1° Test - 20/12/1999 - Soluzione Esercizio 1

Primo punto

Le equazioni dinamiche del sistema sono:

- Parte elettrica:

$$v(t) = R\,i(t) + L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t} + K_E\omega_m(t)$$

- Parte meccanica:

$$K_C\;i(t) - \beta_m\omega_m(t) - C_1(t) = J\,\frac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$C_1(t) - \beta\omega(t) - C_2(t) = J\,\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$C_1(t) = K_1\big(\vartheta_m(t) - \vartheta(t)\big)$$
$$C_2(t) = K_2\vartheta(t)$$

Per il calcolo delle funzioni di trasferimento si può procedere L-trasformando le equazioni dinamiche ottenendo:

$$\begin{aligned}
&V(s) = (R + sL)I(s) + sK_E\theta_m(s)\\
&K_C\;I(s) - s\beta_m\theta_m(s) - K_1\big(\theta_m(s) - \theta(s)\big) = s^2J\theta_m(s)\\
&K_1\big(\theta_m(s) - \theta(s)\big) - s\beta\theta(s) - K_2\theta(s) = s^2J\theta(s)
\end{aligned}$$

Ricavando $\theta_m(s)$ dalla terza equazione, sostituendolo nella prima e nella seconda equazione, ricavando da quest'ultima $I(s)$ e sostituendolo nella prima si ottiene:

$$G_1(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} =$$
$$= \frac{K_1K_C}{(R+sL)\big[(J_ms^2 + \beta_ms + K_1)(Js^2 + \beta s + K_1 + K_2) - K_1^2\big] + K_EK_Cs(Js^2 + \beta s + K_1 + K_2)}$$

che è la funzione di trasferimento cercata.

Secondo punto

Ricordando che la velocità è la derivata della posizione si ottiene subito:

$$G_2(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{s\theta(s)}{V(s)} = sG_1(s)$$

1° Test - 20/12/1999 - Soluzione Esercizio 2

Primo punto.

Data la struttura del sistema di controllo, la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa è:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{(s+z)(s+2)}{2s^2+(z+p+1)s+(2z-p)};$$

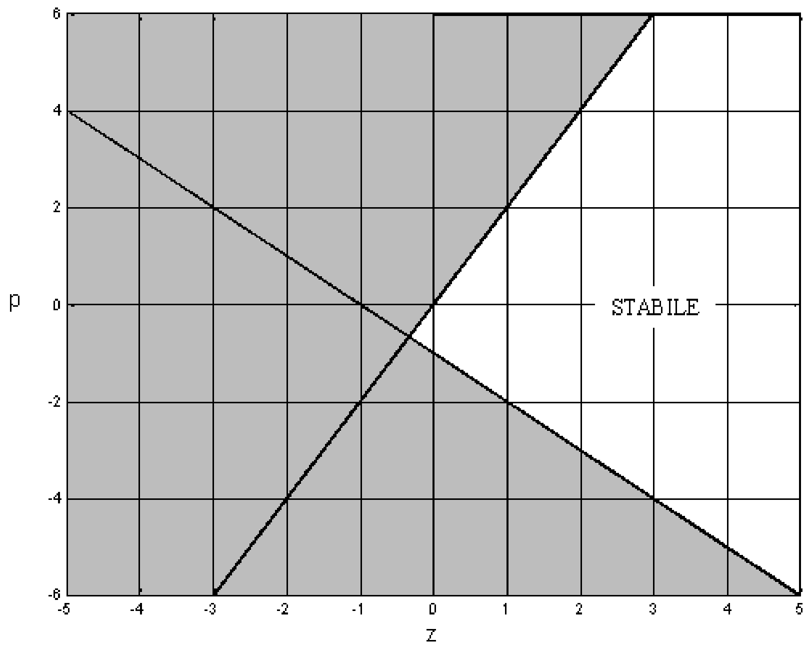
per cui i poli del sistema in catena chiusa sono le soluzioni dell'equazione:

$$2s^2+(z+p+1)s+(2z-p)=0\,.$$

Applicando la regola dei segni di Cartesio ai coefficienti di tale equazione si ha che essa ha radici a parte reale negativa se e solo se i coefficienti sono tutti positivi o tutti negativi. Dato che il coefficiente di s^2 è positivo, si ottengono le seguenti disuguaglianze:

$$\left.\begin{array}{c} 2>0 \\ z+p+1>0 \\ 2z-p>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} p>-z-1 \\ p<2z \end{array}$$

Le due disuguaglianze danno origine, nel piano *(z, p)* alla seguente regione di stabilità:



Secondo punto.

Dal disegno si verifica che l'insieme di valori $z = 3,\ p = 0$ appartiene alla zona di stabilità.
Si ottiene quindi la seguente funzione di trasferimento in catena chiusa:

$$W(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{2s^2 + 4s + 6}$$

per cui la risposta ad un gradino di ampiezza 4 è data da:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = W(s) \cdot \frac{4}{s} = \frac{s^2 + 5s + 6}{2s^2 + 4s + 6} \cdot \frac{4}{s}\,.$$

La funzione *Y(s)* ha i seguenti poli:

$$p_1 = -1 - j\sqrt{2} \quad p_2 = -1 + j\sqrt{2} \quad p_3 = 0\,;$$

l'espressione in fratti semplici di *Y(s)* è quindi data da:

$$Y(s) = \frac{R_1}{s + 1 + j\sqrt{2}} + \frac{R_2}{s + 1 - j\sqrt{2}} + \frac{R_3}{s}$$

con:

$$\begin{array}{l} R_1 = -1 + j\sqrt{2} \quad R_2 = -1 - j\sqrt{2} \quad R_3 = 4 \\ |R_1| = 1.73 \quad \angle R_1 = 2.19 = 125° \end{array}.$$

Quindi l'andamento nel tempo di *y(t)* risulta essere:

$$y(t) = 2|R_1|\,e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}\,t + \angle R_1\right) + R_3 = 3.46\,e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}\,t + 2.19\right) + 4$$

1° Test - 20/12/1999 - Soluzione Esercizio 3

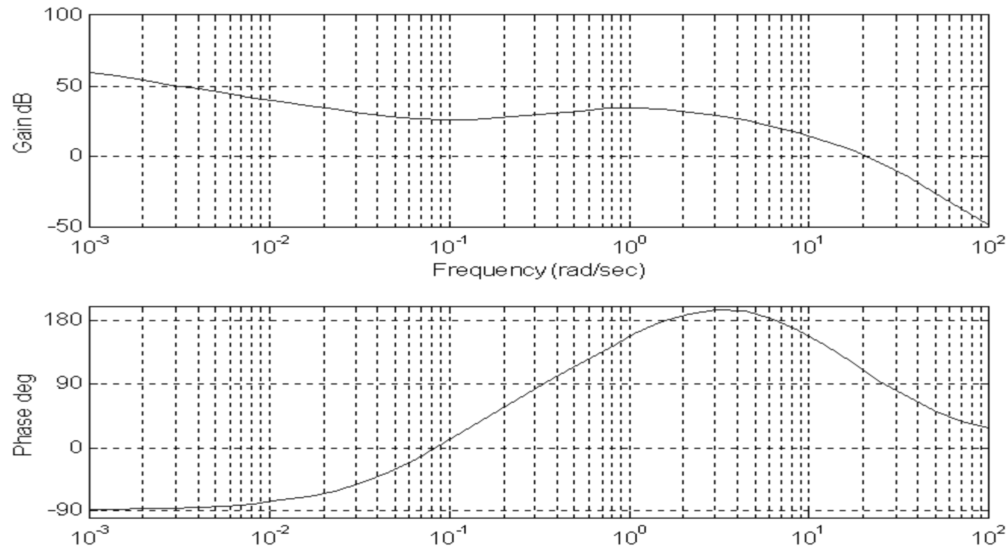
Primo punto: Criterio di Nyquist.

Il numero p^I_{cc} di poli instabili del sistema in catena chiusa è dato da:

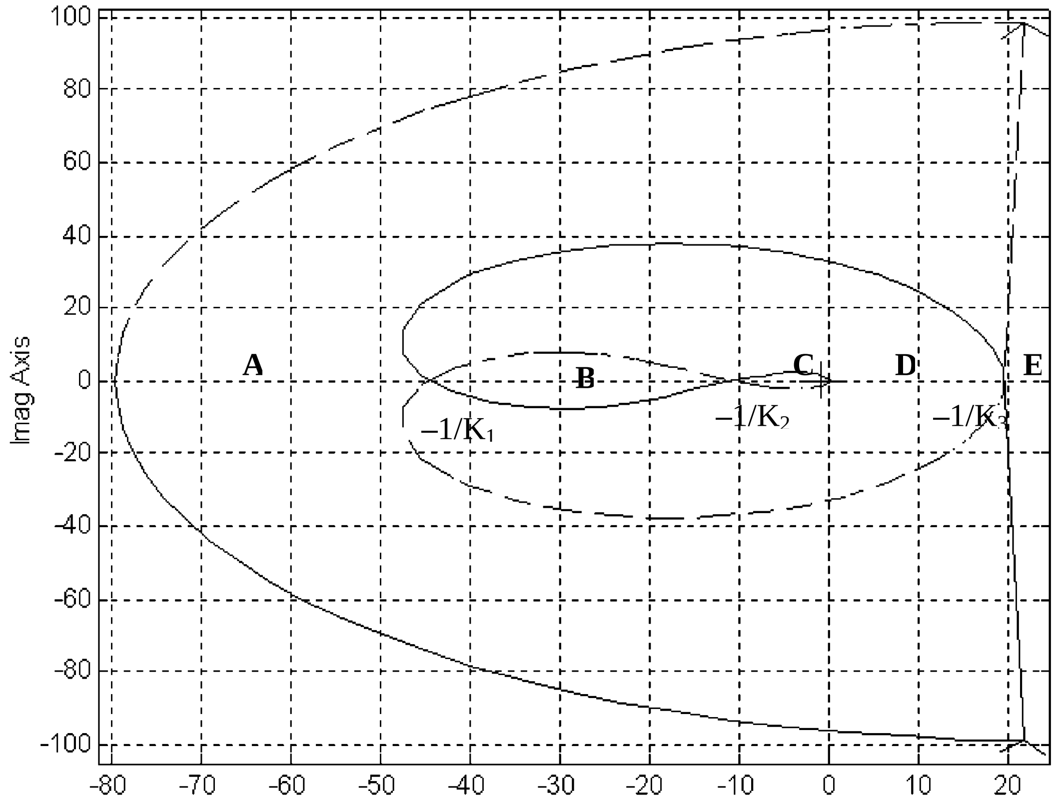
$$p^I_{cc} = n + p^I_{ca}$$

nel nostro caso si ha $p^I_{ca} = 3$.

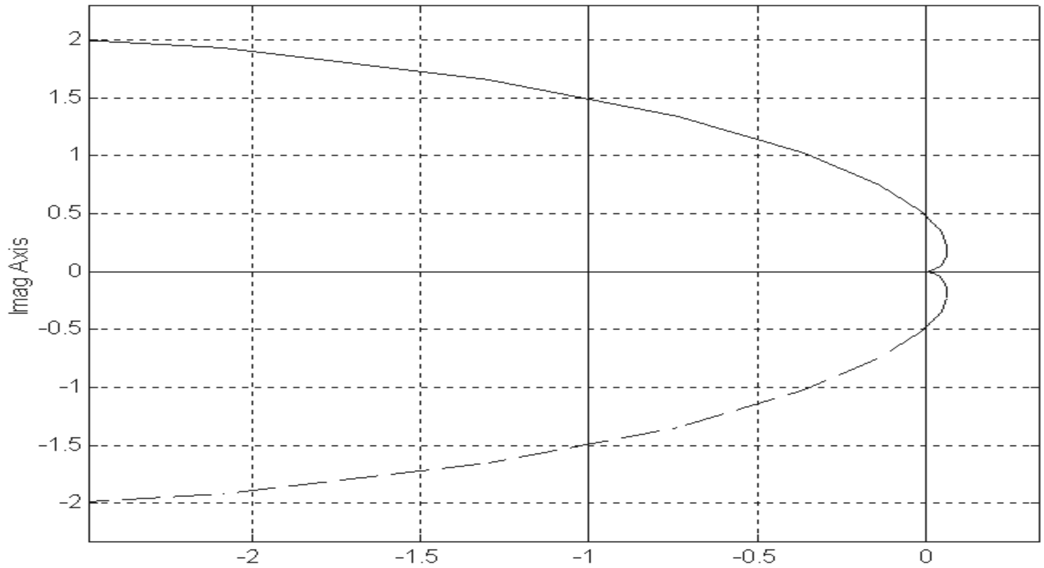
Il diagramma di Bode del sistema in catena aperta è il seguente:



Sulla base del precedente diagramma è possibile dedurre il seguente andamento del diagramma di Nyquist:



dove:
$-1/K_1 = -44.3 \quad -1/K_2 = -10.74 \quad -1/K_3 = 20.08$
per cui:
$K_1 = 0.023 \quad K_2 = 0.093 \quad K_3 = -0.05$.
Se viene ingrandita la zona nell'intorno dell'origine si nota che non si hanno ulteriori incircolamenti:



Si possono quindi individuare le seguenti zone di variazione del guadagno K:

A. $\left.\begin{array}{c} -\infty < -1/K < -1/K_1 \\ 0 < K < 0.023 \end{array}\right\} \rightarrow \quad n = -1 \quad \Rightarrow \quad p_{cc}^{I} = 2$ sistema instabile in cc (2 poli instabili)

B. $\left.\begin{array}{c} -1/K_1 < -1/K < -1/K_2 \\ 0.023 < K < 0.093 \end{array}\right\} \rightarrow \quad n = -3 \quad \Rightarrow \quad p_{cc}^{I} = 0$ sistema stabile in cc.

C. $\left.\begin{array}{c} -1/K_2 < -1/K < 0 \\ 0.093 < K < +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \quad n = -1 \quad \Rightarrow \quad p_{cc}^{I} = 2$ sistema instabile in cc (2 poli instabili).

D. $\left.\begin{array}{c} 0 < -1/K < -1/K_3 \\ -\infty < K < -0.05 \end{array}\right\} \rightarrow \quad n = -2 \quad \Rightarrow \quad p_{cc}^{I} = 1$ sistema instabile in cc (1 polo instabile).

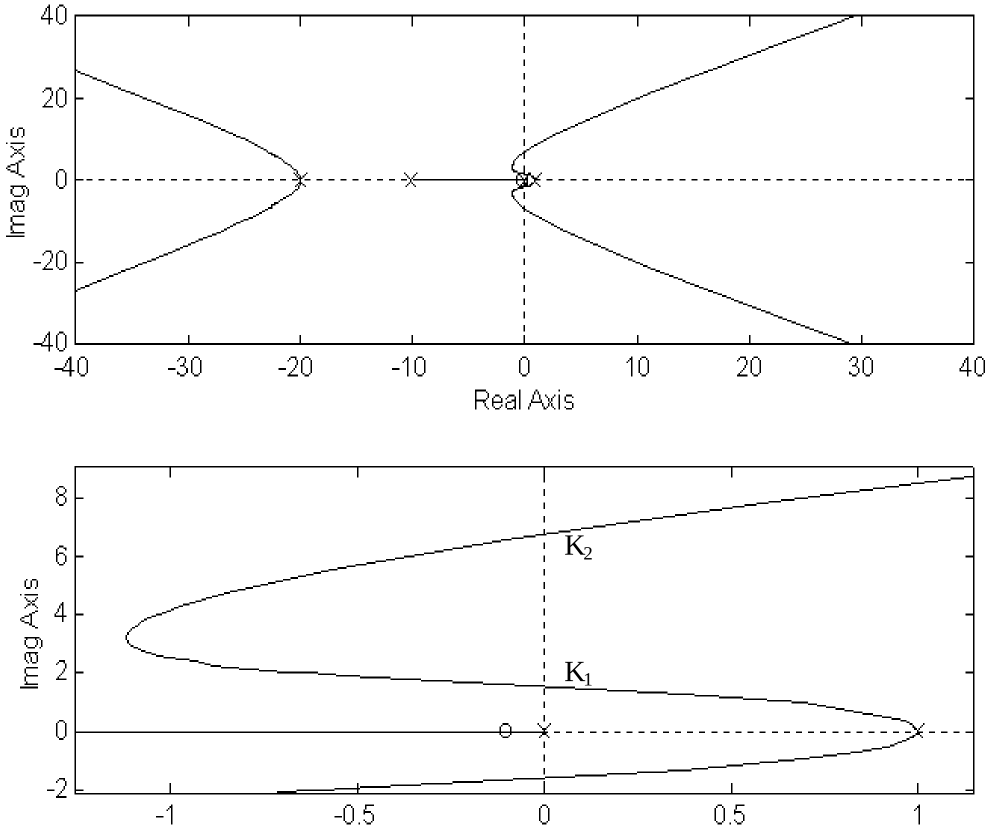
E. $\left.\begin{array}{c} -1/K_3 < -1/K < +\infty \\ -0.05 < K < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad n = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{cc}^{I} = 3$ sistema instabile in cc (3 poli instabili).

Riassumendo:

- $\left. 0 < K < 0.023 \quad K > 0.093 \right\} \rightarrow$ sistema instabile in cc (2 poli instabili).
- $\left. 0.023 < K < 0.093 \right\} \rightarrow$ sistema stabile in cc.
- $\left. -0.05 < K < 0 \right\} \rightarrow$ sistema instabile in cc (3 poli instabili).
- $\left. K < -0.05 \right\} \rightarrow$ sistema instabile in cc (1 polo instabile).

Secondo punto: Luogo delle radici

Tracciando dapprima il luogo positivo si ha:



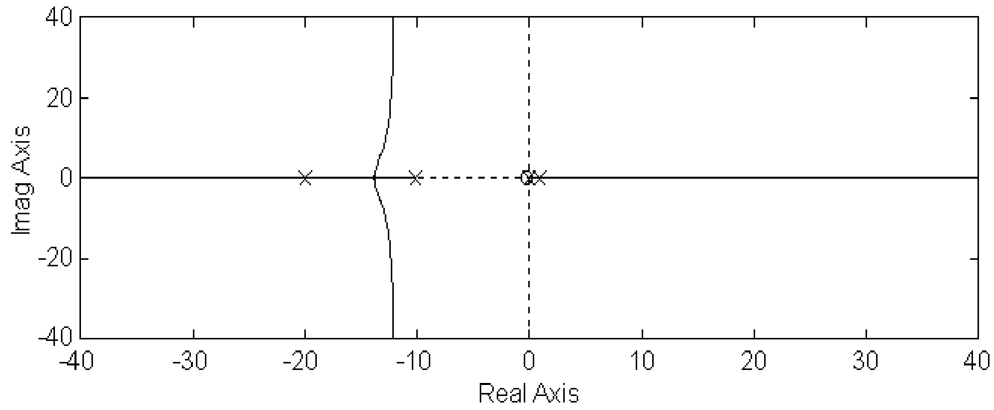
dove: $K_1 = 0.022$ e $K_2 = 0.092$.

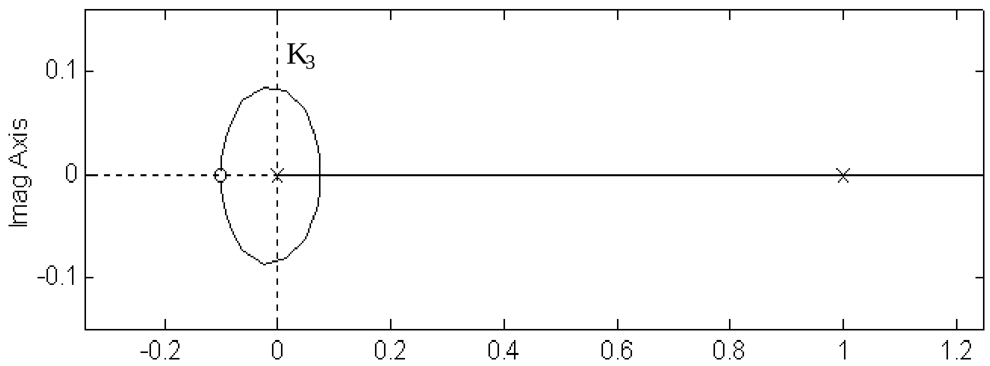
Inoltre si hanno 4 asintoti con origine pari a -11.95 ed angoli pari a 45°, 135°, 225° e 315°.

In base all'andamento di tale luogo si può osservare:

1. per valori del guadagno K inferiori a K_1 esistono due rami del luogo che giacciono nel semipiano positivo e quindi il sistema in catena chiusa possiede due poli instabili;
2. per valori del guadagno K compresi tra K_1 e K_2 tutto il luogo giace nel semipiano sinistro e quindi tutti i poli in catena chiusa sono stabili;
3. per valori del guadagno K superiori a K_2 esistono due rami del luogo che giacciono nel semipiano positivo e quindi il sistema in catena chiusa possiede due poli instabili.

Per quanto riguarda il luogo negativo si ha invece:





dove: $K_3 = -0.046$.
Inoltre si hanno 4 asintoti con origine pari a –11.95 ed angoli pari a 0°, 90°, 180° e 270°.

In base all'andamento di tale luogo si può osservare:

1. per valori del guadagno K compresi tra K_3 e 0 esistono tre rami del luogo che giacciono nel semipiano positivo e quindi il sistema in catena chiusa possiede tre poli instabili;
2. per valori del guadagno K inferiori a K_3 ho un ramo del luogo che giace nel semipiano destro e, pertanto, il sistema in catena chiusa possiede un polo instabile.

Riassumendo:

- $\left.0 < K < 0.022 \quad K > 0.092\right\} \rightarrow$ sistema instabile in cc (2 poli instabili).
- $\left.0.022 < K < 0.092\right\} \rightarrow$ sistema stabile in cc.
- $\left.-0.046 < K < 0\right\} \rightarrow$ sistema instabile in cc (3 poli instabili).
- $\left.K < -0.046\right\} \rightarrow$ sistema instabile in cc (1 polo instabile).

In conclusione l'analisi di stabilità condotta con il luogo delle radici fornisce risultati coerenti con quelli ottenuti tramite il criterio di Nyquist.