2° Test - 3/2/2000 - Soluzione Esercizio 1

Analisi delle specifiche.

- Astaticità al disturbo d_2: richiede l'inserimento, nel compensatore, di un polo in s=0
- Errore a regime ad un riferimento a rampa unitario, $|e_r| \le 0.01$: richiede un sistema di tipo 1 e, quindi, l'inserimento, nel compensatore, di un polo in s=0 come la specifica precedente; inoltre impone un vincolo sulla costante di velocità

  $$|K_v| = |1/e_r| \ge 1/0.01 = 100$$

  dato che $K_v = K_C * K_G$ e $K_G = \lim_{s\to 0} s \dfrac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{s}$ =7.1429, si ottiene:

  $$|K_C| = |K_v / K_G| \ge 100 / 7.1429 = 14$$

Non essendoci altre specifiche riguardanti il comportamento statico del compensatore, scegliendo il valore 15 per $|K_C|$ e scegliendo il segno positivo per K_C in base al luogo delle radici della funzione ($G_1(s)* G_2(s)$) / s, si ottiene:

$$C_r(s) = \frac{15}{s}$$

- Il vincolo sulla banda passante viene trasformato in un vincolo sulla pulsazione di attraversamento:

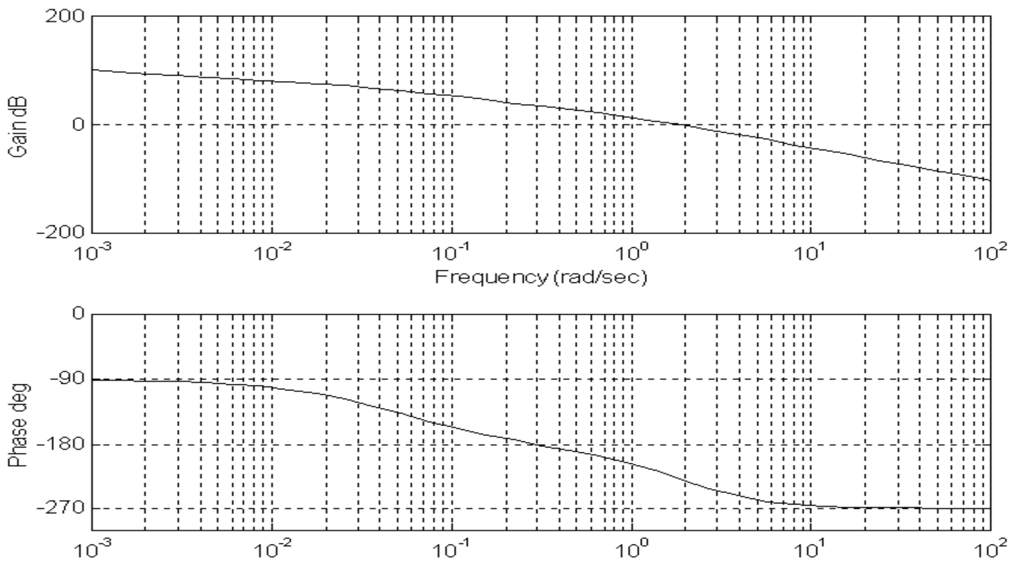
  $$\overline{\omega}_t \cong 0.6\omega_b \le 0.6 \cdot 2 = 1.2$$

- Il vincolo sul picco di risonanza viene trasformato in un vincolo sul margine di fase:

  $$\overline{m}_\varphi \ge 2\arcsin\left(\frac{1}{2M_r}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2\cdot 10^{\frac{2.5}{20}}}\right) = 44^\circ$$

Progetto della rete integro-derivativa.

Tracciando il diagramma di Bode della funzione $Ga_r(s) = C_r(s) * G_1(s) * G_2(s)$ (vedi figura seguente) si nota come in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\overline{\omega}_t = 1.2$ rad/s la fase sia minore di $-180°$, richiedendo quindi l'inserimento di una rete derivativa, ed inoltre il modulo sia maggiore di 0 dB, richiedendo quindi l'inserimento di una rete integrativa.



Applicando il comando Bode di Matlab alla funzione $Ga_r(s) = C_r(s) * G_1(s) * G_2(s)$ si calcola, in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\overline{\omega}_t = 1.2$ rad/s, la fase che vale −214°. Quindi per il progetto della rete derivativa si impone un ricupero di fase di 44° −(180° −214°) +10° = 88° (i 10° si aggiungono per tenere conto della perdita di fase dovuta al successivo inserimento della rete integrativa). Essendo il ricupero di fase elevato si sceglie una derivativa doppia imponendo un ricupero di fase Δφ = 88° / 2 = 44° su ogni singola rete. Tramite le formule analitiche si calcola:

$$m_d = \frac{1+\sin(\Delta\varphi)}{1-\sin(\Delta\varphi)} = 5.55 \qquad \omega_\mathrm{d} = \frac{\overline{\omega}_t}{\sqrt{m_d}} = 0.5$$

Si ottiene quindi

$$C_d(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{\omega_d}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{m_d\omega_d}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{s}{0.5}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{2.775}\right)^2}$$

Applicando il comando Bode di Matlab alla funzione $Ga_{rd}(s) = C_r(s) * C_d(s) * G_1(s) * G_2(s)$ si calcola, in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\overline{\omega}_t = 1.2$ rad/s, la fase che vale −126°, fornendo quindi il margine di fase desiderato; in corrispondenza alla stessa pulsazione il modulo vale ora 25 dB, richiedendo quindi l'inserimento di una rete integrativa per riportarlo al valore 0 dB.

Per la rete integrativa si impone un abbassamento di modulo di 25 dB; decidendo di utilizzare una rete integrativa doppia (per avere un m_i non eccessivo) e imponendo un $\Delta m = \sqrt{10^{\frac{25}{20}}} = 4.2$ tramite le formule analitiche, si ottiene:

$$m_i = \Delta m = 4.2 \qquad \omega_\mathrm{i} = 0.01\cdot\overline{\omega}_t = 0.012$$

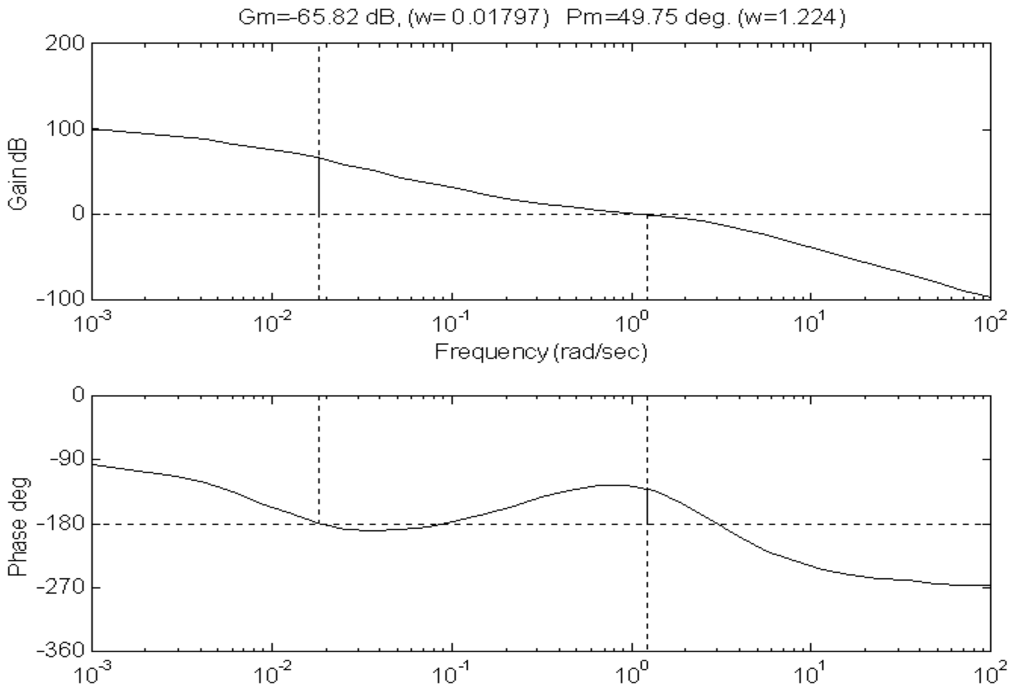
Si ottiene quindi:

$$C_i(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{m_i\omega_i}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{\omega_i}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{s}{0.05}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{0.012}\right)^2}$$

In conclusione si ottiene il compensatore complessivo come cascata delle tre reti progettate:

$$C(s) = C_r(s)\cdot C_d(s)\cdot C_i(s) = \frac{15\left(1+\frac{s}{0.5}\right)^2\left(1+\frac{s}{0.05}\right)^2}{s\left(1+\frac{s}{2.775}\right)^2\left(1+\frac{s}{0.012}\right)^2}$$

Applicando il comando Margin di Matlab alla funzione $Ga(s) = C(s) * G_1(s) * G_2(s)$ (vedi figura seguente) si verifica come le specifiche sul margine di fase e sulla pulsazione di attraversamento siano rispettate.



Verifica delle specifiche in catena chiusa.

- Stabilità: i poli della funzione in catena chiusa $W(s)$ sono tutti a parte reale negativa.
- Astaticità al disturbo d_2: è assicurata dalla presenza dello zero nell'origine nella funzione di trasferimento $Y(s)/D_2(s) = 1/(1+Ga(s))$.
- Errore alla rampa: è assicurato dalla presenza dello zero nell'origine nella funzione di trasferimento $S(s)=E(s)/R(s) = 1/(1+Ga(s))$ e dal valore $e_r = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) = 0.0093$.
- Banda passante: tramite MatLab si ricava $\omega_b = 2.42$ rad/s.
- Picco di risonanza: tramite MatLab si ricava $M_r = 2$ dB.

Tutte le specifiche sono soddisfatte.

Valutazioni a posteriori.

Tramite MatLab si ricavano:

- tempo di salita: $t_s = 0.86$ s
- sovraelongazione $\hat{s} = 0.30$
- massimo effetto del disturbo d_1: $U = 0.02 \cdot \max_{\omega \geq 10} |Wu(j\omega)| = 0.02 * 2.787 = 0.0557$

  La funzione di trasferimento dal disturbo d_1 al comando u vale:

$$U(s)/D_1(s) = W_u(s) = (C(s)G_2(s))/(1+Ga(s)).$$

2° Test - 3/2/2000 - Soluzione Esercizio 2

Data la pulsazione di attraversamento $\omega_t = 1.224$ si ricava il passo di campionamento:

$$T_c = 0.35/\omega_t = 0.28$$

Dato T_c si ricava la perdita di fase dovuta all'inserimento dello ZOH:

$$\left.\angle\frac{1}{1+\frac{T_c}{2}s}\right|_{s=j\omega_t} = -9.7°$$

Utilizzando il comando MatLab C2DM si ricava il compensatore discretizzato:

$$C(z) = \frac{-4.1871\left(1-\frac{z}{0.8694}\right)^2\left(1-\frac{z}{0.9861}\right)^2}{(1-z)\left(1-\frac{z}{0.4598}\right)^2\left(1-\frac{z}{0.9966}\right)^2}$$

L'andamento in frequenza dei due compensatori è riportato nella figura seguente: