SISTEMI LINEARI E MATRICI

Esercizi

Esercizio 1. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice del primo sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0, \end{cases}$$

da cui si ricava $y = -5/4z$ e, di conseguenza, $x = y + z = z - 5/4z = -1/4z$. In particolare l'insieme delle soluzioni del primo sistema è

$$V := \{\ (-a, -5a, 4a) \mid a \in \mathbb{R}\ \} = \mathcal{L}((-1, -5, 4)).$$

Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del secondo sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ z = 1 \\ -y - z = 2, \end{cases}$$

da cui si ricava $z = 1$ e, di conseguenza, $y = -2 - z = -3$, $x = y + z - 2 = z - 4z$. In particolare il secondo sistema ha come unica soluzione $(-4, -3, 1)$.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Esercizio 2. Discutere e risolvere, se possibile, i seguenti sistemi al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + hz = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k. \end{cases}$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice incompleta A_h del primo sistema:

$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & h+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Risulta $\varrho(A_1) = 2$ e $\varrho(A_h) = 3$ per $h \neq 1$. Quindi se $h = 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni che formano uno spazio vettoriale poiché il sistema è omogeneo, mentre se $h \neq 1$ il sistema ha come unica soluzione quella banale.

Si noti che se $h = 1$ il sistema coincide con il primo dei sistemi dell'esercizio 1, perciò il suo insieme delle soluzioni è

$$V := \{\ (-a, -5a, 4a) \mid a \in \mathbb{R}\ \} = \mathcal{L}((-1, -5, 4)).$$

Procediamo ora con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del secondo sistema. Definiamo

$$A_h := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ h & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_k := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$(A_h | B_k) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ h & -2 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ h & -2 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ h-2 & 0 & 0 & k+4 \end{pmatrix}.$$

Quindi il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ z = 1 \\ -y - z = 2. \end{cases}$$

Risulta $\varrho(A_2) = \varrho(A_2|B_{-4}) = 2$, $2 = \varrho(A_2) \neq \varrho(A_2|B_k) = 3$ per $k \neq -4$ ed infine $\varrho(A_h) \neq \varrho(A_h|B_k) = 3$ per $h \neq 2$.

Dal teorema di Rouché–Capelli ricaviamo allora le seguenti conseguenze. Se $h \neq 2$ il sistema ammette un'unica soluzione. Precisamente

$$((k+4)/(h-2), 1 + (k+4)/(h-2), 1).$$

Se $h = 2$ ma $k \neq -4$ il sistema non ammette soluzione. Infine se $h = 2$, $k = -4$ il sistema ammette un insieme di ∞^1 soluzioni della forma

$$V := \{\ (x, 1+x, 1) \mid x \in \mathbb{R}^3\ \} = (0,1,1) + \mathcal{L}((1,1,0)).$$

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, i sistemi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del primo sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Quindi, indicando con x_1, x_2, x_3 le righe di $X \in \mathbb{R}^{3,2}$, il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = (8,3) \\ -x_1 - x_3 = (3,0) \\ x_3 = (6,-4), \end{cases}$$

da cui si ricava $x_2 = (20,-5)$ e $x_1 = (-9,4)$. In particolare il primo sistema ha come unica soluzione la matrice

$$X := \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 20 & -5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Prima di tutto ci riconduciamo alla forma $AX = B$ mediante trasposizione. Il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \\ x_{1,3} & x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Procediamo ora con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del sistema cosí ottenuto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, indicando con x_1, x_2, x_3 le colonne di $X \in \mathbb{R}^{2,3}$, il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = (-4, 1) \\ x_1 + x_3 = (3, 0) \\ x_3 = (9, -2), \end{cases}$$

da cui si ricava $x_2 = (13, -3)$ e $x_1 = (-6, 2)$. In particolare il primo sistema ha come unica soluzione la matrice

$$X := \begin{pmatrix} -6 & 13 & 9 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale ed una base per lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ -x + y + 2z + t = 0 \\ 3y + 5z + 2t = 0 \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari sulle righe della matrice del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ 3y + 5z + 2t = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $y = -5z/3 - 2t/3$ e, sostituendo nella prima, $x = z/3 + t/3$. Quindi la soluzione generale è

$$V := \{(a + b, -5a - 2b, 3a, 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\ \} = \mathcal{L}((1, -5, 3, 0), (1, -2, 0, 3)).$$

Esercizio 5. Siano date le due equazioni $3x - y + z = 0$ e $x - 2y - 3z = 0$.

(1) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con la sola soluzione nulla.
(2) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con infinite soluzioni. È possibile ottenere ∞^2 soluzioni?

Svolgimento. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ ax + by + cz = d. \end{cases}$$

Le matrici incompleta e completa del sistema sono

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad (A|B) := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema di cui sopra ammette un'unica soluzione se e solo $\varrho(A) = 3$. Per esempio $a = b = 0$, $c = 1$ e d arbitrario.

Invece, affiché il sistema abbia infinite soluzioni è necessario e sufficiente che $\varrho(A|B) = \varrho(A) < 3$. Quindi basta scegliere una combinazione lineare delle due prime equazioni: per esempio la loro somma, cioè $a = 4$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 0$.

Poiché le prime due equazioni sono comunque linearmente indipendenti $\varrho(A) \geq 2$, perciò la dimensione dello spazio delle soluzioni è $3 - \varrho(A) \leq 2$: in particolare non è possibile determinare a, b, c, d in modo tale che il sistema abbia ∞^2 soluzioni.

Esercizio 6. Scrivere un sistema $AX = B$ avente come insieme delle soluzioni

$$V := (1,0,1,-1) + \mathcal{L}((0,0,0,1)).$$

Svolgimento. Poiché V non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo considerare sistemi non omogenei. Per come è definito V il corrispondente sistema omogeneo deve avere come spazio delle soluzioni $\mathcal{L}((0,0,0,1))$. Infine per il teorema di Rouché–Capelli il rango della matrice incompleta A del sistema deve essere

$$4 - \dim(\mathcal{L}((0,0,0,1))) = 3.$$

Per esempio sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ma potremmo scegliere qualsiasi altra matrice A' d'ordine $m \times 4$ e di rango 3 tale che $A'\ {}^t(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$). Sappiamo poi che $(1,0,1,-1)$ deve essere soluzione particolare, quindi deve essere

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che un sistema avente V come spazio delle soluzioni è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Quiz

Quiz 1. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -h & h & h \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\varrho(A) = 3$.
b) Per $h = 1$ il sistema $AX = 0$ ha ∞^1 soluzioni.
c) ${}^tA = A^{-1}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
d) A è invertibile per $h = 1$.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti le prime due righe di A sono linearmente indipendenti, ma

$$|A| = 4h + 5h - 10h + h,$$

dunque $\varrho(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

L'affermazione b) è vera. Infatti per quanto visto sopra, $\varrho(A) = 2$ per $h = 1$ (in effetti, per ogni $h \in \mathbb{R}$). In particolare lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$ ha dimensione $3 - \varrho(A) = 1$ per il teorema di Rouché–Capelli.

L'affermazione c) è falsa. Infatti è noto che una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo rango è massimo rispetto al suo ordine. Quindi A è invertibile se e solo se $\varrho(A) = 3$, mentre abbiamo visto sopra che $\varrho(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

L'affermazione d) è falsa. Si veda la risposta a c).

Quiz 2. Siano date

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Non esiste nessuna matrice X tale che $AX = B$.
b) Esiste una matrice X tale che $BA = X$.
c) $\varrho(A + B) = \varrho(A) + \varrho(B)$.
d) $(BA)X = 0$ non è risolubile in $\mathbb{R}^{3,n}$.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti $AX = B$ ha soluzione se e solo se $\varrho(A) = \varrho(A|B)$ per il teorema di Rouché–Capelli. D'altra parte $\varrho(A) = 2$, dunque necessariamente $\varrho(A|B) = 2$.

L'affermazione b) è vera. Infatti equivale ad affermare che si può fare il prodotto BA, il che è vero per l'ordine delle matrici. Risulta

$$X = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione c) è falsa. Infatti $\varrho(A + B) = 2$, mentre $\varrho(A) = 2$ e $\varrho(B) = 1$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti un sistema omogeneo ha sempre almeno la soluzione banale. Si noti che essendo $\varrho(BA) = 1$ (come visto sopra) esistono sempre soluzioni non banali.

Quiz 3. Si consideri il sistema $AX = 0$ ove $X \in \mathbb{R}^3$ ed

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Il sistema non è risolubile.
b) Una base del suo spazio delle soluzioni è $((2, 0, -1), (0, 2, 0))$.
c) Ha ∞^3 soluzioni.
d) Ha solo la soluzione banale.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti un sistema omogeneo ha sempre almeno la soluzione banale.

L'affermazione b) è vera. Infatti $(2, 0, -1)$ e $(0, 2, 0)$ sono linearmente indipendenti e si verifica, per sostituzione diretta, che sono anche soluzioni di $AX = 0$. D'altra parte la dimensione dello spazio delle soluzioni di $AX = 0$ è $3 - \varrho(A) = 2$ per il teorema di Rouché–Capelli.

L'affermazione c) è falsa. Infatti abbiamo visto nel corso della risposta precedente che la dimensione del suo spazio delle soluzioni è 2.

L'affermazione d) è falsa. Si proceda come nella risposta precedente.

Quiz 4. Siano

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $AX = B$ è equivalente ad $XA = B$.
b) $AX = B$ ha come soluzione un'unica terna di numeri reali.
c) $AX = B$ ha infinite soluzioni.
d) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti non è difficile risolvere il sistema $AX = B$ in quanto A è già ridotta per righe. Indicando con x_1, x_2, x_3 le righe della matrice X si deve avere

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = (0, 0, 1) \\ 2x_3 = (0, 1, 0) \\ 5x_1 = (1, 1, 1) \end{cases}$$

quindi dalla seconda e terza equazione $x_1 = (0, 0, 1/5)$ e $x_3 = (1/2, 1/2, 1/2)$: sostituendo nella prima equazione $x_2 = (-x_1 - 2x_3)/4 = (-1/4, 0, -3/10)$, cioè

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 0 & -3/10 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Se $AX = B$ fosse equivalente a $XA = B$ si dovrebbe avere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 0 & -3/10 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ma, come è facile vedere, l'elemento di indici $1, 1$ della matrice prodotto è 1.

L'affermazione b) è falsa. Infatti la soluzione di un sistema $AX = B$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,q}$ deve essere $X \in \mathbb{R}^{n,q}$. Nel nostro caso $X \in \mathbb{R}^{3,3}$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti, come si è visto nel corso della risposta ad a), il sistema $AX = B$ ha un'unica soluzione.

Per esclusione la risposta a d) è vera.

Quiz 5. Sia dato il sistema lineare $AX = B$ con B matrice non nulla. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) l'insieme delle sue soluzioni è uno spazio vettoriale.
b) Tra le sue soluzioni vi è certamente quella banale.
c) Per A e B opportune, il sistema ha ∞^2 soluzioni.
d) Tutte le affermazioni precedenti sono vere.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti se l'insieme delle soluzioni fosse uno spazio vettoriale anche la matrice nulla 0 sarebbe soluzione. Ma $A0 = 0 \neq B$ per ipotesi.

L'affermazione b) è falsa. Si proceda come nella risposta ad a).

L'affermazione c) è vera. Basta trovare un esempio: si prendano allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora il sistema $AX = B$ ha per soluzione $V := \{\ (1, y, z) \in \mathbb{R}^3\ \} = (1, 0, 0) + \mathcal{L}(e_2, e_3)$.

L'affermazione d) è falsa.

Quiz 6. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$ ed assumiamo che A sia ridotta per righe. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Se A ha due righe nulle, $AX = B$ ha ∞^2 soluzioni.
b) Se A non ha righe nulle, $AX = B$ ha soluzione.
c) Se B ha una riga nulla, $AX = B$ non ha soluzioni.
d) Il numero di incognite libere di $AX = B$ coincide con $\varrho(A) - \varrho(B)$.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti l'esistenza o meno di soluzioni dipende dall'eguaglianza o meno delle quantità $\varrho(A)$ e $\varrho(A|B)$. Quindi se A ha due righe nulle allora $\varrho(A) \leq 2$: ma potrebbe essere $\varrho(A|B) \geq 3$.

L'affermazione b) è vera. Infatti se A non ha righe nulle allora A ha rango massimo, quindi, essendo quadrata, è invertibile: in particolare $X := A^{-1}B$ è l'unica soluzione di $AX = B$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se A non ha righe nulle allora $\varrho(A) = 4$ e, come si è visto nel caso della risposta a b), $AX = B$ ammette soluzione.

L'affermazione d) è falsa. Infatti assumiamo $\varrho(A) = 4$. Abbiamo visto nella risposta a b) che, in questo caso, $AX = B$ ha un'unica soluzione qualsiasi sia il rango di B. Quindi in questo caso il numero delle incognite libere di $AX = B$ è sempre 0 che, in generale non coincide con $\varrho(A) - \varrho(B)$.