

## APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI ASSOCIATE

### ESERCIZI

**Esercizio 1.** Sia

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x + 2y + z, y + z). \end{aligned}$$

- (1) Verificare che  $f$  è lineare.
- (2) Determinare una base di  $\ker(f)$  e stabilire se  $f$  è iniettiva.
- (3) Calcolare  $w := f(2, 1, 3)$  e determinare  $f^{-1}(w)$

*Svolgimento.* Verifichiamo che  $f$  è lineare. A tale scopo siano  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Risulta

$$\begin{aligned} f(x, y, z) + f(x', y', z') &= (x + 2y + z, y + z) + (x' + 2y' + z', y' + z') = \\ &= (x + 2y + z + x' + 2y' + z', y + z + y' + z') = \\ &= ((x + x') + 2(y + y') + (z + z'), (y + y') + (z + z')) = \\ &= f(x + x', y + y', z + z'), \\ \alpha f(x, y, z) &= (\alpha(x + 2y + z), \alpha(y + z)) = \\ &= ((\alpha x) + 2(\alpha y) + (\alpha z), (\alpha y) + (\alpha z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z). \end{aligned}$$

Per determinare una base di  $\ker(f)$  conviene prima descrivere tale insieme. Affinché  $(x, y, z) \in \ker(f)$  si deve avere  $(x + 2y + z, y + z) = (0, 0)$  ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

In particolare  $\ker(f) = \{ (z, -z, z) \in \mathbb{R}^3 \}$ . Quindi una base di  $\ker(f)$  è costituita da  $((1, -1, 1))$ .  $f$  non è iniettiva poiché  $\ker(f) \neq \{0\}$ .

Si noti che anche senza fare conti è chiara la non iniettività di  $f$ . Infatti per una qualsiasi applicazione lineare  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vale  $n = \dim(\ker(g)) + \dim(\text{im}(g))$ : quindi, affinché  $g$  sia iniettiva, è necessario (ma non sufficiente) che  $n \leq m$ .

Infine sia  $w := f(v) \in \mathbb{R}^2$ . Allora ricordo che  $f^{-1}(w) = v + \ker(f)$ . Quindi se  $v = (2, 1, 3)$  si ha

$$f^{-1}(w) = \{ (2 + h, 1 - h, 3 + h) \in \mathbb{R}^3 \mid h \in \mathbb{R} \}.$$

**Esercizio 2.** Siano  $V := \mathbb{R}^4$ ,  $W := \mathbb{R}^3$ .

(1) Verificare che i vettori

$$v_1 := (1, 0, 0, 0), \quad v_2 := (1, 3, 5, 0), \quad v_3 := (3, 2, -1, 1), \quad v_4 := (1, 1, 0, 0)$$

formano una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ .

(2) Siano

$$w_1 := (1, 0, 1), \quad w_2 := (1, 1, 0), \quad w_3 := (1, 0, 0).$$

Verificare che  $\mathcal{C} := (w_1, w_2, w_3)$  è una base di  $W$ .

(3) Si dimostra che esiste un'unica applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tale che

$$\begin{aligned} f(v_1) &:= w_1 + w_3, & f(v_2) &:= -w_1 + w_2, \\ f(v_3) &:= w_3, & f(v_4) &:= 3v_1 + 2v_2 - v_3. \end{aligned}$$

Determinare  $M(f)$ .

*Svolgimento.* Per verificare che  $\mathcal{B}$  è una base procediamo calcolando il rango della matrice avente le componenti dei vettori come righe. Tale matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 4 (si noti che la matrice è ridotta per colonne).

Analogamente  $\mathcal{C}$  è una base. Infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (è ridotta per colonne).

Per calcolare  $M(f)$  si può procedere sfruttando la linearità di  $f$  e calcolando  $f(e_i)$ . Risulta

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1, & e_2 &= -v_1 + v_4, \\ e_3 &= 2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5, & e_4 &= -3v_1/5 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5, \end{aligned}$$

quindi si ottiene

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(v_1) = w_1 + w_3 = (2, 0, 1), \\ f(e_2) &= f(-v_1 + v_4) = 2w_1 + 2w_2 - 2w_3 = (2, 2, 2), \\ f(e_3) &= f(2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5) = -8w_1/5 - w_2 + w_3 = (-8/5, -1, -8/5), \\ f(e_4) &= f(-3/5v_1 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5) = \\ &= -43w_1/5 - 5w_2 + 3w_3 = (-53/5, -5, -43/5). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (2, 0, 1), & f(e_2) &= (2, 2, 2), \\ f(e_3) &= (-8/5, -1, -8/5), & f(e_4) &= (-21/5, -17/5, 5). \end{aligned}$$

Concludiamo allora che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8/5 & -21/5 \\ 0 & 2 & -1 & -17/5 \\ 1 & 2 & -8/5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.** Siano

$$\begin{aligned} u &:= (0, 2, 0, 1), & v &:= (2, 0, 0, 0) \\ V &:= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = x + t = 0 \}. \end{aligned}$$

Esiste unico  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  tale che  $f(u) = u - v$ ,  $f(v) = u + v$ ,  $V \subseteq \ker(f)$ . Determinare  $M(f)$ .

*Svolgimento.* Per calcolare  $M(f)$  è necessario determinare  $f(e_i)$ . A tale scopo si può costruire una base  $\mathcal{C}$  con i dati noti, determinare le immagini dei suoi vettori e, come nell'esercizio precedente, ottenere da queste informazioni le immagini dei vettori  $f(e_i)$ .

Si noti che i vettori  $v_1 := u$  e  $v_2 := v$  sono linearmente indipendenti. Una base di  $\ker(f)$  è data dai vettori le cui componenti sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + t = 0. \end{cases}$$

Quindi  $V = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, -1))$ . Consideriamo i vettori  $v_3 := (0, 1, 1, 0)$  e  $v_4 := (1, 0, 0, -1)$  e verifichiamo che  $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$  è base di  $\mathbb{R}^4$ . A tale scopo calcoliamo

$$\varrho \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando sulle righe

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che è ridotta per colonne ed ha rango 4, dunque  $\mathcal{C}$  è base. Risulta  $e_1 = v_2/2$ ,  $e_2 = v_1/2 - v_2/4 + v_4/2$ ,  $e_3 = -v_1/2 + v_2/4 + v_3 - v_4/2$ ,  $e_4 = v_2/2 - v_4$ .

Risulta

$$f(v_1) = (-2, 2, 0, 1), \quad f(v_2) = (2, 2, 0, 1), \quad f(v_3) = f(v_4) = (0, 0, 0, 0),$$

quindi

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 1, 0, 1/2), & f(e_2) &= (-3/2, 1/2, 0, 1/4), \\ f(e_3) &= (3/2, -1/2, 0, -1/4), & f(e_4) &= (1, 1, 0, 1/2), \end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  definito da

$$f(x, y, z, t) := (-x + z, -y + t, x - z, y - t).$$

Determinare la dimensione ed una base di  $\ker(f)$  e di  $\text{im}(f)$ .

*Svolgimento.* Affinché  $v = (a, b, c, d) \in \ker(f)$  si deve avere

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\ker(f) = \{ (a, b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)).$$

Si verifica facilmente che  $v_1 := (1, 0, 1, 0), v_2 := (0, 1, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  è una base di  $\ker(f)$  e, dunque,  $\dim(\ker(f)) = 2$ .

Poiché  $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ , segue che  $\dim(\text{im}(f)) = 2$ . Ricordo che  $\text{im}(f) = \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ , pertanto, per determinare una base  $\mathcal{C}$  di  $\text{im}(f)$ , è sufficiente individuare due vettori linearmente indipendenti fra  $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ . Per esempio  $v_3 := f(e_1) = (-1, 0, 1, 0)$  e  $v_4 := f(e_2) := (0, -1, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti, quindi possiamo scegliere  $\mathcal{C} := (v_3, v_4)$ .

**Esercizio 5.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  definito da

$$f(a, b, c) := (a - hc, b - hb, c - ha).$$

Determinare una base di  $\ker(f)$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .

*Svolgimento.* Risulta  $(a, b, c) \in \ker(f)$  se e solo se  $(a, b, c)$  è soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ -h & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo con operazioni elementari di riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ -h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + hR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h^2 \end{pmatrix}$$

si osserva che se  $h \neq \pm 1$  l'unica soluzione è quella banale, perciò  $\ker(f) = \{0\}$  in questo caso.

Se, invece,  $h = 1$  il sistema si riduce alla sola equazione  $a - c = 0$ . In particolare

$$\ker(f) = \{ (a, b, a) \}$$

ed una base di  $\ker(f)$  è  $\mathcal{C} := ((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ .

Infine, se  $h = -1$  il sistema si riduce a

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2b = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\ker(f) = \{ (a, 0, -a) \}$$

ed una base di  $\ker(f)$  è in tal caso  $\mathcal{D} := ((1, 0, -1))$ .

**Esercizio 6.** Siano

$$v_1 := (0, 0, 2, -1), \quad v_2 := (-1, 1, 2, 1), \quad v_3 := (0, 1, 0, 2), \quad v_4 := (0, 0, 0, 1).$$

- (1) Verificare che  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  è base di  $\mathbb{R}^4$ .
- (2) Esiste unico  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  tale che

$$f(v_1) = f(v_2) = v_1 - v_3, \quad f(v_3) = v_1, f(v_4) = 0.$$

Calcolare  $M(f)$ .

- (3) Trovare basi di  $\ker(f)$  e di  $\text{im}(f)$ .

*Svolgimento.* Per verificare che  $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$  è base di  $\mathbb{R}^4$  è sufficiente dimostrare che i quattro vettori  $v_1, v_2, v_3, v_4$  sono linearmente indipendenti. A tale scopo basta verificare che

$$\varrho \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

il che è chiaro in quanto la matrice è ridotta per righe.

Risulta che

$$e_1 = -v_1 + v_2 - v_3, \quad e_2 = v_3 - 2v_4, \quad e_3 = v_1/2 + v_4/2, \quad e_4 = v_4,$$

perciò

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(-v_1 + v_2 - v_3) = f(v_3) = v_1 = (0, 0, 2, -1), \\ f(e_2) &= f(v_3 - 2v_4) = f(v_3) = v_1 = (0, 0, 2, -1), \\ f(e_3) &= f(v_1/2 + v_4/2) = f(v_1)/2 = v_1/2 - v_3/2 = (0, -1/2, 1, -3/2), \\ f(e_4) &= f(v_4) = 0. \end{aligned}$$

sicché

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} M(f) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \\ & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2/4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

risulta  $\rho(M(f)) = 2$ , quindi  $\dim(\ker(f)) = 2$ . Per determinare una base di  $\ker(f)$  basta allora trovare vettori  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$  linearmente indipendenti e tali che  $f(w) = 0$ . Poiché  $f(v_1) = f(v_2)$  ed  $f(v_4) = 0$  segue che basta scegliere  $w_1 := v_1 - v_2 = (1, -1, 0, -2)$ ,  $w_2 := v_4 = (0, 0, 0, 1)$ . Concludiamo che  $\mathcal{B} := ((1, -1, 0, -2), (0, 0, 0, 1))$  è base di  $\ker(f)$ .

Infine per trovare una base di  $\text{im}(f)$  è sufficiente estrarre una base dall'insieme  $\{(0, 0, 2, -1), (0, 0, 2, -1), (0, -1/2, 1, -3/2), (0, 0, 0, 0)\}$ . Quindi una base di  $\text{im}(f)$  è, per esempio,  $\mathcal{C} := ((0, 0, 2, -1), (0, -1/2, 1, -3/2))$ .

### QUIZ

**Quiz 1.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$M(f) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Esiste un isomorfismo  $g \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$M(g \circ f) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Esiste un isomorfismo  $g \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$M(g \circ f) := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Esiste un isomorfismo  $g \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$M(g \circ f \circ g^{-1}) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Esiste un isomorfismo  $g \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che  $M(g \circ f)$  sia la matrice nulla.

*Svolgimento.* Ricordo che se  $M$  è la matrice associata ad un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $r = \varrho(M)$  allora  $r = \dim(\text{im}(f))$  e  $n - r = \dim(\text{ker}(f))$ .

Essendo  $M(g \circ f) = M(g)M(f)$  e poiché  $g$  è un isomorfismo (dunque  $M(g)$  è invertibile), segue allora che  $\varrho(M(g \circ f)) = \varrho(M(f))$ .

L'affermazione a) è falsa. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché allora

$$\varrho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 2 = \varrho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Segue che le due matrici non possono rappresentare lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

L'affermazione b) è vera. Sia  $g$  tale che

$$M(g) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora si verifica direttamente che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione c) è falsa. Infatti

$$\begin{aligned}\det(M(g \circ f \circ g^{-1})) &= \det(M(g)) \det(M(f)) \det(M(g^{-1})) = \\ &= \det(M(g)) \det(M(f)) \det(M(g))^{-1} = \det(M(f)).\end{aligned}$$

Si conclude allora osservando che  $\det(M(f)) = 4$ ,  $\det(\det(M(g \circ f \circ g^{-1}))) = 1$ . Si noti che in questo caso non si può procedere come nel caso a) perchè le matrici hanno entrambe rango 3.

L'affermazione d) è falsa. Infatti basta procedere come nel caso a) osservando che il rango della matrice nulla è 0.

**Quiz 2.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che  $(1, 0, 0) \in \ker(f) \cap \text{im}(f)$  ed  $f(0, 1, 0) \notin \ker(f)$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $\text{im}(f) = \mathcal{L}(f(0, 1, 0))$ .
- b)  $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 0, 0))$ .
- c)  $f(1, 1, 0) \in \ker(f)$ .
- d)  $f(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$ .

*Svolgimento.* Osserviamo che  $\dim(\ker(f)), \dim(\text{im}(f)) \geq 1$ , in quanto  $(1, 0, 0) \in \ker(f) \cap \text{im}(f)$ . Inoltre per definizione  $f(0, 1, 0) \in \text{im}(f)$ . Si noti che  $f(0, 1, 0) \notin \mathcal{L}((1, 0, 0))$ : infatti se così fosse  $f(0, 1, 0) \in \mathcal{L}((1, 0, 0) \subseteq \ker(f)$ , cioè  $f(0, 1, 0) \in \ker(f)$ . Segue che  $\dim(\mathcal{L}((1, 0, 0), f(0, 1, 0))) = 2$  da cui  $\dim(\text{im}(f)) \geq 2$ . Poiché  $\dim(\ker(f)) \geq 1$  e  $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ , otteniamo  $\dim(\text{im}(f)) = 2$ ,  $\dim(\ker(f)) = 1$ .

L'affermazione a) è falsa. Infatti  $\dim(\text{im}(f)) = 2$  dunque  $\text{im}(f)$  è generato da non meno di due vettori.

L'affermazione b) è vera. Infatti  $\dim(\ker(f)) = 1$ , dunque  $\ker(f)$  è generato da ogni vettore non nullo che gli appartiene.

L'affermazione c) è falsa. Infatti  $(1, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0)$ , dunque

$$f(1, 1, 0) = f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) = f(0, 1, 0) \neq 0.$$

L'affermazione d) è falsa. Infatti  $f(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$  se e solo se  $(1, 1, 0) \in \ker(f)$  che come visto sopra è falsa.

**Quiz 3.** Esiste un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  suriettiva e tale che

$$\ker(f) = V := \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0 \}?$$

- a) No, perché  $\dim(V) = 2$ .
- b) No, perché  $\dim(V) = 3$ .
- c) Sì, perché  $\dim(V) = 2$ .
- d) No, perché  $V$  non è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ .



*Svolgimento.* Osserviamo che  $V$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  di dimensione  $\dim(V) = 2$ : infatti ha come base  $((-2, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ . Ricordo che  $4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ .

L'affermazione a) è vera. Infatti essendo  $\dim(\ker(f)) = \dim(V) = 2$  segue  $\dim(\text{im}(f)) = 2 < 3 + \dim(\mathbb{R}^3)$ .

L'affermazione b) è falsa. Infatti  $\dim(V) = 2$  e non 3.

L'affermazione c) è falsa. Infatti il fatto che  $\dim(V) = 2$  implica che  $f$  non può essere suriettiva.

L'affermazione d) è falsa. Infatti  $V$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ .

**Quiz 4.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  tale che  $f^{-1}(1, 2) = (k + 1, 3 - k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $(1, 3) \in \ker(f)$ .
- b)  $\text{im}(f) = \mathcal{L}((1, 3))$ .
- c)  $f$  è un isomorfismo.
- d)  $(1, -1) \in \ker(f)$ .

*Svolgimento.* Ricordo che  $2 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ .

L'affermazione a) è falsa. Infatti se fosse  $(1, 3) \in \ker(f)$  si avrebbe  $f(1, 3) = (0, 0)$ . D'altra parte  $(1, 3) \in f^{-1}(1, 2)$  (si prenda  $k = 0$ ), dunque  $f(1, 3) = (1, 2)$ .

L'affermazione b) è falsa. Infatti  $(1, 3), (2, 2) \in f^{-1}(1, 2)$  (si prenda  $k = 0, 1$  rispettivamente), dunque  $(0, 0) = (1, 2) - (1, 2) = f(2, 2) - f(1, 3) = f((2, 2) - (1, 3)) = f(1, -1)$ . Perciò  $\ker(f) \neq \{0\}$ , sicché  $\dim(\text{im}(f)) \leq 1$ . Poiché  $(1, 2) \in \text{im}(f)$  si ha  $\text{im}(f) = \mathcal{L}((1, 2))$  e si vede che  $(1, 3) \notin \mathcal{L}((1, 2))$ .

L'affermazione c) è falsa. Infatti se  $f$  fosse un isomorfismo sarebbe iniettiva, dunque dovrebbe essere  $f(2, 2) \neq f(1, 3)$ , mentre, invece,  $f(2, 2) = f(1, 3) = (1, 2)$ .

L'affermazione d) è vera. Infatti si è osservato sopra che  $\mathcal{L}((1, -1)) \subseteq \ker(f)$  e che  $\dim(\text{im}(f)) = 1$ , quindi  $\dim(\ker(f)) = 1$  e, perciò, deve valere l'eguaglianza.

**Quiz 5.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$f(1, 1, 1) = f(0, 1, 2) = f(h, 2, 3) = (0, 0, 0).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $f$  è l'endomorfismo nullo per ogni  $h \in \mathbb{R}$ .
- b)  $f$  è univocamente determinato.
- c) Se  $h \neq 1$  esistono infiniti endomorfismi che soddisfano le condizioni di cui sopra.
- d) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

*Svolgimento.* Si ponga

$$a := (1, 1, 1), \quad b := (0, 1, 2), \quad c_h := (h, 2, 3).$$

Notiamo che  $c_1 = a + b$ . Invece, se  $h \neq 1$ , i vettori  $a, b, c_h$  sono linearmente indipendenti, quindi  $(a, b, c_h)$  è una base di  $V$  in questi caso.

L'affermazione a) è falsa. Infatti  $a+b = c_1$ .  $\mathcal{C} := (a, b, e_3)$  è base di  $\mathbb{R}^3$ : allora si può dimostrare che esiste ed è unico un endomorfismo  $f$  tale che  $f(a) = f(b) = 0$  (e, dunque,  $f(c_1) = f(a+b) = 0$ ) ed  $f(e_3) \neq 0$ . Allora  $f$  soddisfa le condizioni ma non è identicamente nullo.

L'affermazione b) è falsa. Infatti non è verificata, come mostrato sopra, nel caso  $h = 1$  (e solo in questo), in quanto  $f$  è univocamente individuato dall'immagine di  $e_3$  che può essere scelta arbitrariamente.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se  $h \neq 1$   $(a, b, c_h)$  è una base di  $V$ , dunque  $f$  è univocamente individuata dalla sua azione su  $a, b, c_h$  (ed è l'endomorfismo nullo).

Per esclusione l'affermazione d) è vera.

**Quiz 6.** Si consideri

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y - z, -x - y + z).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $\ker(f)$  contiene il solo vettore nullo.
- b)  $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$ .
- c)  $\ker(f)$  ha come base  $((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$ .
- d)  $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 2, 3))$ .

*Svolgimento.* L'affermazione a) è falsa. Infatti  $\dim(\text{im}(f)) \leq 2$ : d'altra parte  $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ , quindi  $\dim(\ker(f)) \geq 1$ .

L'affermazione b) è vera. Infatti si verifica per sostituzione nella formula di  $f$  che  $\mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)) \subseteq \ker(f)$ . Si noti che  $(1, 0, 1)$  e  $(1, 1, 2)$  sono linearmente indipendenti e che  $(1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (0, 1, 1)$ , quindi  $\dim(\ker(f)) \geq \dim(\mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))) = 2$ . D'altra parte  $f(1, 0, 0) = (1, -1)$ , dunque  $\dim(\text{im}(f)) \geq 1$ . Poiché  $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$  si ha  $\dim(\ker(f)) = 2$  da cui segue  $\mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)) = \ker(f)$  in quanto l'uno sottospazio dell'altro e di eguale dimensione.

L'affermazione c) è falsa. Infatti  $(1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (0, 1, 1)$  quindi i vettori  $(1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)$  non sono linearmente indipendenti e, pertanto, non possono formare una base.

L'affermazione d) è falsa. Infatti  $(1, 0, 1) \in \ker(f) \setminus \mathcal{L}((1, 2, 3))$ .