GEOMETRIA ANALITICA

Esercizi

Esercizio 1. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino la retta r_h ed il piano α rispettivamente di equazioni

$$r_h: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = ht, \end{cases} \qquad \alpha: \ x+y+z+1=0,$$

ove $h \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di h per cui

(1) r_h e α sono incidenti ed, in tal caso, determinare l'angolo ϑ_h da essi formato;
(2) r_h e α sono paralleli ed, in tal caso, determinare la distanza $\operatorname{dist}(r_h, \alpha)$ fra di loro.

Svolgimento. La retta r_h passa per il punto $P(1,1,0)$ ed è parallela al vettore $\vec{v}_{r_h} := \vec{\imath} - \vec{\jmath} + h\vec{k}$. Invece α è il piano passante per $(0,0,-1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Allora r_h e α sono paralleli se e solo se $\vec{v}_{r_h} \perp \vec{v}_\alpha$, cioè se e solo se

$$h = 1 - 1 + h = \vec{v}_{r_h} \cdot \vec{v}_\alpha = 0,$$

cioè se e solo se $h=0$. Per ogni altro valore di h r_h e α risultano essere incidenti.

Calcoliamo $\operatorname{dist}(r_0, \alpha)$. A tale scopo è sufficiente calcolare $\operatorname{dist}(Q, \alpha)$ per un qualsiasi punto $Q \in r_0$, per esempio $Q := P$. Si ha

$$\operatorname{dist}(r_0, \alpha) = \frac{|1+1+0+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$$

In generale l'angolo formato da r_h e α è esattamente $\pi/2 - \widehat{\vec{v}_{r_h}\vec{v}_\alpha}$. Si ha

$$\cos \widehat{\vec{v}_{r_h}\vec{v}_\alpha} = \frac{\vec{v}_{r_h} \cdot \vec{v}_\alpha}{|\vec{v}_{r_h}||\vec{v}_\alpha|} = \frac{h}{\sqrt{3(2+h^2)}}.$$

In particolare

$$\vartheta_h = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{h}{\sqrt{3(2+h^2)}} = \arcsin \frac{h}{\sqrt{3(2+h^2)}}.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Esercizio 2. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino le rette r ed s rispettivamente di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

(1) Verificare che r ed s sono sghembe.
(2) Calcolare l'angolo ϑ che esse formano.
(3) Calcolare la distanza $\operatorname{dist}(r, s)$ fra di loro.
(4) Determinare la retta di minima distanza.

Svolgimento. Iniziamo ad osservare che r ed s sono rispettivamente parallele ai vettori $\vec{v}_r := \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{v}_s := \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Quindi r ed s non possono essere parallele. Concludiamo che r ed s sono o sghembe o incidenti in un unico punto: sono sghembe se e solo se $r \cap s = \emptyset$. Per verificare ciò osserviamo che le equazioni cartesiane di r sono

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Dunque gli eventuali punti di intersezione di r ed s corrispondono ai valori di t che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} t + (2 + t) = 0 \\ t - (1 + 2t) = 1, \end{cases}$$

ottenuto sostituendo nel sistema precedente, al posto delle variabili, le coordinate del punto generico di s. Si verifica facilmente che tale sistema non ammette soluzioni, dunque r ed s sono sghembe.

Ricordo che l'angolo fra due rette è, per definizione, l'angolo formato da due qualsiasi vettori ad esse paralleli ed applicati in O. Quindi otteniamo che

$$\vartheta = \arccos \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Per rispondere al quesito (3) osserviamo preliminarmente che $R \in r$ e $S \in s$ sono tali che $\operatorname{dist}(R, S) = \operatorname{dist}(r, s)$ se e solo se la retta t passante per R ed S è simultaneamente perpendicolare ad r ed s: tale retta t è anche la retta di minima distanza.

Possiamo allora procedere in due modi differenti. Un primo metodo è quello di prendere punti arbitrari $P \in r$ e $Q \in s$ e considerare la proiezione del segmento $\overline{PQ}$ su t. Poiché la retta t è parallela al vettore

$$\vec{v}_t := \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k},$$

risulta

$$\operatorname{dist}(r, s) = \left| (P - Q) \cdot \frac{\vec{v}_t}{|\vec{v}_t|} \right|.$$

Scelti $P(0,-1,0)$, $Q(0,1,2)$ si ottiene $\mathrm{dist}(r,s)=2/\sqrt{14}$.

Un secondo modo, che ci permette anche di risponder al quesito 4), è quello di prendere punti generici $P_t \in r$ e $Q_{t'} \in s$ ed imporre che $P_t - Q_{t'}$ sia perpendicolare sia a r che ad s. Poiché $P_t(1+t,t,-1-t)$, $Q_{t'}(t',1+2t',2+t')$ si ha

$$P_t - Q_{t'} = (1+t-t')\vec{\imath} + (t-1-2t')\vec{\jmath} + (-3-t-t')\vec{k}.$$

Segue il sistema

$$\begin{cases} (P_t - Q_{t'})\cdot \vec{v}_r = 3t-2t'+3=0 \\ (P_t - Q_{t'})\cdot \vec{v}_s = 2t-6t'-4=0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $(t,t')=(-13/7,-9/7)$. In particolare i punti che realizzano la minima distanza sono

$$R := P_{-13/7}(-6/7,-13/7,6/7), \quad S := Q_{-9/7}(-9/7,-11/7,5/7).$$

Riotteniamo allora

$$\mathrm{dist}(r,s)=\mathrm{dist}(R,S)=\sqrt{(-3/7)^2+(2/7)^2+(1/7)^2}=\sqrt{2/7}.$$

Questo secondo metodo ha il vantaggio di permetterci di calcolare subito la retta di minima distanza t. Infatti t è la retta per $R := P_{-13/7}$ ed $S := Q_{-9/7}$, quindi ha equazioni

$$t : \begin{cases} x=-9/7+3t/7 \\ y=-11/7-2t/7 \\ z=5/7+t/7. \end{cases}$$

Esercizio 3. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino il punto $P(1,1,1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t. \end{cases}$$

(1) Determinare l'equazione del piano α per P e perpendicolare ad r.
(2) Determinare le equazioni delle rette per P, incidenti r e che formano con r un angolo di $\pi/4$ radianti.

Svolgimento. r è parallela al vettore $\vec{v}_r := \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Quindi α deve essere perpendicolare a $\vec{v}_r$: in particolare la sua equazione deve essere del tipo $\ell(x,y,z) := x-y+2z+d=0$ ove $d\in\mathbb{R}$ è un numero tale che $\ell(1,1,1)=0$. Concludiamo che $d=-2$, sicché l'equazione cercata è

$$x-y+2z-2=0.$$

Le rette che intersecano r sotto un angolo di $\pi/4$ radianti devono essere contenute nel piano β per P contenente r. In particolare la loro direzione $\vec{v}$ deve essere un vettore parallelo a tale piano β e tale che $\cos\widehat{\vec{v}_r\vec{v}} = \sqrt{2}/2$.

Iniziamo calcolando l'equazione di β. Eliminando t si verifica facilmente che le equazioni cartesiane di r sono

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y-z=0. \end{cases}$$

Se $ax+by+cz+d=0$ è l'equazione di un piano contenente r allora il sistema di cui sopra deve essere equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y-z=0 \\ ax+by+cz+d=0. \end{cases}$$

In particolare deve accadere che

$$\varrho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 2.$$

Concludiamo che i piani che contengono r sono tutti e soli quelli aventi equazione della forma

$$\ell_{(\lambda,\mu)}(x,y,z) := \lambda(x+y-2)+\mu(x-y-z)=0$$

per due valori $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli. La condizione di passaggio per P conduce all'equazione

$$\ell_{(\lambda,\mu)}(1,1,1)=0$$

cioè $-\mu=0$: concludiamo che il piano β deve avere equazione

$$x+y-2=0.$$

β è perpendicolare al vettore $\vec{v}_\beta := \vec{\imath}+\vec{\jmath}$. Segue che i vettori paralleli a β sono i vettori della forma $\vec{v} := a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ tali che $a+b=0$, cioè i vettori del tipo

$$\vec{v} := a\vec{\imath}-a\vec{\jmath}+c\vec{k}, \quad a,c\in\mathbb{R}.$$

Allora la condizione $\cos\widehat{\vec{v}_r v} = \sqrt{2}/2$ diviene

$$2a+2c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6}\sqrt{2a^2+c^2}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri, con semplici passaggi algebrici, otteniamo

$$c^2+8ac-2a^2=0,$$

le cui soluzioni sono

$$c = 4a \pm \sqrt{16a^2+2a^2} = (4\pm 3\sqrt{2})a.$$

In particolare le equazioni parametriche delle rette cercate sono

$$r_-:\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+(4-3\sqrt{2})t, \end{cases} \qquad r_+:\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+(4+3\sqrt{2})t. \end{cases}$$

Esercizio 4. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino le rette r ed s rispettivamente di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - hy = h \\ x - z = h, \end{cases}$$

ove $h \in \mathbb{R}$. Studiare le posizioni relative di r ed s al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. In sostanza si deve descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x - hy = h \\ x - z = h, \end{cases}$$

al variare di h. Consideriamo la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -h & 0 & -h \\ 1 & 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -h & 0 & -h \\ 1 & 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -h-1 & 0 & -h+1 \\ 1 & 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -h-1 & 0 & -h+1 \\ 0 & -1 & -1 & -h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (h+1) R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h-1 & -h+1 \\ 0 & -1 & -1 & -h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h-1 & -h+1 \\ 0 & 0 & -2 & -h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (h+1) R_4/2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-h)^2/2 \\ 0 & 0 & -2 & -h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -h+1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-h)^2/2 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che la matrice incompleta A ha sempre rango $\varrho(A) = 3$, mentre la matrice completa $(A|B)$ ha rango $\varrho(A|B) = 4$ se e solo se $h \neq 1$, $\varrho(A|B) = 3$ se $h = 1$.

In particolare il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $h = 1$, quindi, in questo caso, r ed s sono incidenti e complanari: il punto d'intersezione lo si ottiene risolvendo il sistema originale o, più semplicemente, quello ottenuto considerando la matrice ridotta per righe, cioè

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ -2z = 0. \end{cases}$$

In particolare r ed s si intersecano in $P(1, 0, 0)$.

I piani contenenti r hanno equazione del tipo $\ell_{(\lambda,\mu)}(x, y, z) := \lambda(x+y-1)+\mu(x+z-1) = 0$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli. Per individuare quello che contiene anche s imponiamo il passaggio per un punto di s non su r, per esempio $Q(0, -1, -1)$. Si ha allora $\lambda + \mu = 0$, quindi il piano cercato ha equazione

$$y - z = 0.$$

Il sistema non ammette soluzione se $h \neq 1$. Si noti che due vettori paralleli, rispettivamente, alle rette r ed s sono

$$\vec{v}_r := \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}, \quad \vec{v}_s := \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -h & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = h\vec{\imath} + \vec{\jmath} + h\vec{k}.$$

Tali vettori non sono mai paralleli. Infatti, con operazioni elementari di riga sulla matrice M avente per righe le componenti di $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, si ha

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ h & 1 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ h+1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}:$$

chiaramente $\varrho(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Quindi r ed s sono sghembe per $h \neq 1$.

Esercizio 5. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino il punto $P_0(1, 2, -1)$ ed il piano α di equazione $x - 2y + z + 4 = 0$.

(1) Verificare che $P_0 \in \alpha$.
(2) Determinare le sfere di raggio 6 tangenti a α in P_0.
(3) Determinare il luogo dei centri delle sfere che sono tra loro tangenti in P_0.

Svolgimento. Si ha $(1) - 2(2) + (-1) + 4 = 0$, sicché $P_0 \in \alpha$.

Chiaramente i centri delle sfere cercate appartengono alla retta r per P_0 e perpendicolare ad α. Un vettore ortogonale ad α è $\vec{v}_\alpha = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Quindi r ha equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Il punto generico di r è $P_t(1+t, 2-2t, -1+t)$. Affinché P_t sia centro di una delle sfer cercate occorre e basta che $\mathrm{dist}(P_t, P_0) = 6$, ossia

$$(1+t-1)^2 + (2-2t-2)^2 + (-1+t+1)^2 = 36.$$

Con semplici calcoli algebrici si verifica che deve essere $t = \pm\sqrt{6}$. Concludiamo che i centri delle sfere sono

$$C_-(1-\sqrt{6}, 2+2\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}), \quad C_+(1+\sqrt{6}, 2-2\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}).$$

Le corrispondenti sfere S_- ed S_+ sono quelle di equazione

$$S_- : \ (x-(1-\sqrt{6}))^2 + (y-(2+2\sqrt{6}))^2 + (z-(-1-\sqrt{6}))^2 = 36,$$
$$S_+ : \ (x-(1+\sqrt{6}))^2 + (y-(2-2\sqrt{6}))^2 + (z-(-1+\sqrt{6}))^2 = 36.$$

Per quanto riguarda il quesito (3), il luogo cercato è proprio la retta r. Infatti se due sfere sono fra loro tangenti in P_0 allora devono avere lo stesso piano tangente in P_0, cioè α, quindi il loro centro appartiene alla retta perpendicolare ad α passante per P_0, ovvero r. Viceversa se scelgo un punto P_t su r e se $d := \mathrm{dist}(P_t, P_0)$ allora la sfera di centro P_t e raggio d è tangente ad α in P_0.

Esercizio 6. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino i punti $P(1,2,1)$ e $Q(-1,0,3)$. Determinare l'equazione della circonferenza Γ passante per P e Q ed avente centro sull'asse delle y.

Svolgimento. Il centro C di Γ deve appartenere al piano assiale del segmento $\overline{PQ}$, cioè al piano α perpendicolare al segmento $\overline{PQ}$ e passante per il suo punto medio M. Risulta che $M(0,1,2)$ ed un vettore parallelo a $\overline{PQ}$ è $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$: perciò α ha equazione

$$x + y - z + 1 = 0.$$

D'altra parte, per ipotesi, C giace sull'asse delle y, quindi le sue coordinate devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

da cui segue $C = (0, -1, 0)$.

Il raggio di Γ è $R := \mathrm{dist}(C, P) = \sqrt{11}$. Γ giace inoltre sul piano β individuato dai punti P, Q, C ed è contenuta nella sfera S di centro C e raggio R, perciò $\Gamma = S \cap \beta$. Il piano β ha equazione

$$2x - y + z - 1 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

S ha equazione

$$x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11.$$

Quindi Γ ha equazioni

$$\Gamma : \ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2y = 10 \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Quiz

Quiz 1. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino la retta r ed il piano α rispettivamente d'equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2t - 2, \end{cases} \qquad \alpha: \ x + y - z + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) r è parallelo ad α.
b) $r \subseteq \alpha$.
c) Un vettore ortogonale ad r è $\vec{v} := 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.
d) r interseca α.

Svolgimento. Iniziamo ad osservare che un vettore parallelo ad r è $\vec{v}_r := 2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+2\vec{k}$, mentre un vettore ortogonale ad α è $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$: in particolare $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\alpha = 3$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti r ed α sono paralleli se e solo se $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_\alpha$ sono perpendicolari ovvero se e solo se $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\alpha = 0$, in contrasto con quanto osservato sopra.

L'affermazione b) è falsa. Infatti se $r \subseteq \alpha$ allora r dovrebbe essere parallelo ad α, cosa che abbiamo già dimostrato essere falsa. Per verificarlo direttamente si osservi che $P(1, 0, -2) \in r$ (si prenda $t = 0$) ma $P \notin \alpha$ (infatti $1 + 0 + 2 + 1 \neq 0$).

L'affermazione c) è falsa. Infatti $\vec{v}_r = \vec{v}$, quindi r non è perpendicolare a $\vec{v}$, bensì paralelo.

L'affermazione d) è vera. Infatti un piano ed una retta sono o paralleli o incidenti. Per verificarlo direttamente calcoliamo le coordinate del punto $r \cap \alpha$. A tale scopo risolviamo l'equazione

$$1 + 2t + 3t - 2t + 2 + 1 = 0$$

ottenuta sostituendo nell'equazione di α le coordinate del punto generico di r. Risulta $t = -4/3$, che corrisponde al punto $P_{-4/3}(-5/3, -4, -14/3)$.

Quiz 2. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino i piani α e β rispettivamente d'equazioni

$$\alpha: \ -y + z - 1 = 0, \quad \beta: \ x + y = 0.$$

Sia poi ϑ l'angolo fra α e β. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\vartheta = 0$.
b) $\cos\vartheta = -1$.
c) $\cos\vartheta = 1/3$.
d) $\cos\vartheta = \pm 1/2$.

Svolgimento. Osserviamo che i vettori perpendicolari rispettivamente ai piani α e β sono tutti e soli quelli proporzionali a

$$\vec{v}_\alpha := -\vec{\jmath} + \vec{k}, \quad \vec{v}_\beta := \vec{\imath} + \vec{\jmath}.$$

Segue che

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta}{|\vec{v}_\alpha||\vec{v}_\beta|} = \pm 1/2.$$

Concludiamo che l'affermazione d) è vera, mentre le affermazioni a), b), c) sono false.

Quiz 3. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino il punto $P(1,2,3)$ ed il piano α d'equazione $\alpha: \ x - y + z + 2 = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\operatorname{dist}(P,\alpha) = 4/\sqrt{3}$.
b) Il punto simmetrico a P rispetto al piano α è $Q(0,2,0)$.
c) Un vettore parallelo a α è $\vec{v} := \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.
d) La proiezione ortogonale di P su α è $P'(1,2,0)$.

Svolgimento. L'affermazione a) è vera. Infatti

$$\operatorname{dist}(P,\alpha) = \frac{|1-2+3+2|}{\sqrt{1+1+1}} = 4/\sqrt{3}.$$

L'affermazione b) è falsa. Infatti il simmetrico a P rispetto al piano α è il punto $Q \neq P$ appartenente alla retta r ortogonale ad α passante per P. Si osservi che $Q - P = -\vec{\imath} - 3\vec{k}$ non è perpendicolare ad α (i vettori perpendicolari ad α sono tutti e soli quelli paralleli a $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$), quindi $Q \notin r$.

Determiniamo il simmetrico di P rispetto a Q. r ha equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Q è il punto di r distinto da P ed avente distanza da α pari a $\operatorname{dist}(Q,\alpha) = \operatorname{dist}(P,\alpha)$. Allora Q corrisponde al valore del parametro $t \neq 0$ tale che

$$\frac{|1+t-2+t+3+t+2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Essendo un'equazione fra quantità positive è sufficiente elevare al quadrato: con le dovute semplificazioni si ottiene $3t^2 + 8t = 0$, dunque l'unica soluzione accettabile è $t = -8/3$ corrispondente al punto $Q := P_{-8/3}(-5/3, 14/3, 1/3)$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti $\vec{v}$ è ortogonale ad α.

L'affermazione d) è falsa. Infatti P è il punto d'intersezione della retta r per P perpendicolare ad α con il piano α. Le equazioni di r sono state calcolate sopra, quindi P' corrisponde al valore del parametro t soluzione dell'equazione

$$1 + t - 2 + t + 3 + t + 2 = 0$$

ovvero $t := -4/3$ corrispondente al punto $P' := P_{-4/3}(-1/3, 10/3, 5/3)$.

Quiz 4. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino le rette r ed s rispettivamente d'equazioni

$$r:\ x = y - 1 = \frac{z-1}{2}, \quad s:\ x = y + 2 = z.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $r \cap s = P(0,1,1)$.
b) r ed s sono parallele.
c) Non esiste nessun piano per r contenente s.
d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti si verifica per sostituzione che $P \in r$ ma $P \notin s$, quindi $P \notin r \cap s$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti osserviamo che delle equazioni parametriche per r ed s sono rispettivamente

$$r:\ \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t, \end{cases} \qquad s:\ \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = t. \end{cases}$$

Quindi $\vec{v}_r := \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ è parallelo ad r, $\vec{v}_s := \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ è parallelo ad s. D'altra parte $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non sono l'uno multiplo dell'altro, quindi le rette r ed s non sono fra loro parallele.

Un altro modo per ottenere i vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ è il seguente. Si ha $r = \alpha_r \cap \beta_r$ ove α_r e β_r sono i piani rispettivamente di equazione

$$\alpha_r:\ x - y + 1 = 0, \quad \beta_r:\ 2x - z + 1 = 0.$$

Allora $\vec{v}_{\alpha_r} := \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ e $\vec{v}_{\beta_r} := 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ sono perpendicolari ad α_r ed β_r. Segue che

$$\vec{v}_{\alpha_r} \wedge \vec{v}_{\beta_r} := \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

è parallelo ad r. In maniera analoga si può procedere con s.

L'affermazione c) è vera. Infatti, per quanto visto sopra, r ed s non sono parallele, dunque o sono complanari o sono sghembe. Determiniamo $r \cap s$: a tale scopo sostituiamo le coordinate del punto generico di r nelle equazioni di s. Otteniamo le equazioni

$$t = 3 + t = 1 + 2t$$

che si vede facilmente non avere nessuna soluzione comune: in particolare r ed s sono sghembe.

Per esclusione l'affermazione d) è falsa.

Quiz 5. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si consideri la sfera S d'equazione $x^2+y^2+z^2-z=0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) S è una sfera di raggio immaginario.
b) S è tangente al piano di equazione $z=0$ in O.
c) S ha centro O.
d) S contiene una circonferenza di raggio 2.

Svolgimento. Iniziamo con l'osservare che S ha centro $C(0,0,1/2)$ e raggio $R=1/2$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti il raggio è $R=1/2$.

L'affermazione b) è vera. Infatti $O \in S$ in quanto manca il termine noto nell'equazione di S. In tale caso ol'equazione del piano tangente ad S in O è ottenuta eguagliando a zero il complesso dei termini di grado 1: in questo caso $-z=0$. In generale ricordo che l'equazione del piano tangente alla sfera S di centro $C(\alpha,\beta,\gamma)$ nel suo punto $P(x_0,y_0,z_0)$ è

$$(x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)+(z_0-\gamma)(z-z_0)=0:$$

nel nostro caso si ottiene ancora $-z=0$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti il centro è $C(0,0,1/2)$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti una circonferenza Γ in S è intersezione di un piano α con S. In particolare, per il teorema di Pitagora, il raggio r di Γ è $r=\sqrt{R^2-d^2}$ ove $d:=\operatorname{dist}(C,\alpha)$: seque che $r \le R = 1/2$. Questo è un fatto del tutto generale: il raggio r di una circonferenza Γ contenuta in una sfera S di raggio R soddisfa $r \le R$ e vale l'eguaglianza se e solo se il piano della circonferenza contiene il centro C di S.

Quiz 6. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si considerino la sfera S ed il piano α rispettivamente d'equazioni

$$S:\ x^2+y^2+z^2+3x+y-1=0, \quad \alpha:\ x+y-5=0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) α è esterno ad S.
b) α è tangente ad S in $P(0,0,5)$.
c) $\Gamma := S \cap \alpha$ è una circonferenza di centro $A(1,1,2)$.
d) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Svolgimento. Iniziamo ad osservare che S ha centro $C(-3/2,-1/2,0)$ e raggio $R=\sqrt{14}/2$. Inoltre $\operatorname{dist}(C,\alpha)=7/\sqrt{2}$.

L'affermazione a) è vera. Infatti $\operatorname{dist}(C,\alpha)>R$, quindi α interseca S lungo una circonferenza di raggio immaginario.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $P \notin \alpha$ e $P \notin S$, quindi S ed α non possono essere tangenti fra loro in P: d'altra parte α è esterno ad S, quindi α ed S non sono tangenti in nessun punto.

L'affermazione c) è falsa. Infatti il centro A di Γ è l'intersezione della retta r per C perpendicolare ad α con il piano α stesso. Un vettore perpendicolare ad α è $\vec{v}_\alpha := \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, quindi le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = -3/2 + t \\ y = -1/2 + t \\ z = 0. \end{cases}$$

In particolare $A := r \cap \alpha$ corrisponde al valore di t soluzione dell'equazione

$$-3/2 + t - 1/2 + t - 5 = 0,$$

quindi $t = 7/2$ da cui $A(2, 1, 0)$.

Per esclusione l'affermazione d) è falsa.