ESEMPIO DI COMPITO DI GEOMETRIA

Cognome e nome
(stampatello)____

matricola__________________ corso $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

NON SCRIVERE IN QUESTO SPAZIO

QUIZ $\boxed{}$ ES $\boxed{}$ FINALE $\boxed{}$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

1	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$	5	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$
2	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$	6	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$
3	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$	7	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$
4	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$					

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Prima Parte (Quiz)

Quiz 1. La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) A è invertibile.
b) A ha determinante 0.
c) A ha rango 2.
d) A ha rango 1.

Quiz 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\ker(f) \neq \{0\}$.
b) $(0, 1, 2) \in \mathrm{im}(f)$.
c) $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$.
d) $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Quiz 3. Siano dati i vettori $v_1 := (1, 0, 1)$, $v_2 := (0, 0, 1)$, $v_3 := (1, 0, 0)$ e $v_4 := (1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$.
b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.
c) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.
d) v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Quiz 4. Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) A è diagonalizzabile.
b) A ha $(0, 1)$ come autovettore.
c) A ha autovalori 1 e 4.
d) A ha come unici autovettori non nulli $(1, 2)$ e $(1, -2)$.

Quiz 5. Nello spazio si consideri l'insieme X dei punti della forma $(1+t, 1-t, 2+t)$.

a) X è la retta per $(1, -1, 1)$ parallela al vettore $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.
b) X è contenuto nel piano d'equazione $x + y = 0$.
c) X è la retta per $(1, 1, 2)$ parallela al vettore $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.
d) X è il piano perpendicolare al vettore $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Quiz 6. Nello spazio si consideri la sfera Γ d'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0.$$

a) Γ ha centro $O(0, 0, 0)$.
b) Γ ha raggio $r = 2$.
c) Γ ha piano tangente in $O(0, 0, 0)$ d'equazione $x = 0$.
d) Γ ha centro sull'asse delle y.

Quiz 7. Nello spazio siano date le rette

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

a) r ed s sono sghembe.
b) r ed s si intersecano nell'origine ma non sono complanari.
c) r ed s non si intersecano ma sono complanari.
d) r ed s sono contenute nel piano d'equazione $x - 2y + z = 0$.

Seconda Parte (Esercizi)

Esercizio 1 (8 punti). Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$f(1,1) = (1,1,-1,0), \quad f(0,-1) = (2,-1,2,1).$$

(1) Determinare la matrice di f.

M(f)=

(2) È vero o falso che f è iniettiva?

iniettiva

non iniettiva

Giustificazione

Esercizio 2 (4 punti). Siano dati la retta r ed il piano α rispettivamente d'equazioni

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t, \end{cases} \qquad \alpha: \ x + z = 3.$$

È vero o falso che r ed α sono paralleli?

paralleli	non paralleli

Giustificazione

Svolgimento

Proocediamo nella maniera più "economica".

Svolgimento del Quiz 1. A non è quadrata, quindi a) e b) sono prive di senso. Rimangono c) e d): poiché le righe di A non sono l'una multipla dell'altra segue che $\varrho(A) = 2$, quindi c) è esatta.

Svolgimento del Quiz 2. Poiché $\varrho(A) = 2$ segue che $\dim(\ker(f)) = 0$, quindi a) è falsa. Poiché $(0, 1, 2)$ coincide con la seconda colonna di A segue che $(0, 1, 2) = f(0, 1) \in \operatorname{im}(f)$, dunque b) è vera.

Svolgimento del Quiz 3. Dalla teoria generale segue che a) e b) sono equivalenti, quindi devono essere false. Si noti che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (seconda, terza e quarta riga sono linearmente indipendenti), quindi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ contiene una base di $\mathbb{R}^3$. Concludiamo che c) è vera.

Svolgimento del Quiz 4. Il polinomio caratteristico di A è

$$|tI - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ -4 & t \end{vmatrix} = t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2).$$

Quindi A ha due autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile (avendo ordine 2).

Svolgimento del Quiz 5. X è chiaramente una retta. Se $t = 0$ allora $(1, 1, 2) \in X$: inoltre cancellando le costanti e ponendo $t = 1$ otteniamo come vettore parallelo $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$. Concludiamo che c) è vera.

Svolgimento del Quiz 6. Si vede facilmente che Γ ha centro $C(1, 0, 0)$ quindi a) e d) sono false. Il raggio di Γ è $r = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$. Per esclusione la risposta esatta è c).

Svolgimento del Quiz 7. Chiaramente b) è falsa. Per verificare a) e c) bisogna fare qualche conto quindi lasciamo la loro verifica alla fine (se necessaria). Risulta

$$t - 2t + t \equiv 0 \equiv 1 - t - 0 + (-1 + t).$$

Concludiamo che d) è vera.

Svolgimento dell'Esercizio 1. Si noti che $(1, 0) = (1, 1) + (0, -1)$ e $(0, 1) = -(0, -1)$ da cui segue che

$$f(1, 0) = f(1, 1) + f(0, -1) = (1, 1, -1, 0) + (2, -1, 2, 1) = (3, 0, 1, 1),$$
$$f(0, 1) = -f(0, -1) = -(2, -1, 2, 1) = (-2, 1, -2, -1).$$

In particolare
$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ricordo che se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare allora $\dim(\ker(f)) = n - \varrho(M(f))$. Nel nostro caso quindi $\ker(f) = \{0\}$: ciò implica che f è iniettiva.

Svolgimento dell'Esercizio 2. Si noti che un vettore parallelo ad r è $\vec{v}_r := \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$, mentre un vettore perpendicolare ad α è $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} + \vec{k}$. Poiché $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\alpha = 0$ segue che r ed α sono paralleli.

Commenti

Un compito di Geometria tipo è costituito da un frontespizio, da una parte di quiz e da una di esercizi. Nel frontespizio lo studente deve riportare accuratamente ed i maniera leggibile i propri dati di identificazione (nome, cognome, n° di matricola, n° del corso).

Tengo a sottolineare che è interesse dello studente che tali dati siano comprensibili al docente per due motivi principali. Un primo motivo è la corretta attribuzione del compito: un secondo è che un compito illeggibile è più facilmente soggetto ad essere sottovalutato al momento della correzione.

Nella prima pagina si trova anche una zona, chiaramente delimitata e riservata al docente, dove riportare i voti: si prega di non scrivere in questa zona.

In fondo alla prima pagina c'è una tabella in cui lo studente deve riportare le risposte ai 7 quiz che formano la prima parte del compito. Lo studente deve individuare la risposta esatta (ciascun quiz ha quattro risposte di cui una sola corretta) e contrassegnare in maniera chiara la lettera che la contraddistingue nella tabella: nel nostro caso si ha per esempio.

1	a	b	c	d	5	a	b	c	d
2	a	b	c	d	6	a	b	c	d
3	a	b	c	d	7	a	b	c	d
4	a	b	c	d					

Ricordo che ogni risposta esatta vale tre punti mentre le risposte sbagliate valgono zero punti: quindi il voto massimo ottenibile solo con i quiz è di 21 punti. In questa parte l'unica cosa di cui si tiene conto ai fini dell'assegnazione del compito sono le risposte indicate nella tabella. Non saranno considerate nè eventuali svolgimenti di quiz nè risposte non chiaramente riportate in tabella. Risposte multiple ad un quiz sono valutate come le risposte sbagliate.

Nella seconda parte, infine, vi sono esercizi per un punteggio massimo di 12 punti. Il punteggio assegnato dipende non solo dalla risposta, ma anche dall'eventuale metodo di svolgimento.

Per esempio per l'esercizio 1 la risposta

~~iniettiva~~	non iniettiva

Giustificazione

$\rho(M(f))=2$, quindi il sistema $Ax=0$ ha l'unica soluzione nulla. Pertanto $\ker(f)=\{0\}$, da cui segue che f e' iniettiva

ha il massimo punteggio.