omega)] = V_{\text{eff}}^2 \mathbf{Re}[Y(j\omega)]$$

Perché il bipolo sia passivo sembrerebbe sufficiente richiedere che sia

$$\mathbf{Re}[Z(j\omega)] \geq 0 \quad \text{per qualsiasi pulsazione}$$

$$\mathbf{Re}[Y(j\omega)] \geq 0 \quad \text{per qualsiasi pulsazione}$$

Sebbene questa condizione valida per il regime sinusoidale sia piuttosto forte, da sola non è sufficiente a caratterizzare la passività.

- Per avere una caratterizzazione completa bisogna immaginare di eseguire un esperimento non in regime sinusoidale, ma in regime cisoidale crescente *applicato da sempre*, cioè applicato al tempo  $t = -\infty$ , affinché non si sviluppi il transitorio di accensione.

Poiché il regime cisoidale crescente di pulsazione

$$p_0 = \sigma_0 + j\omega_0 = |p_0| e^{j\vartheta_0} \quad (\text{A.15a})$$

$$\sigma_0 > 0 \quad (\text{A.15b})$$

$$|\vartheta_0| < \pi/2 \quad (\text{A.15c})$$

- non è periodico, non si può più parlare di potenza media, ma al più di potenza istantanea.

Ma la proprietà fisica che un sistema sia passivo si enuncia in termini di energia, non di potenza istantanea; quest'ultima può essere ora positiva, ora negativa, ma l'energia complessivamente assorbita dal sistema dall'inizio dei tempi fino ad un istante qualsiasi non può mai essere negativa; se il bipolo è passivo non può restituire all'esterno (al generatore) più energia di quanta non ne abbia ricevuta in precedenza. Quindi la condizione di passività si enuncia mediante la condizione

$$\mathcal{W}(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) i(\tau) d\tau \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Nel nostro caso supponiamo che la corrente cisoidale valga

$$i(t) = I_0 \mathbf{Re}[e^{p_0 t}] = I_0 e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$$

così che la risposta cisoidale dell'impedenza vale

$$v(t) = I_0 \mathbf{Re}[Z(p_0) e^{p_0 t}] = I_0 |Z(p_0)| e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (\text{A.17a})$$

$$\varphi_0 = \arg[Z(p_0)] \quad (\text{A.17b})$$

Sviluppando i calcoli relativi alla condizione (A.16), usando le notazioni introdotte con le equazioni (A.15) e (A.17), si ricava

$$\mathcal{W}(t) = \frac{I_0^2 |Z(p_0)| e^{2\sigma_0 t}}{4|p_0|} \left[ \frac{\cos \varphi_0}{\cos \vartheta_0} + \cos(2\omega_0 t + \varphi_0 + \vartheta_0) \right] \quad (\text{A.18})$$

Siamo arrivati al dunque: perché sia soddisfatta la condizione di passività (A.16) per ogni valore del tempo è necessario che il contenuto della parentesi quadra nell'equazione (A.18) sia sempre non negativo, quindi che il primo termine non sia minore dell'unità

$$\frac{\cos \varphi_0}{\cos \vartheta_0} \geq 1$$

Ricordando che la funzione coseno è pari ed è decrescente nell'intervallo  $0, \pi/2$ , la condizione trovata può essere espressa nella semplicissima forma

$$|\varphi| \leq |\vartheta| \quad \text{per qualsiasi } |\vartheta| < \pi/2 \quad (\text{A.19})$$

dove è stato fatto cadere il pedice “0”, visto che quella condizione deve valere per qualunque regime cisoidale crescente e non solo per un certo regime cisoidale crescente.

La condizione di passività espressa mediante la disuguaglianza (A.19) è nota come *condizione di Brune delle fasi*. È chiaro che la stessa condizione vale anche per le ammettenze, se non altro perché l'argomento dell'ammettenza è uguale e opposto all'argomento dell'impedenza. Nel seguito scriveremo  $F(p)$  al posto di  $Z(p)$  e di  $Y(p)$  perché le condizioni di passività sono identiche sia per l'una sia per l'altra funzione. A causa di questo fatto l'insieme delle funzioni che rappresentano le impedenze e quello delle funzioni che rappresentano le ammettenze possono essere raggruppate in un'unica classe di funzioni chiamate *immettenze*. Dovrebbe essere chiaro, senza bisogno di ribadirlo, che le immettenze rappresentano le impedenze e le ammettenze dei bipoli, non rappresentano le impedenze e le ammettenze mutue, o di trasferimento, dei circuiti con più porte.

È interessante leggere tale condizione matematicamente. La trasformazione dal piano  $p$  al piano  $F$  in un certo senso può essere visto come una contrazione angolare; il generico punto  $p$  nel semipiano di destra individua un cono di semiapertura pari a  $\vartheta$ . Il punto  $F$ , immagine della trasformazione, individua nel piano  $F$  un altro cono di semiapertura pari a  $\varphi$ ; sovrapponendo i due piani, il cono nel piano  $F$  giace completamente dentro il cono del piano  $p$  e in generale è più piccolo. Inoltre se  $p$  è reale (e positivo), il suo angolo è nullo; ne segue che anche l'angolo di  $F$  è nullo, quindi per ogni  $p$  reale positivo anche  $F$  è reale positivo<sup>7</sup>. Per ogni altro  $p$  nel semipiano di destra l'argomento di  $Z$  dà luogo ad un coseno positivo, quindi la parte reale di  $F$  è necessariamente positiva. Ne segue che la condizione (A.19) può essere trasformata in questo enunciato equivalente

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[F(\sigma + j0)] &= 0 \quad \text{per ogni valore } \sigma > 0 \\ \operatorname{Re}[F(\sigma + j\omega)] &> 0 \quad \text{per ogni valore } \sigma > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

chiamato *condizioni di Brune nel semipiano destro*.

Si potrebbe dimostrare che le condizioni (A.20) coimplicano le condizioni (A.19), ma la dimostrazione, che fa ricorso al lemma di Schwartz [5], sarebbe un esercizio di abilità nel maneggio delle funzioni analitiche e non aggiungerebbe granché alla comprensione dell'aspetto fisico della passività.

Le qualità della funzione  $F(p)$  descritte dalle condizioni (A.20) si esprimono in linguaggio comune dicendo che  $F(p)$  deve essere reale per  $p$  reale e la sua parte reale deve essere positiva quando la parte reale di  $p$  è positiva; questo insistere sugli aggettivi “reale” e “positiva” ha portato a definire questo genere di funzioni con il nome di *funzioni reali positive*.

<sup>7</sup> Il modulo di  $F$  non può essere nullo, perché altrimenti l'energia accumulata dall'inizio dei tempi sarebbe costantemente nulla, il che è assurdo per qualunque bipolo, tranne per un cortocircuito ( $F = Z$ ), o per un circuito aperto ( $F = Y$ ), sui quali non staremmo certo a perder tempo per determinarne le condizioni di passività!

Benché le condizioni (A.20) siano abbastanza semplici, anche dal punto di vista del calcolo, risulta più semplice ancora una terza formulazione che suona così

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}[F(\sigma + j0)] &= 0 && \text{per ogni valore } \sigma > 0 \\
 F(p) &\text{ analitica} && \text{per ogni valore } \sigma > 0 \\
 \lim_{p \rightarrow j\omega_x} (p - j\omega_x)F(p) &= k && \text{con } 0 \leq k < \infty \text{ per ogni } \omega_x \\
 \lim_{p \rightarrow \infty} F(p)/p &= h && \text{con } 0 \leq h < \infty \\
 \operatorname{Re}[F(0 + j\omega)] &\geq 0 && \text{per ogni valore di } \omega
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

- Questi enunciati costituiscono le *condizioni di Brune sull'asse immaginario*.

Anche ora non svolgeremo l'esercizio di manipolazione delle funzioni analitiche per dimostrare che la formulazione (A.21) coimplica la formulazione (A.20) e perciò anche la formulazione (A.19).

Piuttosto ci interessa mettere in luce le proprietà fisiche dei bipoli in relazione alle condizioni matematiche che abbiamo appena trovato.

1. Le condizioni di passività che abbiamo trovato in diverse formulazioni equivalenti non fanno mai riferimento alla natura del bipolo, se sia a parametri concentrati o distribuiti, o se sia formato da un numero limitato o illimitato di componenti; esse implicano solo che il bipolo sia formato da componenti lineari e autonomi (tempo-invarianti), perché altrimenti non potremmo usare la trasformazione di Laplace e quindi non potremmo formulare quelle condizioni in termini di immettenze che sono rapporti di trasformate di Laplace di risposte ed eccitazioni. Quando nell'esempio 3.12 abbiamo scelto una certa determinazione per il radicale che compare nell'impedenza d'entrata di quel circuito con infiniti componenti abbiamo tenuto conto di queste condizioni.
- 2. La prima delle condizioni (A.21) dice che le immettenze sono funzioni hermitiane, cioè funzioni per le quali vale la condizione  $F^*(p) = F(p^*)$ ; questa però è ancora matematica. La cosa importante delle funzioni di trasferimento hermitiane, reali per  $p$  reale, è che consentono di determinare una risposta reale quando il sistema è eccitato con un'eccitazione reale; qui "reale" sta ad indicare una funzione reale del tempo. Ed è proprio questa proprietà che ci consente di trattare il regime sinusoidale e il regime cisoidale reale sovrapponendo gli effetti di due eccitazioni complesse e coniugate. D'altra parte non ci aspetteremmo mica che se eccitiamo un bipolo con una corrente sinusoidale reale ai suoi capi si sviluppi una tensione sinusoidale immaginaria? Questo apparentemente succede con i fasori, ma questi non rappresentano le eccitazioni e le risposte sinusoidali se non assumendo implicitamente la moltiplicazione per  $e^{j\omega t}$  e la conservazione della sola parte reale.
3. La seconda condizione sembra piuttosto vaga. Ricordiamo però che l'analiticità nel semipiano destro assicura la causalità; per quanto riguarda la realtà fisica, non è affatto un vincolo di poco conto.
- 4. La quinta condizione non è altro che la condizione di passività in regime sinusoidale; avevamo già osservato che la condizione di passività in regime sinusoidale, peraltro l'unica che possiamo verificare in laboratorio usando strumenti reali, era una condizione forte ma di per sé non sufficiente; mentre le prime due condizioni sono scontate nei sistemi fisici reali, la quinta è verificabile in laboratorio, ma da sola non basta.

5. Ci vogliono anche la terza e la quarta condizione; la terza condizione riguarda la presenza di poli semplici puramente immaginari, quindi la presenza di modi propri non smorzati. Fisicamente è chiaro, ma nella realtà? Nella realtà non succede che esistano modi propri non smorzati, l'abbiamo già osservato quando abbiamo introdotto la stabilità secondo Liapunov. Siamo costretti ad accettare questa idealizzazione quando vogliamo poter trattare componenti idealizzati, capaci di violare i principi della termodinamica, cioè di operare trasformazioni energetiche reversibili con rendimento unitario. Quindi questo risultato non ci sorprende più di tanto, perché abbiamo deciso di accettare anche la stabilità secondo Liapunov; quello che è sorprendente è che i residui  $k$  siano reali e positivi; questo non ce lo aspettavamo dallo studio della stabilità, ma dipende solo dalla passività del bipolo. Che debbano essere reali è collegato anche alla condizione di passività in regime sinusoidale; infatti se nel polo  $p = j\omega_x$  il residuo fosse complesso  $k = a + jb$ , la parte reale in prossimità del polo varrebbe

$$\operatorname{Re} \left( \frac{a + jb}{p - j\omega_x} + \frac{a - jb}{p + j\omega_x} \right)_{p=j\omega} = \frac{2b\omega_x}{\omega^2 - \omega_x^2}$$

e avrebbe segni opposti a cavallo della discontinuità con valori assoluti grandissimi, quindi la parte reale complessiva diventerebbe negativa per qualche valore di  $\omega$ . Se dunque deve essere  $k = a$ , perché  $a$  deve essere positivo? Questo in effetti ha senso fisico solo se si lascia l'asse  $\omega$  e si va nel semipiano destro, quando si opera con un regime sinusoidale crescente e si chiede che l'energia totale assorbita sia non negativa.

6. Per la quarta condizione relativa al polo all'infinito, le condizioni di stabilità non ci avevano permesso di ricavare nessuna condizione. L'esperimento ideale in regime sinusoidale crescente ci permette di trattare il polo all'infinito chiedendo che il suo "residuo" sia trattato come tutti gli altri residui nei poli al finito... salvo un piccolo particolare: il coefficiente  $h$  che si ricava dalla quarta condizione non è il residuo all'infinito; richiamando le proprietà delle funzioni analitiche con l'equazione (2.8), abbiamo ben ricordato che il residuo all'infinito non è altro che la somma dei residui al finito cambiata di segno. Ma allora che cosa è questo "residuo" all'infinito? A guardar bene gli altri residui sono i coefficienti dell'unico termine singolare dello sviluppo in serie di Laurent in prossimità degli altri poli (oltre che il risultato dell'integrale (2.7) esteso a un circoletto che contenga solo il polo in questione); bene, anche il "residuo" all'infinito, sebbene non sia il residuo dato dall'equazione (2.8), rappresenta sempre il coefficiente dell'unico termine singolare dello sviluppo in serie di Laurent all'infinito. Per analogia i circuitisti lo chiamano residuo senza virgolette, anche se così commettono un grave errore di nomenclatura matematica.

A parte la nomenclatura, perché la molteplicità del polo all'infinito non può superare l'unità? Ma per la passività, naturalmente. Se il polo all'infinito fosse doppio, l'impedenza  $Z(p) = hp^2$ , oltre a rappresentare l'impedenza di un superinduttore, in regime sinusoidale si comporterebbe come  $R(\omega) = -h\omega^2$ , cioè come un resistore negativo dipendente dalla frequenza (*frequency dependent negative resistor*, FDNR), chiaramente un componente attivo. I superinduttori e i supercondensatori vengono usati abbastanza spesso in elettronica, quindi non si tratta di fantasie strane, ma sono componenti attivi, non componenti passivi.

Perché allora non è possibile pensare a poli all'infinito di molteplicità dispari, ma non limitata a 1, per i bipoli passivi? Ecco di nuovo che per capirlo fisicamente è necessario sconfinare nel semipiano di destra dove il regime cisoidale crescente richiede un assorbimento di energia non negativo. Con la condizione delle fasi (A.19) lo si vede benissimo: se la trasformazione dal piano  $p$  al piano  $F$  deve essere una contrazione angolare, all'infinito, dove il termine dominante è solo  $h_n p^n$ , la molteplicità del polo  $n$  non può essere maggiore di uno, altrimenti avremmo una *espansione* angolare e non una *contrazione*.

Una conseguenza importante delle condizioni di passività, un corollario, se vogliamo

- esprimerci in termini matematici, è la condizione di Foster

$$\frac{d\text{Im}[F(j\omega)]}{d\omega} > \left| \frac{\text{Im}[F(j\omega)]}{\omega} \right| \quad \text{per ogni } p = j\omega \text{ per il quale } \text{Re}[F(p)] = 0 \quad (\text{A.22})$$

Anche questa condizione deriva dalla necessità che la parte reale dell'immettenza sia positiva nel semipiano di destra<sup>8</sup>.

La condizione di Foster (A.22) permette di ricavare molte importanti conseguenze per le immettenze dei bipoli reattivi, ma non ne parliamo qui, per non andare troppo oltre con questi approfondimenti. Qui basta notare che la reattanza dei bipoli puramente reattivi è sempre crescente; anche quella di un condensatore, che non è solo inversamente proporzionale alla frequenza, ma contiene anche un segno meno proprio perché sia sempre crescente:  $Z_C(j\omega) = 1/(j\omega C)$  porta a una reattanza  $X_C(\omega) = -1/(\omega C)$ .

Torniamo infine brevemente alle condizioni di passività per i circuiti a più porte; le condizioni (A.21) enunciate in termini matriciali diventano<sup>9</sup>:

1. gli elementi della matrice  $\mathbf{F}(p)$  sono reali per  $p$  reale;
2. gli elementi della matrice  $\mathbf{F}(p)$  sono analitici nel semipiano di destra;
3. se almeno un elemento della matrice  $\mathbf{F}(p)$  presenta un polo finito sull'asse  $\omega$ , questo è un polo di molteplicità non superiore all'unità per qualunque elemento della matrice  $\mathbf{F}(p)$  e la matrice dei residui  $\mathbf{k}$  è positiva semidefinita;
4. se almeno uno degli elementi della matrice  $\mathbf{F}(p)$  presenta un polo all'infinito, questo è un polo di molteplicità non superiore all'unità per qualunque elemento della matrice  $\mathbf{F}(p)$  e la matrice dei "residui"  $\mathbf{h}$  è positiva semidefinita;
5. la matrice delle parti reali della matrice  $\mathbf{F}(p)$  calcolata in regime sinusoidale è positiva semidefinita per qualunque pulsazione.

Sia le condizioni "scalari" enunciate per il bipolo, sia quelle enunciate in forma matriciale per il multi bipolo sono necessarie e sufficienti; questo vuol dire che la funzione  $F$  o la matrice  $\mathbf{F}(p)$  di un circuito passivo soddisfa a quelle condizioni e, contemporaneamente, se una funzione  $F$  o una matrice  $\mathbf{F}(p)$  soddisfa a quelle condizioni, allora esiste almeno un circuito passivo caratterizzato da quella funzione o da quella matrice.

Questo fatto è talmente importante che costituisce la base per la *sintesi dei circuiti*

- *passivi*; la sintesi di un circuito è una forma particolare di progetto.

- Progettare vuol dire determinare la topologia e i componenti (tipi e valori dei parametri) di un circuito affinché abbia determinate prestazioni. Normalmente il progetto

<sup>8</sup> Le dimostrazioni di tutti gli enunciati non dimostrati qui sono riportati in [4] e in [2].

<sup>9</sup> Si indica con  $\mathbf{F}$  indifferentemente una delle matrici  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  o  $\mathbf{H}$ .

eseguito senza ricorrere ai procedimenti di sintesi consiste nel partire da un circuito che, per esperienza, abbia caratteristiche simili a quelle desiderate, nell'attribuire ai componenti una serie di valori, nell'analizzare il circuito, nel confrontare le prestazioni analizzate con le specifiche di progetto, nel ritoccare il circuito e/o i valori dei parametri, e nel ripetere questo ciclo quanto occorre fin tanto che le specifiche di progetto sono soddisfatte. ■  
In generale non ci si azzecca al primo colpo, quindi il procedimento non è diretto, ma è iterativo.

Il progetto per sintesi è un procedimento matematico, o meglio, una collezione di ■  
procedimenti matematici *diretti*, atti a passare dalle specifiche di progetto formulate in termini di funzioni  $F$  o di matrici  $\mathbf{F}(p)$  al circuito definito in ogni suo dettaglio<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> Il progetto per sintesi dei circuiti passivi è descritto abbastanza dettagliatamente in [4] e parzialmente in [2]; il progetto per sintesi di alcune classi di filtri attivi è descritto in [2].



## Appendice B

### Tabelle delle trasformate di Laplace

Vengono qui raccolte in forma tabulare le principali proprietà della trasformata di Laplace monolatera e vengono esposte le coppie di funzioni del tempo e della pulsazione complessa che si corrispondono attraverso l'operazione di trasformazione e di antitrasformazione secondo Laplace. ■

Ove non specificamente indicato si intende che ogni funzione del tempo sia identicamente nulla per tempi negativi.

Non è indicata l'ascissa di convergenza, poiché corrisponde sempre alla maggiore delle ascisse delle singolarità al finito della funzione della pulsazione complessa.

**Tabella B.1.** Proprietà della trasformata di Laplace

1	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
2	$f(t - T)u(t - T)$	$e^{-pT} F(p)$
3	$e^{-p_0 t} f(t)$	$F(p - p_0)$
4	$f(t/k)$	$kF(kp)$
5	$\frac{f(t/k)}{k}$	$F(kp)$
6	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0-)$
7	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0-) - p^{n-2} f'(0-) - \dots - f^{(n-1)}(0-)$
8	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p) + \int_{-\infty}^{0-} f(\tau) d\tau}{p}$
9	$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$F(p)G(p)$
10	$tf(t)$	$-\frac{dF(p)}{dp}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
12	$f(t)$ tale che $f(t) = f(t + T)$	$\frac{\int_{0-}^{T-} e^{-pt} f(t) dt}{1 - e^{-pT}}$
13	$f(0+)$	$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$
14	$f(\infty)$	$\lim_{p \rightarrow 0+} pF(p)$

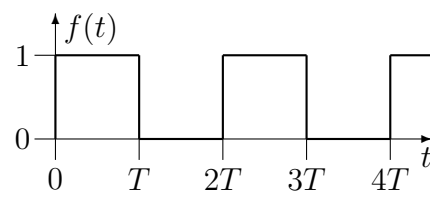
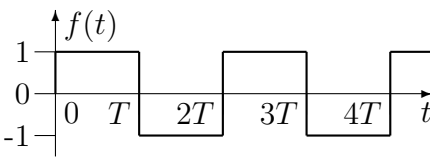
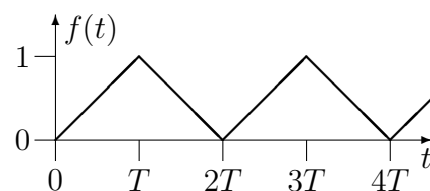
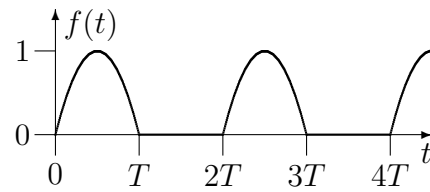
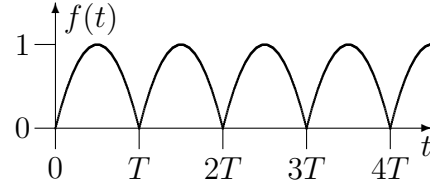
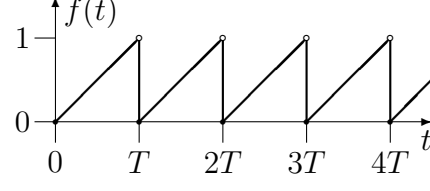
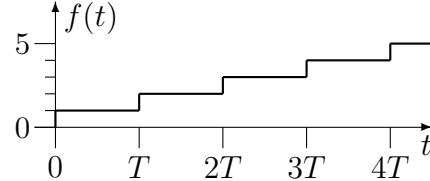
**Tabella B.2.** Trasformate e antitrasformate di Laplace

1	$\delta(t)$	1
2	$\delta'(t)$	$p$
3	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
4	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
6	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
7	$(n-at)t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{n!p}{(p+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
9	$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+\sigma_0)^2 + \omega_0^2}$
11	$e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$	$\frac{p+\sigma_0}{(p+\sigma_0)^2 + \omega_0^2}$
12	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
13	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
14	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
15	$\frac{a e^{-at} - b e^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$

**Tabella B.3.** Trasformate e antitrasformate di Laplace (*continua*)

16	$\sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0^3 p}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$
17	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$
18	$\frac{1}{3a^2} \left[ e^{-at} + 2 e^{at/2} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} at - \frac{\pi}{6} \right) \right]$	$\frac{1}{p^3 + a^3}$
19	$\frac{1}{3a} \left[ -e^{-at} + 2 e^{at/2} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} at + \frac{\pi}{6} \right) \right]$	$\frac{p}{p^3 + a^3}$
20	$\frac{1}{3} \left[ e^{-at} + 2 e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} at \right]$	$\frac{p^2}{p^3 + a^3}$
21	$\frac{1}{4a^3} (\sin at \cosh at - \cos at \sinh at)$	$\frac{1}{p^4 + 4a^4}$
22	$\frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$	$\frac{p}{p^4 + 4a^4}$
23	$\frac{1}{2a} (\sin at \cosh at + \cos at \sinh at)$	$\frac{p^2}{p^4 + 4a^4}$
24	$\cos at \cosh at$	$\frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$
25	$\frac{\operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p+a}}$
26	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{[2+a^2]}}$
27	$\frac{\exp(-\tau_0/(4t))}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{\exp(-\sqrt{\tau_0 p})}{\sqrt{p}}$
28	$\operatorname{erfc} \sqrt{\tau_0/(4t)}$	$\frac{\exp(-\sqrt{\tau_0 p})}{p}$
29	$\operatorname{erf} \sqrt{\tau_0/(4t)}$	$\frac{1 - \exp(-\sqrt{\tau_0 p})}{p}$
30	$u(t) - u(t - T)$	$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$

Tabella B.4. Trasformate e antitrasformate di Laplace (*continua*)

31		$\frac{1}{p(1 + e^{-pT})}$
32		$\frac{\tanh(pT/2)}{p}$
33		$\frac{\tanh(pT/2)}{Tp^2}$
34		$\frac{\pi T}{(T^2 p^2 + \pi^2)(1 - e^{-pT})}$
35		$\frac{\pi T}{T^2 p^2 + \pi^2} \coth \frac{pT}{2}$
36		$\frac{1 - (1 + pT)e^{-pT}}{Tp^2(1 - e^{-pT})}$
37		$\frac{1}{p(1 - e^{-pT})}$



## Appendice C

### Componenti standard

In un libro di base di Elettrotecnica sembra che nozioni pratiche siano fuori argomento; invece secondo il mio modo di vedere anche nei libri di base si dovrebbe fare sempre riferimento alla realtà, altrimenti sembra che tutto si riduca ad una serie di esercizi di calcolo e non si acquisisce nessuna familiarità con le situazioni reali, fra le quali sono molto importanti quelle che riguardano i valori commerciali dei componenti, i loro ordini di grandezza e, in definitiva, tutte quelle nozioni legate ai valori reali delle grandezze che si incontrano nel mondo reale.

Inoltre è bene che lo studenti familiarizzi da subito con il concetto di tolleranza e con le questioni di costi e di prezzi. Certo non è questo testo quello nel quale lo studente impara a gestire le questioni economiche, ma almeno comincia ad associare il maggiore prezzo alla minore tolleranza.

Nei circuiti i componenti dovrebbero essere per lo più scelti fra quelli prodotti industrialmente in grandi quantità così che il loro prezzo unitario sia il minore possibile. Solo per certe applicazioni speciali si rende necessario realizzare alcuni componenti su misura. Questo vale in particolare per tutti gli induttori e i trasformatori induttivi, anche se in commercio si trovano facilmente le bobine di blocco (*radio frequency choke*), che vengono vendute più in ragione della gamma di frequenze che sono tenute a bloccare che non piuttosto per il loro valore di induttanza.

I componenti discreti più comuni sono i resistori e i condensatori; l'industria produce questi componenti secondo valori standardizzati che si susseguono in una scala quasi logaritmica per valori interi la cui distanza corrisponde alla tolleranza di fabbricazione; le tolleranze standardizzate sono le seguenti

20%    10%    5%    2%    1%    0,5%

elencate in ordine crescente di prezzo del componente.

Le tolleranze vanno sempre intese come scarto in più e in meno, quindi un resistore da  $10\text{ k}\Omega$  con tolleranza del 20% va inteso come un resistore la cui resistenza vale  $(1 \pm 0,2)10\text{ k}\Omega$  e quindi ha un valore compreso fra  $8\text{ k}\Omega$  e  $12\text{ k}\Omega$ . La distribuzione di probabilità degli scarti relativi veri è generalmente gaussiana e la tolleranza specificata corrisponde ad un intervallo pari a tre volte lo scarto (statistico), perciò la probabilità

che un resistore da  $10\text{ k}\Omega \pm 20\%$  cada fuori dell'intervallo di tolleranza specificato è dello 0,3%.

## C.1 Resistori

I valori standard dei resistori sono riportati nella tabella C.1, nella quale si parte da un valore nominale 100 per arrivare nelle varie sequenze fino al valore 1000; il valore indicato va poi moltiplicato per un'opportuna potenza di 10, ma questo non cambia la sequenza, nel senso che il valore 100 può essere associato a  $1\text{ k}\Omega$ ,  $10\text{ k}\Omega$ ,  $100\text{ k}\Omega$ ,  $1\text{ M}\Omega$ ,  $10\text{ M}\Omega$ , eccetera, quando gli si affianchi l'opportuna potenza di 10.

Un ingegnere elettronico è tenuto a conoscere a memoria, senza aver bisogno di consultare la tabella, i valori standard della serie al 10%.

- Per distinguere i resistori senza bisogno di leggerne il valore, specialmente su quelli più piccoli dove le lettere e le cifre dovrebbero essere tanto piccole da risultare praticamente illeggibili senza l'aiuto di una lente, si usa il codice dei colori; ogni resistore delle serie al 20%, al 10% e al 5%, generalmente del tipo a strato di carbone, è dipinto con quattro strisce colorate, mentre quelli delle serie al 2%, all'1% e allo 0,5%, del tipo a strato metallico, sono dipinti con cinque strisce colorate; ogni colore rappresenta una cifra secondo la tabella C.2; le strisce sono messe asimmetricamente con la striscia della tolleranza separata dalle altre; per la tolleranza del 20% la striscia della tolleranza è mancante.

Per esempio un resistore da  $56\text{ k}\Omega$  al 5% è marcato dalle seguenti strisce colorate: verde, blu, arancio, oro; la stessa resistenza al 20% ha solo le strisce verde, blu e arancio, mentre all'1% essa avrebbe i colori verde, blu, nero, rosso, marrone; come si vede il numero codificato mediante i colori è inteso come due o tre cifre, che rappresentano il numero intero da moltiplicare per il moltiplicatore, e il moltiplicatore, inteso come la potenza di 10 che serve per aggiungere al numero precedente un numero adeguato di zeri.

I resistori a strato di carbone vengono prodotti in diverse misure in grado di dissipare diverse potenze senza danneggiarsi; questa caratteristica dipende dalla superficie esterna e i resistori adatti a dissipare grandi potenze hanno grandi dimensioni ( $2 \div 3\text{ cm}$  di lunghezza per diversi millimetri di diametro) mentre quelli per piccole potenze sono veramente minuscoli (qualche millimetro di lunghezza per un millimetro di diametro).

Le potenze standard per le quali si trovano resistori commerciali sono le seguenti: 0,2 W, 0,33 W, 0,5 W, 0,67 W, 1,15 W, 2 W. I resistori a strato metallico si trovano per potenze di 0,4 W, 0,5 W, 0,75 W.

Tabella C.1. Valori standard dei resistori

E 6 ±20%	E 12 ±10%	E 24 ±5%	E 48 ±2%	E 96 ±1%	E 192 ±0,5%	E 6 ±20%	E 12 ±10%	E 24 ±5%	E 48 ±2%	E 96 ±1%	E 192 ±0,5%
100	100	100	100	100	100				187	187	184
				102	101						187
					102						189
			105	105	104					191	191
				106	105						193
				107	106				196	196	196
				109	107						198
		110	110	110	109			200		200	200
				111	110						203
				113	111				205	205	205
				114	113						208
			115	115	114					210	210
				117	115						213
				118	117				215	215	215
	120	120		120	118	220	220	220			
			121	121	120					221	221
				123	121						223
				124	123				226	226	226
				126	124						229
			127	127	126					232	232
				129	127						234
		130		130	129			240	237	237	237
				132	130					243	240
			133	133	132						243
				135	133				249	249	246
				137	135						249
				138	137					255	252
			140	140	138						255
				142	140				261	261	258
				143	142						261
				145	143					267	264
			147	147	145		270	270			267
				149	147						271
150	150	150		150	149				274	274	274
				152	150						277
			154	154	152					280	280
				156	154						284
				158	156				287	287	287
		160		160	158						291
			162	162	160					294	294
				164	162						298
				165	164			300			
				167	165				301	301	301
			169	169	167						305
				172	169				309	309	309
				174	172						312
				176	174				316	316	316
			178	178	176						320
	180	180		180	178					324	324
				182	180						328
					182						

**Tabella C.1** Valori standard dei resistori (*continua*)

E 6 ±20%	E 12 ±10%	E 24 ±5%	E 48 ±2%	E 96 ±1%	E 192 ±0,5%	E 6 ±20%	E 12 ±10%	E 24 ±5%	E 48 ±2%	E 96 ±1%	E 192 ±0,5%
330	330	330	332	332	332					576	569
					336					576	576
				340	340				590	590	583
					344						590
			348	348	348					604	597
					352						604
				357	357				619	619	612
		360						620			619
					361						626
			365	365	365					634	634
					370						642
				374	374				649	649	649
					379						657
			383	383	383					665	665
					388						673
	390	390		392	392	680	680	680	681	681	681
					397						690
			402	402	402					698	698
					407						706
				412	412				715	715	715
					417						723
			422	422	422					732	732
					427						741
		430						750	750	750	750
				432	432						759
					437					768	768
			442	442	442						777
					448				787	787	787
				453	453						796
					459					806	806
			464	464	464		820	820			816
470	470	470		470	470				825	825	825
				475	475						835
					481						845
			487	487	487					845	845
					493						856
				499	499				866	866	866
					505						876
		510								887	887
			511	511	511				909	909	898
					517						909
				523	523			910			
					530						920
			536	536	536					931	931
					542						942
				549	549				953	953	953
					556						965
	560	560								976	976
			562	562	562						988

**Tabella C.2.** Codice dei colori

Colore	Striscia colorata				
	1 <sup>a</sup> cifra	2 <sup>a</sup> cifra	3 <sup>a</sup> cifra	moltiplicatore	tolleranza
nero	0	0	0	$10^0$	
marrone	1	1	1	$10^1$	1%
rosso	2	2	2	$10^2$	2%
arancio	3	3	3	$10^3$	
giallo	4	4	4	$10^4$	
verde	5	5	5	$10^5$	0,5%
blu	6	6	6	$10^6$	
viola	7	7	7	$10^7$	
grigio	8	8	8	$10^8$	
bianco	9	9	9	$10^9$	
oro				$10^{-1}$	5%
argento				$10^{-2}$	10%
mancante					20%

## C.2 Condensatori

I condensatori in uso nelle applicazioni elettroniche sono sostanzialmente di due tipi, quelli elettrolitici e quelli a dielettrico solido.

I primi vengono usati per lo più negli alimentatori per filtrare l'ondulazione residua della tensione raddrizzata; richiedono che venga loro applicata una tensione anche variabile ma sempre dello stesso segno; richiedono, cioè, di essere polarizzati. L'inversione del segno della tensione può comportare la loro distruzione (anche violenta) con conseguente danneggiamento di tutto l'apparato.

I loro valori commerciali si estendono da  $0,33\ \mu\text{F}$  a  $15\,000\ \mu\text{F}$  con valori intermedi che seguono la serie E 6 della tabella C.1.

I condensatori a dielettrico solido possono avere il dielettrico in ceramica o in ossido di tantalio, oppure si possono trovare con dielettrici di polimeri di varia composizione chimica o, infine, con dielettrico costituito da carta imbevuta di oli isolanti particolari; questi ultimi sono più adatti alle applicazioni industriali che a quelle dell'elaborazione elettronica del segnale.

I condensatori ceramici a disco sono reperibili con i valori nella sequenza E 24 della tabella C.1 da  $3,3\ \text{pF}$  fino a  $82\ \text{nF}$ ; i condensatori al tantalio sono reperibili con i valori nella serie E 12 della tabella C.1 che vanno da  $4,7\ \text{pF}$  a  $330\ \mu\text{F}$ .



# Appendice D

## Soluzioni

In questa appendice vengono riportate le soluzioni finali di alcuni esercizi proposti nei vari capitoli; alcuni esercizi sono senza soluzione, perché si riferiscono esplicitamente a cose già trattate nel testo. Per la maggior parte degli esercizi è indicato solo il risultato finale senza nessuna indicazione a proposito del metodo usato per ottenerlo, poiché il metodo spesso è richiesto dall'enunciato dell'esercizio, oppure non è importante quale metodo si sia seguito. Solo per alcuni esercizi è spiegato con maggiore dettaglio sia il procedimento sia i risultati ottenuti sia quelli che non si è ritenuto opportuno ricavare.

Negli esercizi di progetto la soluzione indicata è solo una delle tante ottenibili e l'informazione fornita serve essenzialmente per avere l'ordine di grandezza dei valori dei componenti, tanto per avere conferma che, se si sono eseguite scelte arbitrarie differenti da quelle eseguite per la soluzione proposta, la soluzione trovata rientri fra quelle accettabili. In ogni caso i valori dei componenti sono riportati con un numero di cifre significative superiore a quelle che sono *tecnicamente* accettabili; ciò è stato fatto per consentire di verificare la precisione dei calcoli qualora essi fossero stati eseguiti con un numero di cifre critico.

Si è evitato nella maggior parte dei casi di svolgere in ogni passaggio gli esercizi proposti, perché si ritiene che la ricerca della strada migliore sia un esercizio ancora più importante che non la determinazione dei valori numerici richiesti; la presentazione della soluzione dettagliata toglierebbe allo studente la possibilità di cimentarsi da solo nell'analisi critica del problema e degli strumenti disponibili per affrontarlo.

### Esercizio 1.1

$$I_1 = 5 \text{ mA} \quad I_2 = 2,5 \text{ mA} \quad I_3 = 0,5 \text{ mA} \quad I_4 = 2 \text{ mA}$$

### Esercizio 1.2

Bisogna ricordare che quando si calcolano le resistenze equivalenti bisogna “spegnere” i generatori indipendenti, non quelli dipendenti.

$$V_u = E(p) \frac{R_E(K+1)}{R_B + R_E(K+1)} = 0,92E(p)$$

$$R_u = \frac{R_B}{K+1} = 19,8 \Omega$$

## Esercizio 1.3

$$R_u = R_C = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{V_u}{E} = -\frac{KR_C}{R_s + R_B} = -333,33$$

## Esercizio 1.4

È evidente che l'intersezione della caratteristica non lineare con la caratteristica del resistore  $R_0$  è tanto più lontana dall'origine quanto maggiore è  $R_1$ ; anzi l'intersezione, assumendo per i diodi il modello che prevede solo la tensione di soglia e una resistenza interna nulla, avviene per

$$I_1 = \frac{V_\gamma}{R_0 - R_1}$$

$$V_1 = R_0 I_1$$

quindi bisogna scegliere  $R_1$  nella serie E 24 tra i valori inferiori a  $R_0$  in modo che  $V_1$  sia il più vicino possibile a 10 V.

Nella serie E 24 il primo valore inferiore a  $R_0$  è 9,1 k $\Omega$ ; sostituendo nelle equazioni si ha  $V_1 = 21,9$  V; il valore precedente è 8,2 k $\Omega$  in corrispondenza del quale si ha  $V_1 = 5,48$  V. Il valore che dà la tensione più vicina a 10 V è quindi  $R_1 = 8,2$  k $\Omega$  a cui bisogna affiancare la più piccola  $R_2$  che consenta una resistenza totale  $R_1 + R_2 > R_0$ ; nella serie E 24 la più piccola resistenza che consente di soddisfare la disuguaglianza è  $R_2 = 1,3$  k $\Omega$ .

## Esercizio 1.6

Con  $R_3/R_2 = R_F/R_1$  si ha  $I_L = -V_i/R_2$  e l'impedenza interna  $R_u$  del generatore è infinita. Se è  $R_3/R_2 \neq R_F/R_1$ , la resistenza  $R_u$  è finita.

## Esercizio 1.7

Si veda la figura D.1.

## Esercizio 1.8

Si veda la figura D.2.

## Esercizio 1.9

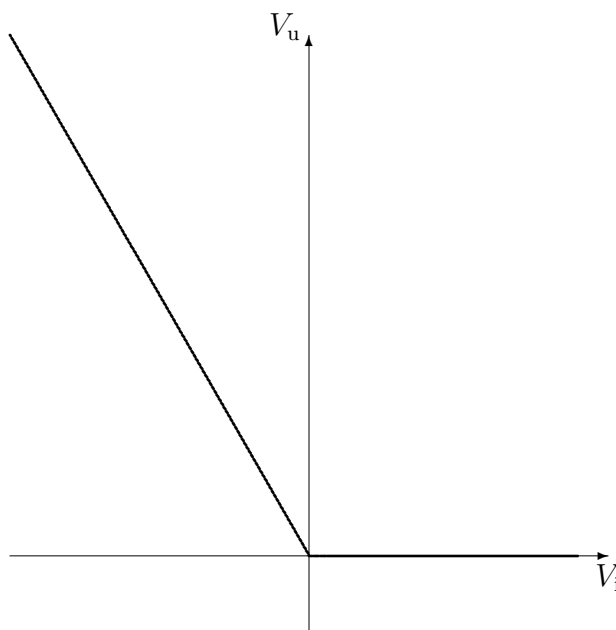
Si veda la figura D.3.

## Esercizio 2.2

Ricordiamo innanzi tutto che è<sup>1</sup>

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

<sup>1</sup> Se  $I = \text{erf}(\infty) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$ , il risultato non cambia se cambiamo  $x$  in  $y$ . Quindi  $I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy$ . Si noti che l'integrale di superficie è esteso a tutto il primo quadrante. Passando a coordinate polari e ponendo  $\varrho^2 = r$  e  $\varrho d\varrho = (1/2) dr$ , l'integrale di superficie si calcola agevolmente e dà  $I^2 = \pi/(4\alpha)$ .



**Figura D.1.** Per la soluzione dell'esercizio 1.7; la pendenza del tratto obliquo è  $-R_F/R_1$ .

e che possiamo applicare le regole 4 e 5 della tabella B.1. La trasformata cercata è quindi legata alla trasformata di  $\text{erf}(\sqrt{t})$ .

$$\mathcal{L}[\text{erf}(\sqrt{t})] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0-}^{\infty} e^{-pt} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx dt$$

Il doppio integrale si può interpretare come integrale di superficie; il dominio nel piano  $(x, t)$  è costituito dalla regione compresa fra l'asse  $t$  e la parabola di equazione  $t = x^2$ . Invertendo l'ordine delle integrazioni si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{erf}(\sqrt{t})] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \int_{x^2}^{\infty} e^{-pt} dt dx \\ &= \frac{2}{p\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(p+1)x^2} dx \\ &= \frac{1}{p\sqrt{p+1}} \end{aligned}$$

Applicando ora le regole 4 e 5 citate, si ricava il risultato 25 della tabella B.2.

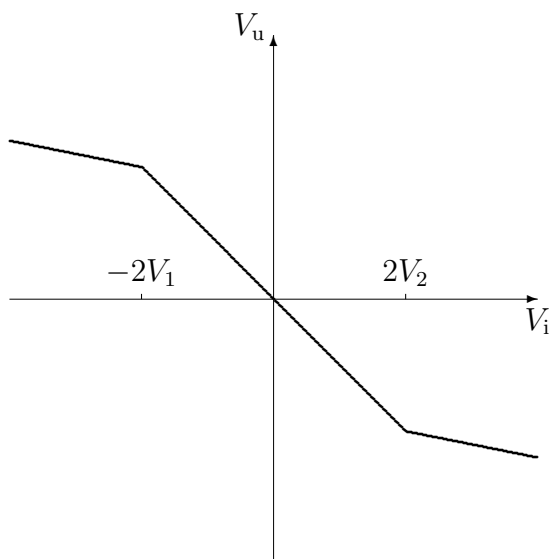
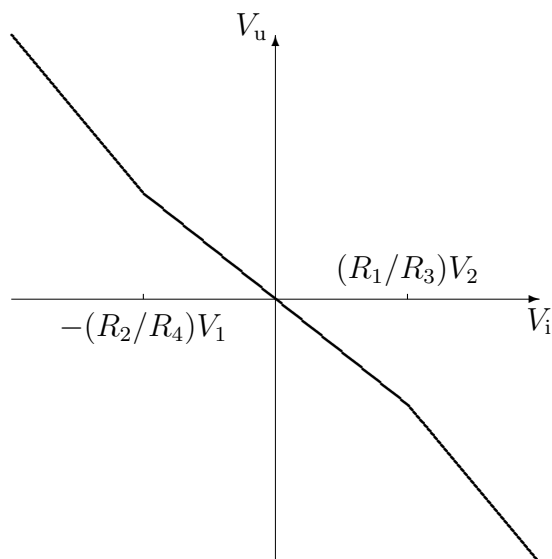
### Esercizio 2.3

La funzione periodica di periodo  $2T$  ha come funzione generatrice

$$g(t) = u(t) - 2u(t - T) + u(t - 2T) \quad 0- \leq t \leq 2T -$$

Applicando le regole 2 e 12 della tabella B.1 si ricava il risultato.

*Versione del 3 ottobre 2001*

**Figura D.2.** Per l'esercizio 1.8**Figura D.3.** Per l'esercizio 1.9**Esercizio 2.4**

La funzione generatrice della sinusoide raddrizzata, che è una funzione periodica di periodo  $T$ , è

$$g(t) = \sin \frac{\pi t}{T} \quad 0- \leq t \leq T-$$

che conviene riscrivere nella forma

$$g(t) = \sin \frac{\pi t}{T} - \sin \frac{\pi(t-T)}{T} u(t-T)$$

Applicando le regole 2 e 12 della tabella B.1 e ricordando la trasformata del seno circolare (coppia 8 della tabella B.2), si ricava il risultato.

**Esercizio 2.5**

La funzione generatrice della sinusoide raddrizzata a una semionda è la stessa di quella della sinusoide raddrizzata a due semionde dell'esercizio 2.4, ma ora il periodo vale  $2T$ . Il risultato segue direttamente.

**Esercizio 3.1**

$$V_C(p) = J(p) \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \frac{p}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

**Esercizio 3.2**

È meglio sfruttare ragionamenti fisici prima di mettersi a fare calcoli. Infatti il circuito presenta un solo componente reattivo, quindi, a meno di semplificazioni, ogni sua funzione di trasferimento è di primo grado e quindi ha un polo e uno zero

$$\frac{V_u}{E} = K \frac{p+a}{p+b}$$

$K$  è il valore della funzione per  $p \rightarrow \infty$ ; a pulsazione infinita il condensatore si comporta come un cortocircuito, quindi è  $K = 1$ .

Per quanto riguarda il polo in  $p = -b$ , esso corrisponde al modo proprio di oscillazione libera di un circuito con una sola costante di tempo, quindi è

$$-b = \frac{1}{\tau} = \frac{G_1 + G_2}{C}$$

Lo zero in una rete a scala, come quella dell'esercizio, coincide con i poli delle impedenze dei rami serie e/o con i poli delle ammettenze dei rami parallelo; in questo caso esso è legato alla costante di tempo del bipolo serie

$$-a = \frac{1}{R_1 C}$$

In definitiva l'espressione letterale e numerica cercata è

$$\frac{V_u(p)}{E(p)} = \frac{p + 1/(R_1 C)}{p + (G_1 + G_2)/C} = \frac{p + 5 \text{ ms}^{-1}}{p + 7 \text{ ms}^{-1}}$$

### Esercizio 3.3

Si procede in modo simile all'esercizio precedente, salvo osservare che lo zero di trasmissione cade all'infinito, quindi manca il termine  $p + a$  nel numeratore.

Si ottiene perciò

$$\frac{I_R(p)}{E(p)} = (G_1 \oplus G_2) \frac{(G_1 + G_2)/C}{p + (G_1 + G_2)/C} = 0,111 \text{ mS} \frac{0,5 \mu\text{s}^{-1}}{p + 0,5 \mu\text{s}^{-1}}$$

Si noti come la scrittura della formula numerica metta in evidenza i rapporti di grandezze omogenee e il coefficiente moltiplicativo omogeneo con la funzione di trasmissione.

### Esercizio 3.4

$$\begin{aligned} Z_u(p) &= \frac{1}{(K+1)G_B + G_s} \frac{p + (G_B + G_s)/C_F}{p} = 19,42 \Omega \frac{p + 15 \mu\text{s}^{-1}}{p} \\ J_{\text{Norton}} &= \frac{EG_s(pC_F - KG_B)}{pC_F + G_B + G_s} \\ V_u &= J_{\text{Norton}}(Z_u \oplus R_C) \\ &= E 0,0194 \frac{p - 500 \mu\text{s}^{-1}}{p + 29,07 \text{ ms}^{-1}} \end{aligned}$$

Per verifica si può controllare quanto valga  $V_u/E$  a frequenza nulla, visto che a questa frequenza il circuito dell'esercizio si riduce ad essere quello dell'esercizio 1.3.

### Esercizio 3.5

$$\frac{V_u}{E} = \frac{p - R/L}{p + R/L}$$

Si noti lo zero di trasmissione nel semipiano di destra della pulsazione complessa  $p$ .

Versione del 3 ottobre 2001

## Esercizio 3.6

La condizione di compensazione è

$$R_1 C_1 = R_2 C_2$$

Se essa è verificata, la tensione a gradino applicata all'entrata si ritrova tale e quale all'uscita a parte una riduzione dell'ampiezza conformemente al rapporto di partizione.

Se la condizione non è verificata, la tensione a gradino all'entrata produce all'uscita una tensione esponenziale sovrapposta ad una costante; all'istante iniziale ( $t = 0_+$ ) la tensione è maggiore o minore della tensione a regime a seconda che il rapporto  $C_1/(C_1 + C_2)$  sia maggiore o minore del rapporto  $R_2/(R_1 + R_2)$ . La costante di tempo dell'esponenziale vale  $(C_1 + C_2)/(G_1 + G_2)$ .

## Esercizio 3.7

La resistenza equivalente vista dal condensatore, la sua costante di tempo e il denominatore delle varie funzioni possono essere scritti nella forma

$$\begin{aligned} R_{\text{eq}} &= R_E \oplus \frac{R_o + R_L}{1 + R_o \frac{1 + g_m R_i}{R_i + R_s} + \frac{R_L}{R_i + R_s}} \\ &= 28,2 \Omega \\ D(p) &= p + b_p \\ b_p &= \frac{1}{C_E R_{\text{eq}}} \\ &= 355 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

Successivamente si ricava

$$\begin{aligned} A_{\text{vs}}(p) &= -\frac{g_m R_i}{R_i + R_s} (R_L \oplus R_o) \frac{p + [1/(R_E C_E) - 1/(R_i R_o g_m C_E)]}{D(p)} \\ &= -60,61 \frac{p + 45,4 \text{ ms}^{-1}}{p + 355 \text{ ms}^{-1}} \\ Z_u &= (R_L \oplus R_o) \frac{p + a_z}{D(p)} \\ a_z &= \frac{1}{C_E} \left( \frac{1 + g_m R_i}{R_i + R_s} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} \right) \\ Z_u &= 1,82 \text{ k}\Omega \frac{p + 385 \text{ ms}^{-1}}{p + 355 \text{ ms}^{-1}} \end{aligned}$$

I risultati sono evidentemente uguali qualunque metodo si segua; l'ammontare dei calcoli invece varia da metodo a metodo.

## Esercizio 3.8

Qui si presentano i risultati ottenibili con il metodo delle costanti di tempo; va da sé che i risultati finali che si ottengono con gli altri metodi differiscono solo nell'ammontare dei calcoli.

Per l'impedenza d'entrata il polo della funzione si ha quando il circuito è alimentato con un generatore di prova di corrente; bisogna quindi sostituire il generatore ( $V_s, R_s$ ) con un generatore ideale di corrente e calcolare la resistenza  $R'_{\text{eq}}$  vista dal condensatore. Il polo dell'ammettenza d'entrata (quindi lo zero dell'impedenza) si ha quando il circuito è alimentato con un generatore

Versione del 3 ottobre 2001

di prova di tensione; bisogna sostituire il generatore  $(V_s, R_s)$  con un generatore ideale di tensione e calcolare la resistenza  $R''_{eq}$  vista dal condensatore. Per l'amplificazione di tensione il polo si ha quando il circuito è alimentato dal generatore reale di tensione così come è disegnato nella figura e poi bisogna calcolare la resistenza  $R_{eq}$  vista dal condensatore. Ovviamente valgono le relazioni

$$R'_{eq} = R_{eq} \Big|_{R_s=\infty} \quad R''_{eq} = R_{eq} \Big|_{R_s=0}$$

per cui basta calcolare esplicitamente solo  $R_{eq}$  e poi fare le sostituzioni opportune; si ottiene

$$R_{eq} = R_F \oplus [R_L + (R_i \oplus R_s)(1 + g_m R_L)] = 22,944 \text{ k}\Omega$$

$$R'_{eq} = R_F \oplus [R_L + R_i(1 + g_m R_L)] = 35,566 \text{ k}\Omega$$

$$R''_{eq} = R_F \oplus R_L = 1,923 \text{ k}\Omega$$

Le funzioni cercate possono ora essere scritte nella forma

$$Z_i(p) = Z_i(\infty) \frac{p+a}{p+b} \quad A_{vs}(p) = \frac{A_{vs}(\infty)p + A_{vs}(0)d}{p+d}$$

Gli zeri e i poli  $-a$ ,  $-b$ ,  $-d$  valgono

$$a = \frac{1}{C_F R''_{eq}} = 52 \text{ ms}^{-1}$$

$$b = \frac{1}{C_F R'_{eq}} = 2,812 \text{ ms}^{-1}$$

$$d = \frac{1}{C_F R_{eq}} = 4,358 \text{ ms}^{-1}$$

Restano ancora da calcolare  $Z_i(\infty)$ ,  $A_{vs}(\infty)$  e  $A_{vs}(0)$ ; per i primi due basta sostituire il condensatore con un cortocircuito; per il terzo con un circuito aperto ed è conveniente calcolare anche  $Z_i(0)$ ; si ottiene

$$Z_i(\infty) = \frac{1}{G_i + g_m + G_L} = 19,481 \Omega$$

$$Z_i(0) = R_i \oplus \frac{R_L + R_F}{1 + g_m R_L} = 360,27 \Omega$$

$$A_{vs}(\infty) = \frac{G_s}{G_s + G_i + g_m + G_L} = +0,03145$$

$$A_{vs}(0) = \frac{Z_i(0)}{Z_i(0) + R_s} \left( \frac{1}{R_F} - g_m \right) (R_L \oplus R_F) = -36,061$$

In definitiva, i risultati numerici sono

$$Z_i(p) = 19,481 \Omega \frac{p + 52 \text{ ms}^{-1}}{p + 2,812 \text{ ms}^{-1}} \quad A_{vs}(p) = 0,03145 \frac{p - 4998,1 \text{ ms}^{-1}}{p + 4,359 \text{ ms}^{-1}}$$

Si noti lo zero di  $A_{vs}$  nel semipiano di destra; gli zeri sono spesso difficili da determinare a vista sul circuito, a meno che non si tratti di una rete a scala; in base a ragionamenti fisici, però, si riesce spesso a stabilire in quale semipiano si trovino. Perché in questo caso si poteva prevedere la presenza di uno zero a destra?

Versione del 3 ottobre 2001

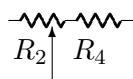
## Esercizio 3.9

$$A_v(p) = \frac{p^3 C^3 + 3p^2 C^2 G + 2pCG(G_2 + G_4) + GG_2 G_4}{p^3 C^3 + p^2 C^2 (3G + G_2 + 2G_4) + pC[2G(G_2 + G_4) + G_2 G_4] + GG_2 G_4}$$

Perché il numeratore sia nullo per un valore immaginario della variabile  $p = j\omega_0$  (con i coefficienti reali, si annulla anche per il valore complesso coniugato) bisogna che siano nulle tanto la parte reale quanto la parte immaginaria del numeratore; imponendo le condizioni si trova

$$R_2 + R_4 = \frac{R}{6} \quad \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{3R_2 R_4}}$$

Siccome la somma delle due resistenze variabili  $R_2$  ed  $R_4$  deve mantenersi costante, esse devono essere le due parti in cui il cursore divide la resistenza totale di un potenziometro, al quale possono essere collegate anche altre resistenze come nella configurazione seguente



## Esercizio 3.10

La funzione di trasmissione normalizzata rispetto a  $R_0$  e a  $f_0$  vale

$$A_v(p) = 0,0474 \frac{p + 0,579}{(p + 0,0575)(p + 2,236)}$$

e l'attenuazione a 1 kHz vale 33,03 dB.

## Esercizio 3.11

$$A_v(p) = \frac{R_1(pL - R)}{pL(R_1 + 2R) + RR_1} = 0,7368 \frac{p - 100 \text{ ms}^{-1}}{p + 73,68 \text{ ms}^{-1}}$$

A 160 kHz è

$$20 \log |A_v| = -2,633 \text{ dB} \quad \arg[A_v] = 9,8722^\circ \implies 0,1723 \text{ rad}$$

A 1 kHz, se la forza elettromotrice è  $e(t) = 1 \text{ V} \sin \omega t$ , la corrente vale

$$i_1(t) = -1,78 \text{ mA} \sin(\omega t - \varphi) \text{ con } \varphi = 8,47^\circ \implies 0,148 \text{ rad}$$

## Esercizio 3.12

$$A_v(p) = -96,774 \frac{p(p + 45,27 \text{ ms}^{-1})}{p^2 + 216,9 \text{ ms}^{-1}p + 10,86 \mu\text{s}^{-2}}$$

## Esercizio 3.13

$$A_v(p) = \frac{3C^2 G p^2 + 6CG^2 p + G^3}{5C^2 G p^2 + 17CG^2 p + 13G^3}$$

## Esercizio 3.14

Posto

$$L = \frac{(NBab)^2}{K} \quad R_a = \frac{(NBab)^2}{r_a} \quad C = \frac{J}{(NBab)^2}$$

$$i_g(t) = \frac{e(t)}{R_v} \quad R = R_v \oplus R_a = \frac{1}{G} \quad K_t = NBab$$

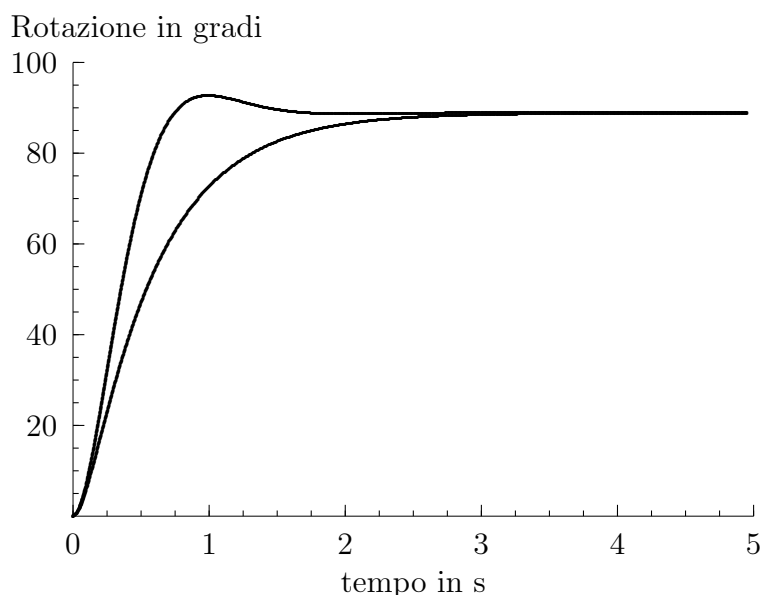
e ricordando che l'angolo di rotazione (a partire dalla posizione di riposo, assunta come origine degli angoli) è legata alla velocità angolare da

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega_a dt$$

si ha

$$\Phi(p) = \frac{I_g(p)L/K_t}{LCp^2 + LGp + 1} = \frac{I_0/(CK_t)}{p(p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2)}$$

dove  $I_g(p) = I_0/p$  con  $I_0 = 50$  mA. La costante di conversione dello strumento per passare dalla corrente ad un angolo vale  $L/K_t = 1,777^\circ/\text{mA}$ ; la rotazione totale dell'ago dello strumento per effetto dei 50 mA applicati vale dunque  $88,85^\circ$ . La pulsazione di oscillazione propria dell'equipaggio mobile vale  $\omega_0 = 4,47 \text{ s}^{-1}$  pari a circa 0,711 Hz. Nei due casi da esaminare il  $Q$  dei poli varia; nel primo caso la resistenza complessiva in parallelo al risonatore vale  $R_1 = 0,962 \Omega$ , che porta ad un valore  $Q_1 = 0,707$ , mentre nel secondo caso la resistenza totale vale  $R_2 = 0,49 \Omega$ , che porta ad un valore di  $Q_2 = 0,36$ . Nel primo caso i modi propri dell'equipaggio mobile sono complessi con una distanza angolare dall'asse  $\omega$  di  $45^\circ$ , e sono quindi piuttosto smorzati, ma non tanto da non eseguire una sia pur piccola sovraelongazione. Nel secondo caso i modi propri dell'equipaggio mobile sono reali e quindi l'equipaggio mobile si muove lentamente e raggiunge lo stato di equilibrio dopo almeno 5 volte la maggiore delle due costanti di tempo. Il diagramma della risposta presenta i valori iniziali e finali in accordo con i rispettivi teoremi; il valore iniziale della derivata vale 0; nella figura refE:bobina mobile.soluz sono riportati gli andamenti per i due casi.



**Figura D.4.** Risposte a confronto per i due casi dell'esercizio 3.14

## Esercizio 4.1

Si faccia riferimento all'esempio 3.11; in regime sinusoidale la componente sinusoidale della tensione ai capi del condensatore può essere scritta nella forma

$$V = \frac{JR}{1 + j\left(\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right)} = \frac{JR}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Il rapporto fra la massima indicazione del voltmetro  $V_{\max} = 27,2$  V alla risonanza  $f_0 = 860$  kHz e quella di  $V_{\text{mis}} = 13$  V misurata fuori risonanza alla frequenza  $f = 866,15$  kHz è dato da

$$\frac{V_{\max}}{V_{\text{mis}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Ricordando che  $f/f_0 = \omega/\omega_0$ , sostituendo i valori numerici si ricava

$$Q = 128,5$$

## Esercizio 4.2

La curva di risonanza generale trovata nell'esercizio 4.1 è data da

$$\frac{V_{\max}}{V_{\text{mis}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

La tensione  $V_{\text{mis}}$  è inferiore di 3 dB alla tensione  $V_{\max}$  quando è  $\sqrt{2}$  volte più piccola; dalla formula questo rapporto si ottiene quando

$$Q\left|\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right| = 1$$

Le due frequenze  $f_a$  e  $f_b$  che soddisfano quell'equazione sono

$$f_{a,b} = \frac{f_0}{2Q} \left( \sqrt{4Q^2 + 1} \pm 1 \right)$$

perciò la larghezza di banda a 3 dB è data dalla loro differenza

$$\Delta f_{3\text{dB}} = f_a - f_b = \frac{f_0}{Q}$$

Si noti che se  $Q$  è sufficientemente grande, l'unità è trascurabile rispetto a  $4Q^2$  e le due frequenze risultano simmetriche rispetto a  $f_0$

$$f_{a,b} \approx f_0 \left( 1 \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

È chiaro che tanto migliore è il risonatore, tanto maggiore è il suo coefficiente di risonanza, tanto più vicini angolarmente all'asse  $\omega$  sono i poli, tanto più stretta è la curva di risonanza.

## Esercizio 4.3

Il coefficiente di risonanza del risonatore, essendo trascurabili le perdite del condensatore in aria, coincide con il coefficiente di qualità dell'induttore alla frequenza di misura. L'amplificazione

Versione del 3 ottobre 2001

fra l'eccitazione  $E$  e la risposta  $V$  vale

$$A(p) = \frac{V}{E} = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{\omega_0} \frac{1}{Q} + 1}$$

Se il valore di  $Q$  è sufficientemente grande, i poli sono complessi e piuttosto vicini (angolarmente) all'asse  $\omega$ ; il massimo del modulo dell'amplificazione  $A$  cade quindi in prossimità della pulsazione di risonanza alla quale, per  $p = j\omega_0$ , i due termini estremi del denominatore si annullano a vicenda e il massimo modulo vale  $Q$ .

$Q = Q_L$  è perciò determinato come coefficiente di sovratensione e vale 235. L'induttanza si ricava dalla frequenza di risonanza e dal condensatore e vale  $140,35 \mu\text{H}$ . Infine la resistenza di perdita si ricava dalla definizione del coefficiente di qualità e vale  $3 \Omega$ .

#### Esercizio 4.4

L'adattamento energetico e il rifasamento non sono in generale la stessa cosa; il rifasamento si propone solo di rendere la corrente erogata dal generatore in fase con la tensione del generatore, non di trasferire al carico la massima potenza che il generatore può erogare. Nella soluzione del problema del rifasamento la potenza disponibile del generatore e la sua resistenza interna non intervengono, mentre nel problema dell'adattamento energetico esse giocano un ruolo essenziale. Nell'esempio 4.3, in alternativa al condensatore parallelo (utilizzato per motivi quali il costo, il peso, le basse perdite, la tensione di esercizio, il fatto di scaricarsi sul carico quando si toglie l'alimentazione, rispetto ad usare un condensatore serie) basterebbe compensare la reattanza positiva del carico con una reattanza negativa collegata in serie; questa reattanza dovrebbe venire realizzata con un condensatore in serie e il carico complessivo sarebbe reale, con la conseguenza che la corrente sarebbe in fase con la tensione del generatore. Ma la potenza trasferita dipenderebbe solo dalla tensione ai capi del carico complessivo e dalla resistenza, e potrebbe essere una minima parte della potenza disponibile. Si pensi anche ad un'applicazione reale, dove la tensione erogata dalla Compagnia Elettrica a un appartamento di civile abitazione vale  $220 V_{\text{eff}}$  e la resistenza interna equivalente dell'impianto di erogazione sarebbe talmente piccola che la potenza disponibile potrebbe ammontare a diverse decine di kilowatt; questa potenza non viene mai erogata agli apparecchi domestici, benché rifasati, anche perché se ciò fosse possibile, il sezionatore magnetotermico di protezione interverrebbe per limitare l'erogazione a  $3,3 \text{ kW}$ , aprendo il circuito appena si cercasse di superare questo limite.

#### Esercizio 4.5

$$R_{\text{eq}} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{P_{\text{att}}} = 24,2 \Omega$$

#### Esercizio 4.6

Assumendo una frequenza di  $55 \text{ Hz}$ , media fra i  $50 \text{ Hz}$  in Europa e i  $60 \text{ Hz}$  nel Nordamerica, il condensatore deve valere

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 4,2 \mu\text{F}$$

perché esso forma un risonatore parallelo con l'induttanza di magnetizzazione, in risonanza alla frequenza di  $55 \text{ Hz}$ .

#### Esercizio 4.7

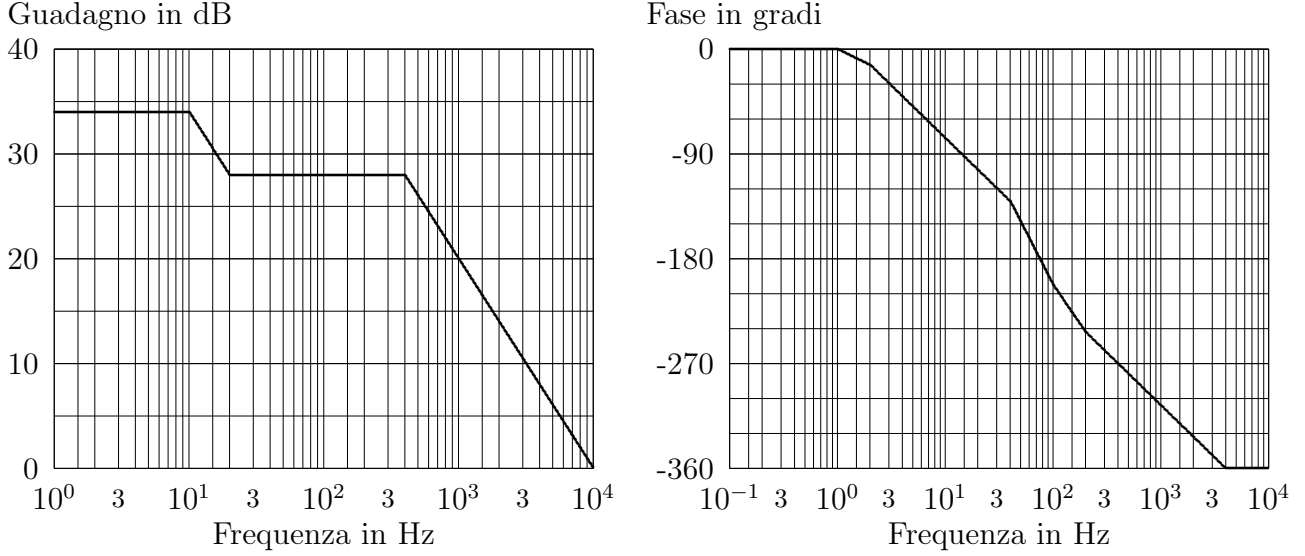
$$I_{\text{eff,max}} = 15 \text{ A} \quad R_{\text{disp,max}} = 3,3 \Omega.$$

Versione del 3 ottobre 2001

## Esercizio 4.8

I valori numerici rappresentano tanto i valori di pulsazione normalizzata tanto quelli di frequenza normalizzata. Avremo quindi due diagrammi di radice reale con i rispettivi punti centrali in  $f = 10$  Hz (polo) e  $f = 20$  Hz (zero) e un diagramma di coppia di poli complessi con punto centrale in  $f = 400$  Hz e un angolo  $\vartheta = 30^\circ$ , inferiore a  $45^\circ$ , curva limite per i diagrammi monotoni, ma non tanto da ritenere che le approssimazioni a spezzate siano troppo scadenti.

I diagrammi a spezzate sono riportati nella figura D.5



**Figura D.5.** Per la soluzione dell'esercizio 4.8

## Esercizio 5.1

La potenza attiva simultaneamente entrante nelle porte vale  $\mathbf{Re}[V_1 I_1^* + V_2 I_2^*]$ ; mediante le equazioni costitutive del doppio bipolo simmetrico (e reciproco) relative alle impedenze a vuoto, alle ammettenze di cortocircuito e ai parametri ibridi, la passività impone che sia

$$\begin{aligned} R_{11}(\omega)(|I_1|^2 + |I_2|^2) + 2R_{21}(\omega)(\mathbf{Re}[I_1 I_2^*]) &\geq 0 \\ G_{11}(\omega)(|V_1|^2 + |V_2|^2) + 2G_{21}(\omega)(\mathbf{Re}[V_1 V_2^*]) &\geq 0 \\ \mathbf{Re}[H_{11}(j\omega)]|I_1|^2 + \mathbf{Re}[H_{22}(j\omega)]|V_2|^2 + 2\mathbf{Im}[H_{21}(j\omega)]\mathbf{Im}[V_2 I_2^*] &\geq 0 \end{aligned}$$

Nel caso dei parametri ibridi l'espressione indicata tiene conto solo della reciprocità e non della simmetria, visto che questa condizione si riflette in modo non semplice sui parametri ibridi. Tuttavia le tre rappresentazioni in forma matriciale sono le parti reali di tre forme quadratiche ognuna associata alla rispettiva matrice  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{H}$ .

La lettura delle prime due espressioni è più semplice; quanto vale per le parti reali delle impedenze a vuoto si può ripetere tale e quale per le parti reali delle ammettenze di corto circuito. La prima disuguaglianza deve essere vera sia quando  $I_1$  e  $I_2$  sono in fase o in controfase sia quando sono in quadratura; quando esse sono in quadratura è  $\mathbf{Re}[I_1 I_2^*] = 0$ , quindi la disuguaglianza richiede che sia

$$R_{11}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

Quando invece esse sono in fase o in controfase è  $\mathbf{Re}[I_1 I_2^*] = \pm |I_1||I_2|$  e il primo membro della disuguaglianza diventa un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili  $|I_1|$  e  $|I_2|$ . Perché

esso sia sempre non negativo è necessario che il suo discriminante sia non positivo e quindi che sia

$$R_{11}^2(\omega) - R_{21}^2(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

Tenendo conto di entrambe le condizioni si può concentrare la condizione di passività in una sola condizione

$$R_{11}(\omega) \geq |R_{21}(\omega)| \quad \forall \omega$$

Lo stesso vale per le parti reali delle ammettenze di cortocircuito.

### Esercizio 5.2

Perché le due porte del doppio bipolo siano connesse in serie esse devono essere percorse dalla stessa corrente; se la topologia del circuito non lo consente direttamente, bisogna inserire in cascata almeno ad una porta un trasformatore ideale di rapporto unitario affinché il doppio bipolo continui a lavorare come tale. Inserito eventualmente tale trasformatore le equazioni costitutive del nuovo doppio bipolo sono identiche a quelle originali. Imponendo che sia  $I_1 = I_2 = I$  e constatando che nella connessione in serie le tensioni si sommano,  $V = V_1 + V_2$ , l'impedenza del bipolo risultante è

$$Z = \frac{V}{I} = Z_{11} + Z_{12} + Z_{21} + Z_{22}$$

### Esercizio 5.3

Perché le due porte del doppio bipolo siano connesse in parallelo esse devono essere sottoposte alla stessa tensione; se la struttura del doppio bipolo non lo consente direttamente, è necessario collegare in cascata ad una delle porte un trasformatore ideale di rapporto unitario affinché il doppio bipolo continui a lavorare come tale. Le equazioni costitutive non cambiano. È  $V_1 = V_2 = V$  ed è  $I = I_1 + I_2$ ; si ricava

$$Y = Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}$$

### Esercizio 5.4

Per calcolare l'impedenza di uscita bisogna spegnere il generatore indipendente  $V_s$ ; seguendo il suggerimento si stacca il lato destro del bipolo formato da  $R_F$  e da  $C_F$  e si ottiene un doppio bipolo le cui tensioni e correnti alle porte sono indicate nella figura D.6. Si osserva subito che il doppio bipolo è unilaterale, a causa del generatore comandato, e che quindi è  $Y_{21} = 0$ . Le altre ammettenze di cortocircuito valgono

$$\begin{aligned} Y_{11} &= G_L \\ Y_{22} &= (pC_F + G_F) \oplus (G_s + G_i) \\ Y_{12} &= g_m \frac{Y_{22}}{G_s + G_i} \end{aligned}$$

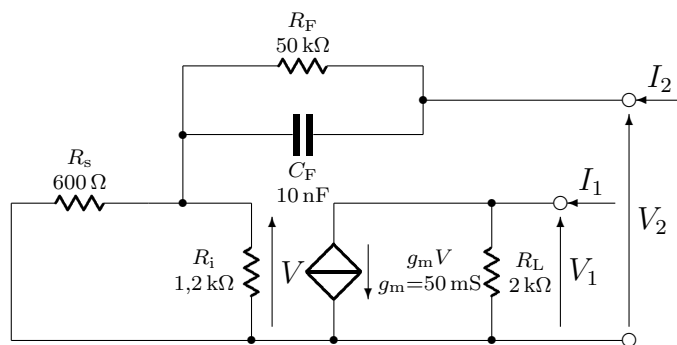
e l'ammettenza cercata vale

$$Y_u = G_L + (pC_F + G_F) \oplus (G_s + G_i) \left( 1 + \frac{g_m}{G_s + G_i} \right) = \frac{530p + 1,356}{10p + 2,502}$$

avendo normalizzato rispetto a  $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$  e a  $C_0 = 1 \text{ nF}$ , cosicché le altre grandezze in gioco risultano normalizzate rispetto a  $G_0 = 1 \text{ mS}$ ,  $T_0 = 1 \mu\text{s}$  e  $\Omega_0 = 1 \mu\text{s}^{-1}$ .

Per effetto del collegamento mediante  $R_F$  fra ingresso e uscita del doppio bipolo originale, la resistenza di uscita a frequenza nulla, quando il condensatore si comporta come un circuito aperto e non influisce, cala da  $2 \text{ k}\Omega$  a  $1,845 \text{ k}\Omega$ . Ma a frequenza infinita, quando il condensatore si comporta come un cortocircuito, la resistenza di uscita risulta dalla connessione in parallelo di  $R_L$ ,  $R_s$ ,  $R_i$  e dalla resistenza equivalente  $1/g_m$ , corrispondente a soli  $18,87 \Omega$ . Il

Versione del 3 ottobre 2001



**Figura D.6.** Per la soluzione dell'esercizio 5.4

polo dell'ammettenza corrisponde alla costante di tempo di scarica del condensatore quando il generatore di prova è spento, quindi quando la porta di uscita del doppio bipolo originale è chiusa in cortocircuito. In queste condizioni  $C_F$  si scarica sul parallelo di  $R_L$ ,  $R_s$  ed  $R_F$ , pari a  $399,7 \Omega$ , dando luogo a un modo proprio che si smorza con una costante di tempo di circa  $4 \mu s$ . Lo zero dell'ammettenza, corrispondente al polo dell'impedenza, può essere determinato anche conoscendo la posizione del polo e i valori dell'ammettenza a frequenza zero e a frequenza infinita. Esso corrisponde alla scarica del condensatore con il generatore di prova spento, generatore di prova che nel caso dell'impedenza è un generatore di corrente, quindi con la porta di uscita del doppio bipolo originale lasciata aperta. La costante di tempo di scarica ora è molto maggiore per effetto dell'influenza del generatore comandato e vale circa  $391 \mu s$ .

### Esercizio 5.5

Perché le due porte siano in serie devono essere vincolate ad essere percorse dalla stessa corrente; perché siano in parallelo esse devono essere vincolate ad essere soggette alla stessa tensione. Non esiste nessun connettore in grado di imporre tali vincoli, quindi non ha senso parlare di connessione serie-parallelo delle due porte di un doppio bipolo.

Però, se si connettesse un giratore ideale in cascata ad una delle due porte e poi le si connettesse in serie oppure in parallelo? Questo sarebbe un modo per far comparire i parametri ibridi e in qualche modo si avrebbe una situazione in cui, almeno in un doppio bipolo resistivo, si potrebbe andare vicini al caso in cui le tensioni del doppio bipolo originale sono uguali e lo sono altrettanto le correnti, ma il connettore non conterrebbe solamente collegamenti ma anche un giratore. Con il giratore  $R_g$  e le porte collegate in serie si avrebbe

$$Z = H_{11} + R_g(H_{12} + H_{21}) + R_g^2 H_{22}$$

### Esercizio 5.6

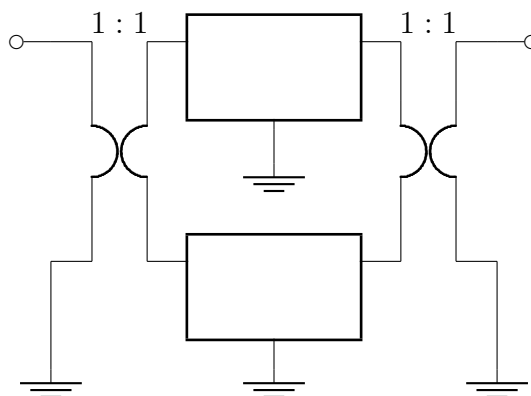
La soluzione è indicata nella figura D.7.

### Esercizio 5.7

Dalle equazioni (5.14) ricaviamo

$$R_{01} = \frac{AR_{02} = B}{CR_{02} + D}$$

$$R_{02} = \frac{DR_{01} = B}{CR_{01} + A}$$



**Figura D.7.** Per l'esercizio 5.6

elaborando le quali otteniamo

$$\frac{A}{D} = \frac{R_{01}}{R_{02}}$$

$$CR_{01}R_{02} = B$$

Questi legami fra i quattro parametri della matrice di catena vanno ancora uniti alla condizione di reciprocità  $AD - BC = 1$ , ma restano sempre quattro incognite e tre vincoli solamente. Bisogna quindi prepararsi a ricorrere a qualche astuzia. Le ultime due equazioni ci consentono di porre

$$A = x \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \quad D = x \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \quad B = y \sqrt{R_{01}R_{02}} \quad C = \frac{y}{\sqrt{R_{01}R_{02}}}$$

che ci lasciano con le sole due incognite  $x$  e  $y$ ; sostituendo nella condizione di reciprocità otteniamo ancora

$$x^2 - y^2 = 1$$

Sembra che non si possa andare più avanti; tuttavia l'equazione di quell'iperbole ci fa venire in mente le funzioni iperboliche; infatti se poniamo

$$x = \cosh \Theta \quad \text{e} \quad y = \sinh \Theta$$

allora anche l'ultima equazione è soddisfatta e tutto il problema risulta parametrizzato con la sola variabile arbitraria, reale o complessa,  $\Theta$ . In definitiva il problema è risolto con i parametri di catena espressi da

$$A = \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \cosh \Theta \quad B = \sqrt{R_{01}R_{02}} \sinh \Theta$$

$$C = \frac{\sinh \Theta}{\sqrt{R_{01}R_{02}}} \quad D = \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \cosh \Theta$$

Se per  $\Theta$  si prende un numero reale positivo, i parametri di catena risultano tutti reali positivi e non sarebbe difficile determinare una cella per esempio a T di resistenze la cui matrice di catena è proprio quella specificata e soddisfa al vincolo di essere a resistenza costante. Se per  $\Theta$  si sceglie un valore puramente immaginario,  $A$  e  $D$  risultano reali e  $B$  e  $C$  risultano immaginari; non sarebbe difficile determinare i parametri e i componenti reattivi che a una *determinata frequenza* fanno sì che la cella sia a resistenza costante; sì, però ad una sola determinata frequenza, perché le reattanze indipendenti dalla frequenza non esistono.

### Esercizio 5.8

Basta porre nelle formule di progetto  $R_{01} = R_G$  e  $R_{02} = R_L$ , e scegliere per  $\Theta$  un valore qualsiasi puramente immaginario  $\Theta = j\beta$ . Però per essere sicuri di ottenere una cella adattatrice di soli

Versione del 3 ottobre 2001

due componenti reattivi conviene ricavare le reattanze di una cella a T; passando alle impedenze a vuoto e confrontando queste con quelle di una cella a T si ricava

$$Z_{T1} = Z_{11} - Z_{21} = jX_{T1} = -j \frac{R_G \cos \beta - \sqrt{R_G R_L}}{\sin \beta}$$

$$Z_{T2} = Z_{21} = jX_{T2} = -j \frac{\sqrt{R_G R_L}}{\sin \beta}$$

$$Z_{T3} = Z_{22} - Z_{21} = jX_{T3} = -j \frac{R_L \cos \beta - \sqrt{R_G R_L}}{\sin \beta}$$

Per essere sicuri di realizzare l'adattatore con una cella a L basta allora scegliere

$$\beta = \arccos \left[ \min \left( \sqrt{\frac{R_G}{R_L}}, \sqrt{\frac{R_L}{R_G}} \right) \right]$$

Si noti che l'espressione precedente fornisce per  $\beta$  due valori opposti, ai quali corrisponde lo scambio delle reattanze induttive con reattanze capacitive e viceversa.

### Esercizio 5.9

Seguendo l'approccio del paragrafo 4.4 basta compensare alla frequenza data la reattanza del generatore e quella del carico con reattanze uguali e opposte; integrando queste reattanze nel doppio bipolo di adattamento si può scegliere  $\beta$  in modo da compensarne almeno una delle due. si ha pertanto

$$\hat{Z}_{T1} = -jX_G + Z_{T1}$$

$$\hat{Z}_{T2} = Z_{T2}$$

$$\hat{Z}_{T3} = -jX_L + Z_{T3}$$

Sostituendo le espressioni di  $Z_{Ti}$  ottenute nell'esercizio precedente si ottiene

$$\hat{Z}_{T1} = -j \frac{|Z_G| \cos(\beta - \arg[Z_G]) - \sqrt{R_G R_L}}{\sin \beta}$$

$$\hat{Z}_{T2} = -j \frac{\sqrt{R_G R_L}}{\sin \beta}$$

$$\hat{Z}_{T3} = -j \frac{|Z_L| \cos(\beta - \arg[Z_L]) - \sqrt{R_G R_L}}{\sin \beta}$$

Il parametro  $\beta$  può essere scelto in modo da annullare o  $\hat{Z}_{T1}$  o  $\hat{Z}_{T3}$ ; si ottengono formalmente quattro soluzioni

$$\beta_{1,2} = \arg[Z_G] + \arccos \frac{\sqrt{R_G R_L}}{|Z_G|}$$

$$\beta_{3,4} = \arg[Z_L] + \arccos \frac{\sqrt{R_G R_L}}{|Z_L|}$$

Non è detto che esistano tutte e quattro le soluzioni indicate; certo è che se l'argomento dell'arcocoseno è inferiore a 1, l'arcocoseno fornisce due soluzioni effettivamente distinte; quindi o le soluzioni sono due o le soluzioni sono quattro; ma date due impedenze generiche da adattare,  $Z_G$  e  $Z_L$ , almeno uno dei due arcocoseni dà luogo a valori reali, quindi almeno due soluzioni esistono sempre.

## Esercizio 5.10

Con  $Z_G = (50 + j12) \Omega$  e  $Z_L = (300 - j73) \Omega$  a 110 MHz, si ha successivamente

$$\begin{aligned} |Z_G| &= 51,420 \Omega & \arg[Z_G] &= +13,495^\circ \\ |Z_L| &= 308,754 \Omega & \arg[Z_L] &= -13,676^\circ \\ \sqrt{R_G R_L} &= 122,474 \Omega \end{aligned}$$

Essendo  $|Z_G| < \sqrt{R_G R_L}$  sono disponibili solo le soluzioni  $\beta_3$  e  $\beta_4$ . Scegliamo arbitrariamente la soluzione  $\beta_3$  che annulla  $\hat{Z}_{T3}$ .

$$\begin{aligned} \arccos(\sqrt{R_G R_L}/|Z_L|) &= \pm 66,630^\circ & \beta_3 &= 52,954^\circ \\ \hat{Z}_{T1} &= +j103,707 \Omega & \hat{Z}_{T2} &= -j153,448 \Omega \\ L &= 150 \text{ nH} & C &= 9,43 \text{ pF} \end{aligned}$$

## Esercizio 5.11

La matrice delle ammettenze nodali è

$$\begin{bmatrix} 2p + \frac{1}{p} & -\frac{1}{p} & -2p & 0 \\ -\frac{1}{p} & \frac{3}{p} & -\frac{1}{p} & \frac{1}{p} \\ -2p & -\frac{1}{p} & 5p + \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p} & 0 & p + \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

per cui l'impedenza cercata è

$$Z_e = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{p} & -\frac{1}{p} & \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 5p + \frac{1}{p} & 0 \\ -\frac{1}{p} & 0 & p + \frac{1}{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2p + \frac{1}{p} & -\frac{1}{p} & -2p & 0 \\ -\frac{1}{p} & \frac{3}{p} & -\frac{1}{p} & \frac{1}{p} \\ -2p & -\frac{1}{p} & 5p + \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p} & 0 & p + \frac{1}{p} \end{vmatrix}}$$

Ovviamente, salvo errori, il risultato finale deve essere lo stesso di quello ottenuto nell'esempio 5.5.

Versione del 3 ottobre 2001

## Esercizio 5.12

La matrice delle impedenze di maglia è

$$\begin{bmatrix} 2p + \frac{1}{p} & -p - \frac{1}{p} & -p \\ -p - \frac{1}{p} & 2p + \frac{4}{3p} & -p \\ -p & -p & 2p + \frac{1}{2p} \end{bmatrix}$$

per cui l'ammettenza cercata è

$$Y_e = \frac{\begin{vmatrix} 2p + \frac{4}{3p} & -p \\ -p & 2p + \frac{1}{2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2p + \frac{1}{p} & -p - \frac{1}{p} & -p \\ -p - \frac{1}{p} & 2p + \frac{4}{3p} & -p \\ -p & -p & 2p + \frac{1}{2p} \end{vmatrix}}$$

Ovviamente, salvo errori, il risultato finale deve essere lo stesso di quello ottenuto nell'esempio 5.5.

## Esercizio 5.13

Il metodo di bisezione si può applicare al doppio bipolo intermedio, quello per il quale nell'esempio 5.5 si sono determinati i parametri usando il metodo dell'analisi a blocchi. Risulta che le due ammettenze di modo comune e di modo differenziale sono

$$Y_{mc} = \frac{p}{2 + 3p^2} \quad Y_{md} = \frac{4p^2 + 1}{p}$$

da cui

$$Y_{11} = Y_{mc} + Y_{md} = \frac{6p^4 + 6p^2 + 1}{3p^3 + 2p} \quad Y_{21} = Y_{mc} - Y_{md} = -\frac{6p^4 + 5p^2 + 1}{3p^3 + 2p}$$

Di qui in avanti si procede come nell'esempio 5.5 per arrivare agli stessi risultati.

## Bibliografia

- [1] Beccari C., *La trasformazione di Laplace nell'analisi dei circuiti*, Boringhieri, Torino, 1977
- [2] Beccari C., *Teoria dei circuiti elettronici*, CLUT, Torino, 1997
- [3] Biey M., *Spice e PSpice — Introduzione all'uso*, CLUT, Torino, 2001
- [4] Beccari C., *Sintesi dei circuiti passivi*, CLUT, Torino, 1993
- [5] Beccari C., “Some applications of Schwartz’s lemma” in *Alta Frequenza*, n. 11, vol. XXXVIII (1969), pp. 902–905



# Indice analitico

## A

adattamento  
  coniugato 100  
  di due impedenze complesse 102  
  di due resistenze 101  
  energetico 98, 100  
albero 5, 143  
  ramificato 144  
  ramo 144  
  stellato 143  
ammettenza 44, 51  
  condensatore 45  
  induttore 44  
ammettenze di cortocircuito 123, 127, 134  
ampiezza 52  
  di picco 54  
  iniziale 58  
amplificatore  
  ideale 9, 127  
  operazionale 9, 127  
amplificazione  
  di corrente 51, 136, 137, 138  
  di tensione 51, 136, 137  
analisi a blocchi 136  
analisi dimensionale 19  
analogia  
  elettromeccanica 10  
  elettrotermica 71

antitrasformata  
  Fourier 158  
  Hilbert 155  
  Laplace 34  
ascissa di convergenza 21

## B

banda  
  a 3 dB 103, 111, 112, 113  
  attenuata 103, 158  
  passante 103, 115  
Bessel  
  funzione di prima specie 31, 70  
bipolo  
  passività 159  
  resistivo 81  
Bode  
  diagramma 103  
Boucherot  
  teorema 98  
Brune  
  condizione delle fasi 161  
  condizioni nel semipiano destro 161  
  condizioni sull'asse immaginario 162

**C**

caos deterministico 6  
 capacità concentrata 1  
 capacità parassita 56  
 capacità termica 74  
 Cauchy  
   integrale principale 35  
 Cauchy–Riemann  
   condizioni 21, 22  
 causale  
   circuito 79  
   sistema 79  
 cella a ponte 131  
 cella a T composito 130  
 cella a traliccio 131  
 circuito  
   a parametri concentrati 162  
   a parametri distribuiti 162  
   a scala 69  
   asintoticamente stabile 86  
   bilanciato 120  
   causale 79  
   con infiniti componenti 69, 162  
   degenere 75, 151  
   duale 10  
   grado 60  
   instabile 86  
   Liapunov stabile 86  
   sbilanciato 120  
   unilaterale 83  
 circuito equivalente 77  
   nel dominio della frequenza 43  
 coalbero 144  
   corda 144  
 codice dei colori 174  
 coefficiente di risonanza 68  
   energetico 68  
 componente  
   a parametri concentrati 2  
   autonomo 6  
   equazione costitutiva 3  
   ideale 2  
   inerte 9  
   patologico 9  
   privo di perdite 1  
   tempo-invariante 6

condensatore 7  
   ammettenza 45  
   capacità 7  
   di rifasamento 96  
   impedenza 45  
 condizione  
   Foster 164  
 condizione di causalità 79  
 condizione di passività 161  
   in regime cisoidale 161  
   in regime sinusoidale 162  
 condizioni  
   Cauchy–Riemann 21, 22  
 condizioni di Brune 161  
 condizioni di stabilità 86  
 conduttanza termica 74  
 connessione  
   di doppi bipoli 132, 135  
   di doppi bipoli in cascata 135  
   di doppi bipoli in parallelo 134  
   di doppi bipoli in serie 132  
   di doppi bipoli in serie-parallelo 134  
 connettore 3, 147  
   equazioni costitutive del 3  
   reciprocità del 149  
 contorno semplicemente connesso 22  
 convenzione degli utilizzatori 3  
 corda 5  
 corpo rigido 1

**D**

denominatore monico 37  
 diagramma  
   Bode 103  
   Nyquist 103  
 diagramma fasoriale 95  
 diagramma vettoriale 95  
 diagrammi di Bode  
   asintotici 106  
   contributi della radice nell'origine 108  
   contributi delle radici complesse 108  
   contributi delle radici reali 106  
   punto centrale 106, 110  
 Dirac  
   distribuzione 23, 24

discriminazione 158  
dispositivo elettromeccanico 73  
distribuzione  
  Dirac 23, 24  
  impulsiva 20, 23  
dominio di convergenza 21  
doppio bipolo 8, 119, 120  
  conversione fra rappresentazioni 126  
  passività 159  
  patologico 125, 126, 136  
  reciproco 127  
  resistivo 83  
  simmetrico 128  
  strutturalmente simmetrico 129  
dualità 10  
duty cycle 74

## E

equazione  
  di equilibrio 60  
  fra grandezze 59  
  fra misure 59  
  Laplace 22  
  Poisson 22  
equazioni differenziali indipendenti 151  
equilibrio statico 6  
equivalente termico 74  
equivalenza  
  Norton 44, 45  
  Thévenin 44, 45

## F

fasore 94  
fattore di inserzione 136, 137  
FDNR 163  
filtro  
  dispersivo 158  
  passaalto 111  
  passabanda 65, 113  
  passabasso 63, 112  
  passabasso ideale 158  
  passabasso ideale causale 158  
  passatutto 159  
  selettivo 110  
forma quadratica 159

*Versione del 3 ottobre 2001*

Foster  
  condizione 164  
Fourier  
  antitrasformata 158  
  trasformata 158  
fratti semplici 34  
frequency dependent negative resistor 163  
frequenza  
  armonica 55  
  di taglio 111, 112, 113  
  fondamentale 55  
funzione  
  a fase minima 157  
  a parte immaginaria minima 156  
  a parte reale minima 156  
  a ritardo minimo 157  
  analitica 21  
  armonica 22  
  di Bessel di prima specie 31  
  di trasferimento 51  
  di variabile complessa 21  
  hermitiana 162  
  passatutto 156  
  reale positiva 161  
funzione di prima specie  
  Bessel 70  
funzione razionale  
  antitrasformata 37

## G

generatore  
  controllato 8  
  di corrente 10  
  di tensione 10  
  indipendente 9  
  spento 5  
generatore ideale 1  
giratore 9, 127, 129  
grado  
  circuito 60  
grafo del circuito 4  
grandezza  
  estensiva 2  
  intensiva 2

**H**

Hilbert

- antitrasformata 155
- trasformata 155

**I**

- immettenza 161
- impedenza 44, 51
  - condensatore 45
  - d'entrata 51, 136
  - di trasmissione 51
  - di uscita 51, 136
  - induttore 44
  - interna 136
  - mutua 46, 51
  - propria 46, 51
- impedenze a vuoto 122, 133
- impulso
  - ideale 2
  - unitario 23
- induttore 7
  - ammettenza 44
  - impedenza 44
  - induttanza 7
- integrale di Laplace 20

**K**

Kirchhoff

- principi 3, 149

**L**

- L-trasformata 20
  - bilatera 33
  - cambiamento di scala in frequenza 25
  - cambiamento di scala temporale 25
  - dell'integrale 27
  - della derivata 26
  - linearità 25
  - modulazione 25
  - monolatera 33, 167
  - prodotto di convoluzione 27
  - tabelle 34, 167
  - traslazione in frequenza 25

traslazione nel tempo 25

valore finale 27

valore iniziale 28

Laplace

antitrasformata 34

equazione 22

integrale di 20

trasformazione 19

Laurent

sviluppo in serie 163

legge

delle correnti 3, 4, 144, 145, 149

delle tensioni 3, 4, 146, 148

lemma

Schwartz 161

Liapunov

stabilità 86

limitazione di banda 56

linearità 1

**M**

- maglia 5, 146
  - patologica 152
- maglie indipendenti 4
- massa puntiforme 1
- matrice dei tagli 145
- matrice delle ammettenze nodali 151
- matrice delle maglie 146
- matrice di incidenza 144
- matrice ortogonale 149
- metodo di bisezione 130
- Millman
  - teorema 49, 62
- modello per piccoli segnali 1
- modi propri di oscillazione 80
- modo comune 130
- modo differenziale 130

**N**

- nodi indipendenti 4
- normalizzazione 59
- Norton
  - equivalenza 44, 45
- Nyquist
  - diagramma 103

**O**

onda quadra 54  
operatore integro-differenziale 6  
oscillatore 87, 154  
    a dente di sega 87  
    a rilassamento 87

**P**

parametri di catena 125, 135  
parametri ibridi 124, 134  
parametro parassita 68  
passività 159  
    condizione di 161  
permeanza 46  
Poisson  
    equazione 22  
poli  
    accoppiati 83  
    elettricamente disaccoppiati 83  
    numericamente disaccoppiati 84  
polo  
    all'infinito 80  
    apparente 80  
    significato fisico 79  
porta 3, 8  
    bilanciata 120  
    sbilanciata 120  
potenza  
    apparente 98  
    attiva 96  
    complessa 98  
    disponibile 100  
    istantanea 95, 160  
    meccanica 97  
    media 96, 160  
    reattiva 98  
potenziale nodale 144  
principi  
    Kirchhoff 3, 149  
principio  
    di sostituzione 48  
prodotto di convoluzione 27  
    L-trasformata 27  
progetto 164  
    per sintesi 165  
PSpice 5, 150

pulsazione complessa 20  
punti di diramazione 31

**Q**

Q-metro 115  
quadripolo 120  
qualità della manutenzione 71

**R**

radio frequency choke 173  
ramo 5  
reattanza 95  
reciprocità 149  
    teorema 127  
regime  
    cisoidale 58, 93, 122, 160  
    sinusoidale 65, 68, 85, 93, 122  
    stazionario 81, 122  
residuo 23  
    all'infinito 23, 163  
resistenza  
    di girazione 129  
    propria 84  
resistore 6  
    conduttanza 7  
    resistenza 7  
resistore negativo dipendente dalla frequenza 163  
rifasamento 96  
ringing 110  
risonatore  
    coefficiente di risonanza 68  
    resistenza caratteristica 68  
risposta  
    in anticipo di fase 94  
    in frequenza 102  
    in quadratura 95  
    in ritardo di fase 94  
    isomorfa 56, 84, 152  
risposta all'impulso 85, 86  
    significato fisico 79  
risposta forzata 78  
risposta libera 78, 85  
    significato fisico 79  
ritardo di fase 157

ritardo di gruppo 157  
rotoamplificazione 21

## S

scala logaritmica 104  
scarto statistico 173  
Schwartz  
  lemma 161  
segnale  
  forma d'onda 157, 158  
selettività 159  
significato fisico  
  polo 79  
  risposta all'impulso 79  
  risposta libera 79  
  zero 84  
simmetria 128  
  elettrica 128  
  topologica 128  
sintesi dei circuiti passivi 164  
sistema  
  causale 79, 154  
  del primo ordine 81  
  del secondo ordine 82  
  instabile 86  
  linearizzato 1  
  predittivo 154  
  stabile 154  
sistema fisico  
  patologico 6  
Sistema Internazionale 59  
sollecitazioni di rottura 1  
sovrapposizione degli effetti 62  
specifiche di progetto 165  
Spice 5  
stabilità  
  asintotica 86, 154  
  Liapunov 86, 163  
supercondensatore 86, 163  
superinduttore 86, 163  
suscettanza 95  
sviluppo in serie  
  Laurent 163

## T

taglio 145  
  patologico 152  
Tellegen  
  teorema 149  
teorema  
  Boucherot 98  
  Millman 49, 62  
  reciprocità 127  
  Tellegen 149  
  valore finale 27  
  valore iniziale 28  
Thévenin  
  equivalenza 44, 45  
tolleranza  
  di fabbricazione 173  
transitorio  
  di accensione 53, 55, 58, 85  
trasformata  
  bilatera 79, 158  
  Fourier 79, 158  
  Hilbert 155  
  monolatera 79  
trasformatore 7  
  ad accoppiamento unitario 7, 8, 46, 127  
  coefficiente di accoppiamento 7  
  ideale 8, 127, 129, 132  
  induttanza mutua 7  
  induttanza primaria 7  
  induttanza secondaria 7  
  induttivo 7  
  modello nel dominio della pulsazione 45  
  rapporto di trasformazione 8  
  senza perdite 7  
trasformazione  
  conforme 22  
  Fourier 33  
  Laplace 19  
traslatore 121  
tripolo 8, 119

## U

unidirezionalità 127  
unità SI 59

**V**

valore efficace 52, 96

valore finale  
teorema 27

valore iniziale  
teorema 28

**Z**

zero  
significato fisico 84