AUTOVETTORI, AUTOVALORI, AUTOSPAZI

Esercizi

Esercizio 1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori di f e le relative molteplicità.
(2) Determinare gli autospazi di f e trovare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.
(3) Calcolare una matrice P invertibile tale che $P^{-1}M(f)P$ sia diagonale.

Svolgimento. Per calcolare gli autovalori di f dobbiamo calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f

$$p_f(t) := \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t-2 & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2.$$

Dunque gli autovalori sono $t_1 = 1$ con molteplicità $m_a(1) = 1$ e $t_2 = t_3 = 2$ con $m_a(2) = 2$. Si noti che a tale risultato si poteva anche giungere senza il calcolo del polinomio caratteristico in quanto la matrice $M(f)$ è triangolare (inferiore): dunque gli autovalori sono esattamente gli elementi diagonali e la loro molteplicità è quella con cui compaiono sulla diagonale.

Per determinare gli autospazi dobbiamo in generale risolvere i sistemi $(t_iI - M(f))\ {}^t(x,y,z) = 0$, $i = 1,2,3$, ove I è la matrice identità 3×3. Nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $V_1 := \mathcal{L}((1,1,1))$. Il secondo sistema è equivalente a

$$x = 0,$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX che ha soluzione $V_2 := \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1))$.

Concludiamo, perciò, che una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori è $\mathcal{B} := ((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$.

Ricordo, infine, che fissata una base composta da autovettori una matrice P invertibile tale che $P^{-1}M(f)P$ sia diagonale ha per colonne i vettori della base di autovettori.

Quindi possiamo scegliere

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Verificare che

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e calcolare tutte le matrici diagonali simili ad A, precisando, per ciascuna di esse, una matrice P che diagonalizza.

Svolgimento. Per verificare che A è diagonalizzabile è sufficiente calcolare gli autovalori di A ed i relativi autospazi. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = (t-2)(t+2)^2,$$

da cui si ricava che gli autovalori sono $t_1 = 2$, $m_a(2) = 1$, e $t_2 = t_3 = -2$, $m_a(-2) = 2$ (si poteva procedere anche in maniera alternativa osservano che A è triangolare).

Per calcolare gli autospazi risolviamo i sistemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo sistema equivale a

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

sicché $V_2 = \mathcal{L}((1,0,0))$. Il secondo sistema è equivalente a

$$-4x + y + z = 0$$

sicché $V_{-2} = \mathcal{L}((1,4,0),(1,0,4))$. In particolare $\mathcal{B} := ((1,0,0),(1,4,0),(1,0,4))$ è base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A, perciò A è diagonalizzabile.

Rispetto a $\mathcal{B}$ la matrice diagonale simile ad A e una matrice P che diagonalizza sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ogni matrice diagonale simile ad A ha sulla diagonale gli autovalori di A. Per questo motivo possiamo elencare tutte le matrici diagonli simili ad A indicando, a fianco di ciascuna di esse, una matrice che diagonalizza oltre a quelle indicate sopra:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 := (0, 1, -1), \quad v_2 := (2, 0, 1), \quad v_3 := (1, 2, 0).$$

(1) Verificare che esiste un unico $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ avente v_1, v_2, v_3 come autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori $0, 3, 6$. f è semplice?
(2) Determinare $M(f)$, $\ker(f)$ ed $\mathrm{im}(f)$.

Svolgimento. In sostanza si richiede che

$$f(v_1) = 0, \quad f(v_2) = 3v_2, \quad f(v_3) = 6v_3.$$

Si noti che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti: infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e, quindi, è possibile dimostrare l'esistenza e l'unicità di un tale f.

Per definizione f è semplice perché esiste una base di $\mathbb{R}^3$, precisamente $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$, costituita da autovettori di f. Se

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora risulta

$$P^{-1}M(f)P = D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

segue che

$$M(f) = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare $\mathrm{im}(f) = \mathcal{L}((2,-4,2),(2,8,-1))$. Segue che $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$, pertanto $\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{im}(f)) = 1$: poiché $v_1 \in \ker(f)$ concludiamo che $\ker(f) = \mathcal{L}((0,1,-1))$. Per determinare $\ker(f)$ si può altresì procedere risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ associato alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che f è semplice e determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di f.
(2) Verificare che f è un isomorfismo e determinare f^{-1}. Determinare autovalori ed autospazi di f^{-1}.

Svolgimento. Procediamo come negli esercizi 1 e 2.

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t+2).$$

Poiché abbiamo tre radici reali con molteplicità 1 segue che f è semplice (ed A è diagonalizzabile). Per determinare la basa $\mathcal{B}$ dobbiamo andare a risolvere i sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene allora $V_1 = \mathcal{L}((0,1,0))$, $V_2 = \mathcal{L}((1,0,1))$, $V_{-2} = \mathcal{L}((1,0,-1))$, dunque $\mathcal{B} := ((0,1,0),(1,0,1),(1,0,-1))$.

È noto in generale che se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare allora f è isomorfismo se e solo $\varrho(M(f)) = n = m$. Nel nostro caso si vede facilmente che $\varrho(A) = 3$.

Inoltre è noto in generale che $M(f)^{-1} = M(f^{-1})$. Quindi nel nostro caso f^{-1} è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$B := A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di f^{-1} sono $t_1 := 1$, $t_2 := 1/2$, $t_3 := -1/2$. Gli autospazi relativi sono $V_1 := \mathcal{L}((0,1,0))$, $V_{1/2} := \mathcal{L}((1,0,1))$, $V_{-1/2} = \mathcal{L}((1,0,-1))$, cioè gli stessi di f. Infatti $f(v) = \lambda v$ se e solo se $v = f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$ cioè se e solo se $f^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$.

Esercizio 5. Determinare $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ avente autovalori $0, 2$ e tale che $f(1,0) = (2,4)$.

Svolgimento. f ha due autovettori linearmente indipendenti, diciamo v_1 con autovalore 0 e v_2 con autovalore 2. Inoltre esistono costanti univocamente determinate $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha v_1 + \beta v_2 = (1,0)$. Sia $w_1 := \alpha v_1 = (a,b)$ e $w_2 := \beta v_2 = (c,d)$. Allora

$$(2,4) = f(1,0) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha v_1) + f(\beta v_2) = 0 + 2\beta v_2 = 2w_2,$$

dunque, eguagliando le componenti,si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ 2c = 2 \\ 2d = 4 \end{cases}$$

da cui si ricava $w_1 = (0,-2)$, $w_2 = (1,2)$. Calcoliamo $M(f)$: si ha $e_1 := (1,0)$, sicché $f(e_1) = (2,4)$, mentre $e_2 = -w_1/2$, sicché $f(e_2) = (0,0)$, da cui

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Trovare $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ avente $(2,2)$ ed $(-1,3)$ come autovettori e tale che $f(0,1) = (2,1)$.

Svolgimento. Si ha che $(2,2) + 2(-1,3) = 8(0,1)$. Dunque, indicati con α e con β gli autovalori relativi agli autovettori $(2,2)$ ed $(-1,3)$ rispettivamente, possiamo scrivere

$$(16,8) = 8f(0,1) = f((2,2) + 2(-1,3)) = \alpha(2,2) + 2\beta(-1,3).$$

Ciò equivale al sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 16 \\ 2\alpha + 6\beta = 8, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(\alpha, \beta) = (7, -1)$.

Calcoliamo $M(f)$: si ha $e_1 := 3/4(1,1) - 1/4(-1,3)$ sicché $f(e_1) = (5,6)$, mentre $e_2 = 1/4(1,1) + 1/4(-1,3)$, sicché $f(e_2) = (2,1)$, da cui

$$M(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quiz

Quiz 1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ avente $(1,2)$ ed $(1,3)$ come autovettori e tale che $f(1,0) = (4,6)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) f non è semplice.
b) f ha autovalori $1, 2$.
c) $p(t) = t^2 + 3t + 2$ è il polinomio caratteristico di f.
d) $f(1,0) = (-1,-1)$.

Svolgimento. Iniziamo a studiare f. Innanzi tutto $(1,0) = 3(1,2) - 2(1,3)$: indicando con α l'autovalore relativo ad $(1,2)$ e con β quello relativo a $(1,3)$ si ha $(4,6) = f(1,0) = f(3(1,2) - 2(1,3)) = 3\alpha(1,2) - 2\beta(1,3)$. In componenti questo significa

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 4 \\ \alpha - \beta = 1. \end{cases}$$

Tale sistema ha unica soluzione $(\alpha, \beta) = (2,1)$, quindi $p_f(t) = (t-1)(t-2)$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti f ha due autovettori linearmente indipendenti, quindi esiste una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di f.

L'affermazione b) è vera per quanto ossevato preliminarmente.

L'affermazione c) è falsa. Infatti 1 e 2 non sono radici di $t^2 + 3t + 2$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti $f(1,0) = (4,6)$ per ipotesi.

Quiz 2. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ semplice avente gli autovalori $0, 5$ entrambi con molteplicità 2. Posto $A := M(f)$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Le colonne di A non sono autovettori associati ad f.
b) $A^3 = 25A^2$.
c) A ha almeno una colonna nulla.
d) f è suriettiva.

Svolgimento. Sia P invertibile e tale che

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Poiché $A = PDP^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned} A^n = (PDP^{-1})^n &= \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}^{\text{n volte}} = \\ &= PD^nP^{-1} = 5^{n-1}PDP^{-1} = 5^{n-1}A. \end{aligned}$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti l'i–esima colonna di A è $A_i := A^te_i$. Risulta

$$f(A_i) = AA_i = A(A\ {}^te_i) = A^2\ {}^te_i = 5A\ {}^te_i = 5f(A_i).$$

Da quanto osservato preliminarmente segue che l'affermazione b) è vera.

L'affermazione c) è falsa. Infatti, per esempio, sia

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

A è diagonalizzabile ed i suoi autovalori sono 0 e 5 entrambi con molteplicità 2, Ma A non ha nessuna colonna nulla.

L'affermazione d) è falsa. Risulta $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = 4$. D'altra parte l'autospazio di 0, V_0, coincide per definizione con $\ker(f)$, sicché $\dim(\ker(f)) = 2$, sicché $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2 < 4$.

Quiz 3. Sia $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ avente gli autovalori $-7, 8, 9$ e sia $g := f^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) g è un endomorfismo semplice.
b) g ha l'autovalore -7.
c) g ha l'autovalore nullo.
d) g non è iniettivo.

Svolgimento. Osserviamo che se $V_{-7} := \mathcal{L}(v_1)$, $V_8 := \mathcal{L}(v_2)$, $V_9 := \mathcal{L}(v_3)$ sono gli autospazi di f allora $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$) e $g(v_1) = f(f(v_1)) = 49v_1$, $g(v_2) = f(f(v_2)) = 64v_2$, $g(v_3) = f(f(v_3)) = 81v_3$.

L'affermazione a) è vera. Infatti, per quanto osservato sopra, g ha tre autovalori distinti a due a due, quindi è semplice.

L'affermazione b) è falsa. Infatti gli autovalori di g sono esattamente $49, 64, 81$.

L'affermazione c) è falsa. Si veda quanto detto per b).

L'affermazione d) è falsa. Infatti sia $v \in \ker(f)$. Allora esiste una relazione $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$. Ma allora

$$\begin{aligned} 0 = g(v) &= g(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = \\ &= a_1g(v_1) + a_2g(v_2) + a_3g(v_3) = 49a_1v_1 + 64a_2v_2 + 81a_3v_3, \end{aligned}$$

che è una relazione di dipendenza lineare fra gli elementi di $\mathcal{B}$: poiché $\mathcal{B}$ è una base questo è possibile solo se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, cioè solo se $v = 0$.

Quiz 4. Dato

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to (x + y, y + z, z + x), \end{aligned}$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $(1, 0, 0)$ è un autovettore di f.
b) $(1, 1, 0)$ è un autovettore di f.
c) 2 è un autovalore di f.
d) 0 è un autovalore di f.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla definizione di f segue che $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \notin \mathcal{L}((1, 0, 0))$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti dalla definizione di f segue che $f(1, 1, 0) = (2, 1, 1) \notin \mathcal{L}((1, 0, 0))$.

L'affermazione c) è vera. Infatti dalla definizione di f segue che la sua matrice è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sicché

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t - 1)^3 - 1.$$

Segue che $p_f(2) = 1 - 1 = 0$

L'affermazione d) è falsa. Infatti nel caso precedente si osserva che $p_f(0) = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Quiz 5. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ e si supponga che f abbia autovalori 1 e -1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Se v è autovettore non nullo associato a 1 allora $-v$ è autovettore associato a -1.
b) $f^n = id$ per ogni $n \geq 2$.
c) f è invertibile ed $f^{-1} = f$.
d) f non è invertibile.

Svolgimento. Indichiamo con $V_1 := \mathcal{L}((a, b))$ e con $V_{-1} := \mathcal{L}((c, d))$ gli autospazi di 1 a di -1 rispettivamente. Ricordo che $\mathcal{B} := ((a, b), (c, d))$ è una base di $\mathbb{R}^2$, dunque

$$P := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

è invertibile e si ha

$$P^{-1}M(f)P = D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti V_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, pertanto $-v \in V_1$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti

$$M(f^n) = M(f)^n = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}^{\text{n volte}} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1}.$$

Se $n \geq 2$ è dispari chiaramente

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(id).$$

L'affermazione c) è vera. Infatti

$$M(f) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

e risulta

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{-1} =$$
$$= (P^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = M(f).$$

L'affermazione d) è falsa. Si veda il caso c).

Quiz 6. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) f ha sempre autovalori.
b) Se f ha un autovalore allora ne ha due distinti.
c) Se f ha un autovalore allora è semplice.
d) nessuna delle risposte precedenti è vera.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti si consideri, ad esempio, l'endomorfismo avente matrice

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp \sin\alpha \\ \pm \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ove $\alpha \neq k\pi$. Allora $p_{A_\alpha}(t) = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$, il cui discriminante è $\cos^2\alpha - 1 < 0$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti si consideri l'endomorfismo avente matrice

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Allora $p_{B_\lambda}(t) = (t-\lambda)^2$ e, quindi, l'endomorfismo ha il solo autovalore λ.

L'affermazione c) è falsa. Infatti si consideri ancora un endomorfismo avente matrice B_λ. Allora $V_\lambda = \mathcal{L}((1,0))$ che ha dimensione 1. Quindi f non è semplice.

Per esclusione l'affermazione d) è vera.