Esempio 1: Calcolare le incertezze relative delle seguenti misure

3.2 Kg   4.0 m   7.58 s (4.2 ± 0.3) N

(0.1 kg / 3.2 kg)*100 = 3.125 %

(0.1 m / 4.0 m)*100 = 2.5 %

(0.01 s / 7.58 s)*100 = 0.132 %

(0.3 N / 4.2 N)*100 = 7.14 %

Esempio 2: supponiamo di aver misurato un angolo θ come

$$\theta = (20 \pm 3)\ °$$

e di voler calcolare il $\cos\theta$, qual è la sua migliore stima?

$\Delta(\cos\theta) = |d(\cos\theta)/d\theta| * \Delta\theta = \sin\theta * \Delta\theta$ (in rad)

$\Delta\theta$ deve essere espressa in radianti, poiché la derivata di $\cos\theta$ è $-\sin\theta$ solo se θ è espresso in radianti.

Quindi $\Delta\theta = 3° = 3 * (\pi/180) = 0.05$ rad

$\Delta(\cos\theta) = \sin(20°) * 0.05 = 0.34 * 0.05 = 0.02$

$\cos\theta = \cos(20°) \pm 0.02 = 0.94 \pm 0.02$

Esempio 3: Un fascio luminoso di intensità I_0 che attraversa un materiale di spessore x emerge con intensità $I = I_0\, e^{-\mu x}$, essendo μ il coefficiente di assorbimento.

Sapendo che $I_0 = (10.00 \pm 0.02)\ W/m^2$, $I = (5.50 \pm 0.01)\ W/m^2$, $x = (0.0200 \pm 0.0004)\ m$, calcolare il coefficiente di assorbimento μ con la sua incertezza

$$< \mu > = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \frac{1}{0.02\,m}\ln\left(\frac{10.00\,W/m^2}{5.50\,W/m^2}\right) = 29.8918\,m^{-1}$$

$$\Delta\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial I_0}\right)^2(\Delta I_0)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial I}\right)^2(\Delta I)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x^2}\right)^2\left[\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)\right]^2 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\Delta I_0}{I_0}\right)^2 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = 0.6129\,m^{-1}$$

$$\mu = < \mu > \pm \Delta\mu = (29.9 \pm 0.6)\,m^{-1}$$

$$y = a \cdot x^{\alpha} \cdot w^{\beta} \cdot z^{\gamma}$$

monomia

$$\left(\frac{\Delta y}{<y>} \right)^2 = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{<x>} \right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{\Delta w}{<w>} \right)^2 + \left(\gamma \cdot \frac{\Delta z}{<z>} \right)^2$$

Esempio 4: Si vuole misurare la costante dielettrica relativa ε_r di un materiale misurando la capacità $C = (\varepsilon_0\ \varepsilon_r\ S) / d$ di un condensatore piano ad armature circolari di raggio r poste a distanza d (essendo ε_0 la costante dielettrica del vuoto e S la superficie delle armature) tra cui è posto il materiale stesso.

Sapendo che l'incertezza di ε_0 è trascurabile e che le incertezze relative di C, r, d valgono rispettivamente 0.05, 0.01, 0.03, calcolare l'incertezza relativa di ε_r :

$$\varepsilon_r = \frac{C \cdot d}{\varepsilon_0 \pi\, r^2}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r} = \sqrt{\left(\frac{\Delta C}{< C >}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\Delta r}{< r >}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{< d >}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0.05)^2 + 2^2(0.01)^2 + (0.03)^2} = 0.06$$

Esempio 5: Si vuole misurare la costante dielettrica relativa ε_r di un materiale misurando la capacità $C = \varepsilon_0\ \varepsilon_r\ S / d$ di un condensatore piano ad armature circolari di raggio r poste a distanza d (essendo ε_0 la costante dielettrica del vuoto e S la superficie delle armature) tra cui è posto il materiale stesso.

Sapendo che l'incertezza di ε_0 è trascurabile e che le incertezze relative di r, d valgono rispettivamente 0.01,0.02, con che incertezza relativa occorre misurare C affinché l'incertezza relativa di ε_r sia dell'ordine di 0.03 ?

$$\left(\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)^2 = \left(\frac{\Delta C}{<C>}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\Delta r}{<r>}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{<d>}\right)^2$$

$$\frac{\Delta C}{<C>} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)^2 - 2^2\left(\frac{\Delta r}{<r>}\right)^2 - \left(\frac{\Delta d}{<d>}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0.03)^2 - 2^2(0.01)^2 - (0.02)^2} = 0.01$$

$$y = a \cdot x^{\alpha} \cdot w^{\beta} \cdot z^{\gamma} \cdot \left[f(w) \right]^{\rho}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{< y >} \right)^2 = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{< x >} \right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{\Delta w}{< w >} \right)^2 + \left(\gamma \cdot \frac{\Delta z}{< z >} \right)^2 + \left(\rho \cdot \frac{\Delta f(w)}{f(< w >)} \right)^2$$

Esempio 6: Si vuole determinare la velocità v di un proiettile misurando la gittata s e sapendo che, trascurando l'attrito dell'aria, $s = (v^2 / g)\sin(2\alpha)$ g è l'accelerazione di gravità e α l'alzo del cannone.

Sapendo che $\alpha = (0.52 \pm 0.01)$ rad, l'incertezza relativa di s vale 0.01 e che l'incertezza relativa di g vale 0.01, determinare l'incertezza relativa di v.

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{s \cdot g}{\sin(2\alpha)}} \qquad \Delta\left(\sin(2\alpha)\right) = 2\cos(2\alpha)\Delta\alpha$$

$$\frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta s}{<s>}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{<g>}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{2\cos(2<\alpha>)\Delta\alpha}{\sin(2<\alpha>)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}0.01\right)^2 + \left(\frac{1}{2}0.01\right)^2 + \left(0.0059\right)^2} = 0.009$$