

4. TELECOMUNICAZIONI RELATIVISTICHE INTERSTELLARI

4.1 Introduzione alla KLT

In questo capitolo studieremo il problema delle telecomunicazioni tra una sonda spaziale relativistica e una stazione a terra, ed in particolare in questo primo paragrafo vedremo un'introduzione a quello che è il miglior algoritmo candidato al trattamento dei segnali: la KLT.

4.1.1 Proprietà generali e cenni sulla compressione e filtraggio di segnali

La Trasformata di Fourier (Fourier Transform, abbreviata FT), fu il primo strumento matematico che permise di studiare approfonditamente i fenomeni oscillatori di ogni tipo. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) riuscì a pubblicare la sua opera fondamentale in proposito solo nel 1830, dopo che già Eulero e lo stesso Fourier avevano anticipato molti degli argomenti fondamentali in una lunga sequenza di pubblicazioni scientifiche. La FT può essere formulata sia nel discreto (serie di Fourier) che nel continuo (integrale di Fourier, 1816), ma entrambe le formulazioni richiedono delicati passaggi matematici che crearono a Fourier non pochi problemi anche da parte di altri grandi matematici a lui contemporanei (Lagrange fino al 1813, poi Cauchy, ecc.). Qui ci limiteremo a sottolineare il fatto che solo intorno al 1930 circa l'analisi di Fourier dei fenomeni ondosi divenne una procedura standard sia per i fisici che per gli ingegneri. Anzi, solo molto più tardi, nel 1965, la scoperta della Fast Fourier Transform (FFT) da parte di James W. Cooley e John W. Tukey permise di ridurre il carico computazionale della FT da N^2 a $N \cdot \ln N$ per una matrice di ordine N (in seguito vedremo meglio cosa rappresenta tale matrice), favorendo così l'uso su larga scala dei computer per calcolare la FFT atta a ripulire un segnale dal rumore di fondo (problema del filtraggio).

Dal 1946, comunque, esiste un algoritmo più sofisticato e raffinato che non la FFT, il quale viene chiamato Karhunen-Loève Transform o KLT. Vedremo che l'utilizzo di tale algoritmo porta notevoli vantaggi soprattutto a livello ingegneristico, anche se il carico computazionale della KLT rimane dell'ordine di N^2 e quindi molto più pesante che non per la FFT.

La KLT prende il nome dai due matematici che dimostrarono, indipendentemente e contemporaneamente nel 1946, la *convergenza* della serie che rappresenta tale trasformazione (serie indicata nella [4-1]). Essi furono il finlandese Kari Karhunen e il franco-americano Maurice Loève.

Cerchiamo ora di capire perché questo sofisticato strumento matematico può essere utilissimo anche in campo tecnologico.

Un segnale deterministico sommato ad un rumore stocastico è chiamato “segnale rumoroso” o, se la potenza del segnale è molto più bassa rispetto a quella del rumore, “segnale nascosto nel rumore”. La somma di segnale più rumore è quindi una funzione aleatoria del tempo (rappresenta cioè un processo stocastico), e qui la indicheremo genericamente con $X(t)$. Una rappresentazione grafica della funzione $X(t)$ può essere la [Fig. 4-1].

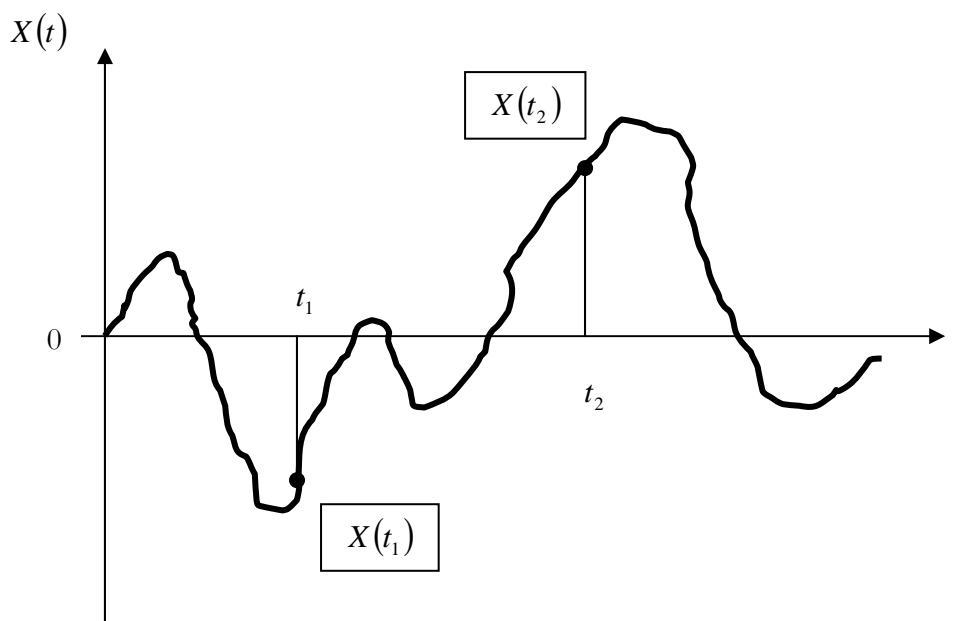
L'importanza della KLT è di riuscire a rappresentare un generico rumore, come la $X(t)$ appena definita, come una serie infinita di termini (chiamata espansione di Karhunen-Loève, o sviluppo di Karhunen-Loève, o KL expansion) con l'importante proprietà di convergere.

Tale serie la indicheremo nel seguente modo:

$$[4-1] \quad X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \phi_n(t)$$

dove $n \in \mathbb{N}^+$.

Una caratteristica estremamente importante di tale serie è di riuscire a rappresentare la generica funzione stocastica del tempo come composta da una somma infinita di termini ciascuno dei quali è costituito dal prodotto di una variabile casuale Z_n (indipendente dal tempo) moltiplicata per un termine deterministico, dipendente invece solo dal tempo, $\phi_n(t)$. In questo modo, si riesce a separare la parte stocastica da quella temporale, come in un processo di separazione delle variabili tipico, ad esempio, della soluzione delle equazioni a derivate parziali.



[Fig. 4-1]

Andamento nel tempo di una funzione aleatoria $X(t)$ rappresentante un rumore, nell'ipotesi che $X(0)=1$ abbia probabilità 1

Per capire l'importanza della KLT è possibile evidenziare un'analogia con la meccanica newtoniana. Dato un certo corpo rigido, è sempre possibile descriverne le proprietà meccaniche per mezzo del tensore di inerzia (tensore doppio o matrice). Questo, però, può assumere aspetti diversi

a seconda del sistema di riferimento (terna di assi) considerato. Ma esiste una terna ottimale per ogni corpo tale per cui il tensore d'inerzia risulti essere diagonale, cioè con valori non nulli solo lungo la diagonale principale, condizione che facilita e ottimizza la rappresentazione e lo studio della dinamica del corpo stesso. Tale sistema di riferimento privilegiato è chiamato terna principale d'inerzia o terna di autovettori della matrice d'inerzia. Dato il generico tensore d'inerzia di un corpo, è dunque sempre possibile ricavare la sua terna di autovettori, così da cambiare il sistema di riferimento cui ci si riferisce per studiare al meglio il corpo stesso.

Per la KLT esiste la possibilità di descrivere un generico processo stocastico $X(t)$ nelle migliori condizioni grazie ad una funzione, corrispondente al tensore d'inerzia, chiamata *autocorrelazione*, o semplicemente *correlazione*. È possibile infatti determinare gli autovettori di questa funzione e quindi descrivere il processo stocastico riferendoci a questi nuovi vettori “principali”.

La funzione di autocorrelazione, quantità di origine statistica, è definita come il valore medio del prodotto della funzione $X(t)$ calcolata in due generici istanti t_1 e t_2 , come indicato nella [Fig. 4-1], che indichiamo con:

$$[4-2] \quad \langle X(t_1)X(t_2) \rangle$$

Questa è chiaramente una funzione simmetrica in t_1 e t_2 .

Se assumiamo come nota la funzione di correlazione del nostro “segnale+rumore” $X(t)$ in t_1 e t_2 , le funzioni $\phi_n(t)$, precedentemente indicate nello sviluppo in serie di [4-1], rappresentano le *autofunzioni* della correlazione [4-2] e si ottengono come soluzione della seguente equazione integrale:

$$[4-3] \quad \int_0^T \langle X(t_1)X(t_2) \rangle \phi_n(t_2) dt_2 = \lambda_n \phi_n(t_1)$$

L'autocorrelazione [4-2] è la quantità nota dell'equazione integrale precedente, nella quale T indica il tempo totale nel quale si studia il fenomeno (a volte detto “tempo d'integrazione della funzione aleatoria”). La risoluzione matematica dell'equazione integrale [4-3], essendo nota la correlazione [4-2], permette di calcolare sia gli autovalori λ_n che le autofunzioni $\phi_n(t)$.

Queste autofunzioni $\phi_n(t)$ formano una base ortonormale nello spazio di Hilbert ed effettivamente rappresentano **la migliore** tra tutte le possibili basi per descrivere un processo stocastico rispetto alle classiche basi di seni e coseni date dalla FFT.

L'ortonormalità delle $\phi_n(t)$ è espressa dalla formula:

$$[4-4] \quad \int_0^T \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1 & \text{per } m = n \end{cases}$$

dove δ_{mn} indica il delta di Kronecker (o tensore di Kronecker o simbolo di Kronecker).

Alla suddetta ortonormalità delle $\phi_n(t)$ è legato un altro aspetto della KLT che ne dimostra l'enorme superiorità, sia concettuale che pratica, rispetto alla FFT. Nella FFT le funzioni che costituiscono la base ortonormale sono sempre e soltanto dei seni e coseni, nella KLT queste

funzioni **non** sono determinate a priori, ma dipendono dal particolare problema che viene studiato. Siccome il problema studiato è rappresentato matematicamente dall'autocorrelazione [4-2], il fatto che la base ortonormale $\phi_n(t)$ cambi a seconda del problema studiato significa che la KLT si autoadatta alla forma del “segnale+rumore”, qualunque sia il suo comportamento nel tempo.

Un altro vantaggio dell'espansione di Karhunen-Loève è l'ortogonalità delle variabili aleatorie Z_n , in senso probabilistico. Infatti, sfruttando l'ortonormalità delle funzioni di base $\phi_n(t)$, si può dimostrare che le variabili aleatorie Z_n sono definite come:

$$[4-5] \quad Z_n = \int_0^T X(t)\phi_n(t)dt$$

Tralasciando la dimostrazione possiamo vedere che l'ortogonalità in senso probabilistico delle Z_n viene ad esprimersi come segue:

$$[4-6] \quad \langle Z_m Z_n \rangle = \delta_{mn} \lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ \lambda_n & \text{per } m = n \end{cases}$$

Tale proprietà è di estrema importanza se il processo $X(t)$ è di tipo gaussiano. Infatti, in questo caso, l'ortogonalità probabilistica delle variabili aleatorie gaussiane Z_n equivale all'indipendenza statistica (o stocastica) tra i vari termini della serie di Karhunen-Loève.

Inoltre, possiamo supporre (senza che ciò sia in alcun modo restrittivo) che il valore medio di ogni Z_n sia nullo:

$$[4-7] \quad \langle Z_n \rangle = 0$$

per cui anche il valore medio di $X(t)$ è nullo.

Se quindi calcoliamo la varianza $\sigma_{Z_n}^2$ di ogni Z_n , utilizzando i risultati della [4-6] e della [4-7], si ha:

$$[4-8] \quad \sigma_{Z_n}^2 = \langle Z_n^2 \rangle - \langle Z_n \rangle^2 = \langle Z_n^2 \rangle = \langle Z_n Z_n \rangle = \lambda_n$$

Gli autovalori sono di conseguenza sempre reali e positivi (cioè: lo zero non è mai un autovalore!), o utilizzando una scrittura tipicamente matematica: $\lambda_n \in \mathbf{R}^+$.

Dalla [4-8] si può ricavare che la deviazione standard σ_{Z_n} di ogni Z_n attorno al suo valore medio, cioè attorno allo zero, vale:

$$[4-9] \quad \sigma_{Z_n} = \pm\sqrt{\lambda_n}$$

Calcoliamo ora l'autocorrelazione della funzione $X(t)$ utilizzando lo sviluppo in serie [4-1] e l'ortogonalità dalla [4-6], si ha:

$$[4-10] \quad \langle X(t_1)X(t_2) \rangle = \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \phi_m(t_1) \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \phi_n(t_2) \right\rangle$$

da cui si dimostra che, “scambiando” fra di loro gli operatori probabilistici con quelli deterministici (il che è sempre possibile in quanto essi non interagiscono gli uni con gli altri), si ha:

$$[4-11] \quad \langle X(t_1)X(t_2) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(t_1)\phi_n(t_2)$$

Utilizzando questa espressione possiamo quindi calcolare la varianza della funzione $X(t)$:

$$[4-12] \quad \sigma_{X(t)}^2 = \langle X(t)X(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2 = \langle X(t)X(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n^2(t)$$

Integrando ora entrambi i membri rispetto al tempo, si ottiene:

$$[4-13] \quad \int_0^T \sigma_{X(t)}^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

Come detto gli autovalori sono tutti reali e positivi e li considereremo nel seguito sempre ordinati, nello sviluppo in serie, in ordine decrescente dal più grande al più piccolo:

$$[4-14] \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \dots > 0$$

In particolare, definiamo l'autovalore più grande λ_1 come l'*autovalore dominante* della serie. Per la convergenza della serie, dev'essere:

$$[4-15] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

da cui, utilizzando la [4-8], possiamo anche dire che:

$$[4-16] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$$

Questo risultato è intuibile perché il valore medio di Z_n è zero, per ogni n , e la sua deviazione standard dal valore medio è, come detto, $\pm \sqrt{\lambda_n}$. Ma se la funzione devia sempre meno dal suo valore medio all'aumentare del valore di n , visto che vale la [4-15], il termine aleatorio Z_n tende sempre di più a tale valore. Z_n tende quindi ad essere un valore deterministico e non più aleatorio col crescere di n .

Preso atto di queste ultime caratteristiche delle funzioni Z_n , allorché si tronchi lo sviluppo in serie di KL, dichiarando che dal termine troncato in poi “si tratta solo di rumore”, e rispettando la regola secondo la quale si ordinano gli autovalori in ordine decrescente, è possibile dire che lo sviluppo in serie di Karhunen-Loève di un segnale può essere troncato ai primi termini dando un’ approssimazione ottimale di tale segnale. Infatti, può essere dimostrato matematicamente che la “parte rimasta” della serie di KL dopo la troncatura rappresenta **la migliore approssimazione in media quadratica** a “tutta” la serie stessa. Così facendo si è effettuata una *compressione* di dati, cioè una compressione del segnale iniziale, anche se con perdita. Non solo, operando in tale modo si è anche effettuato un *filtraggio* dello stesso segnale, in quanto i primi autovalori corrispondono al segnale vero e proprio mentre i termini tagliati via corrispondono al rumore. Rispetto ad altri metodi, quindi, la KLT permette di effettuare sia una compressione che un filtraggio del segnale allo stesso tempo.

Sottolineiamo infine che la trasformazione diretta del “segnale+rumore” tramite la KLT, corrisponde ad una trasformazione **lineare** di assi nello spazio delle autofunzioni (o autovettori, se discreto), per cui si suole dire che la KLT è un metodo **lineare**.

Concludendo, possiamo elencare i principali vantaggi e svantaggi della KLT rispetto alla FT (Fourier Transform):

- La KLT lavora ugualmente bene sia su segnali a banda larga che segnali a banda stretta, al contrario della FT che lavora bene solo sulla banda stretta.
- La KLT è adatta sia a processi stocastici stazionari che non stazionari, invece la FT solo per processi stazionari.
- La KLT è unica rispetto a tutte le possibili trasformate, perché effettua sia la compressione che il filtraggio del segnale, apportando notevoli vantaggi ingegneristici nel trattamento dei segnali per le telecomunicazioni spaziali.
- La KLT impone un carico di lavoro ai computer decisamente maggiore rispetto alla FFT (Fast Fourier Transform). Infatti, se N è la dimensione della matrice di autocorrelazione del “segnale+rumore” considerato, nel caso della KLT il carico di lavoro per determinare gli autovalori e gli autovettori cresce secondo N^2 , mentre per la FFT cresce con $N \cdot \ln N$. Questa situazione è ulteriormente peggiorata se si pensa che non esiste in generale la possibilità di trovare una FKLT (Fast KLT), perché “il valor medio del prodotto di due variabili aleatorie **non** è uguale al prodotto dei valori medi” (tranne che per il caso speciale in cui l’autocorrelazione è un’esponenziale). In altre parole, l’operatore che costituisce il “nucleo della trasformazione integrale” (cioè la funzione di autocorrelazione del segnale) della KLT **non** è separabile.

4.1.2 KLT e moto browniano

Vediamo ora un’ importante applicazione della KLT al moto browniano standard, il più semplice ma importante processo gaussiano non stazionario, indicato con $B(t)$.

Ciò che intendiamo fare è esplicitare lo sviluppo in serie di KL della funzione aleatoria $B(t)$ che in generale vale:

$$[4-17] \quad B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \phi_n(t)$$

dove i termini della precedente espressione hanno i soliti significati già visti.

Definiamo prima di tutto alcune caratteristiche statistiche del moto browniano che come detto è un processo di tipo gaussiano. Per questo motivo la sua funzione densità di probabilità (al primo ordine) è definita da:

$$[4-18] \quad f_{B(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

il cui valor medio vale zero e la cui varianza vale t . In equazioni, si ha il valore medio:

$$[4-19] \quad \langle B(t) \rangle = 0$$

e la varianza

$$[4-20] \quad \sigma_{B(t)}^2 = t$$

Di conseguenza la deviazione standard vale:

$$[4-21] \quad \sigma_{B(t)} = \pm\sqrt{t}$$

La $B(t)$ ha una funzione di distribuzione gaussiana attorno al valore medio nullo (come indicato nella [4-18]), e se facciamo tendere a zero il tempo (avvicinandoci sempre più all'istante iniziale) si fa tendere a zero anche la varianza (dal legame [4-20]). Per $t=0$ si ha quindi come funzione di distribuzione non più una gaussiana ma la funzione delta di Dirac. Questo fa sì che in zero la $B(t)$ valga zero con probabilità uno, cioè $B(t)$ tende ad un valore deterministico.

Esplicitamente la condizione iniziale è:

$$[4-22] \quad B(0) = 0$$

Tralasciando le varie dimostrazioni possiamo notare che la funzione di autocorrelazione del moto browniano è:

$$[4-23] \quad \langle B(t_1)B(t_2) \rangle = \begin{cases} t_1 & \text{per } t_1 < t_2 \\ t_2 & \text{per } t_2 < t_1 \end{cases}$$

o utilizzando un'altra notazione:

$$[4-24] \quad \langle B(t_1)B(t_2) \rangle = \min(t_1, t_2)$$

Inserendo quest'autocorrelazione nell'equazione integrale [4-3], dopo alcuni passaggi, si ottiene una nuova equazione integrale più semplice detta del tipo di Volterra, anziché del tipo di Fredholm. Questa semplificazione consente di ridurre a sua volta l'equazione di Volterra alla seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$[4-25] \quad \frac{d^2 \phi_n(t)}{dt^2} + \frac{1}{\lambda_n} \phi_n(t) = 0$$

accompagnata dalle due seguenti condizioni al contorno per le autofunzioni incognite:

$$[4-26] \quad \phi_n(0) = 0$$

$$[4-27] \quad \left. \frac{d\phi_n(t)}{dt} \right|_{t=T} = 0$$

Ma la [4-25] è proprio l'equazione differenziale del moto armonico semplice, il cui integrale generale è dunque immediatamente esprimibile come una combinazione lineare di un seno e di un coseno:

$$[4-28] \quad \phi_n(t) = A \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) + B \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

Utilizzando, quindi, le condizioni al contorno [4-26] e [4-27] risulta infine per le autofunzioni di KL del moto browniano l'espressione:

$$[4-29] \quad \phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{t}{T}\right]$$

e per gli autovalori corrispondenti:

$$[4-30] \quad \lambda_n = \frac{4T^2}{\pi^2(2n-1)^2}$$

dove $n \in N^+$.

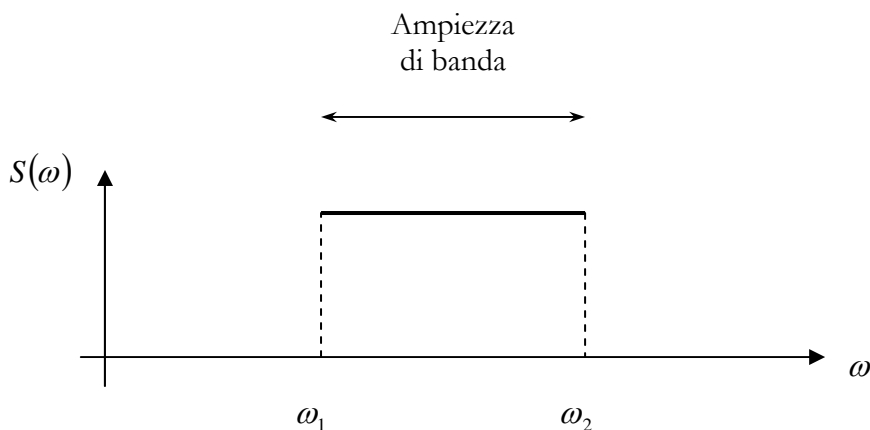
Possiamo quindi scrivere lo sviluppo in serie di KL del moto browniano sostituendo l'espressione [4-29] nella [4-17]:

$$[4-31] \quad B(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \sin\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{t}{T}\right]$$

Si noti che, essendo i seni delle funzioni trigonometriche, abbiamo in tal modo dimostrato che, per il caso particolare del moto browniano, la KLT è la stessa cosa che la trasformata di Fourier. È chiaro invece che, in generale, la KLT non si riduce affatto alla trasformata di Fourier.

4.1.3 KLT e rumore bianco

Indichiamo con $W(t)$ il *rumore bianco*, rumore con l'importante proprietà di avere densità spettrale di potenza $S(\omega)$ costante su tutto l'asse delle frequenze ω , per cui risulta avere ampiezza di banda infinita e potenza infinita. Nella pratica, però, si ha a che fare solo con segnali (e/o rumori) con ampiezza di banda finita, per cui si può definire il rumore bianco a banda limitata. Esso è caratterizzato da una densità spettrale di potenza costante nell'intervallo di frequenze della banda considerata e nulla per tutte le altre frequenze. Cioè se le frequenze considerate sono comprese tra ω_1 e ω_2 , e quindi l'ampiezza di banda vale $\omega_2 - \omega_1$, si ha un andamento della densità spettrale di potenza come quello di [Fig. 4-2]. Il rumore bianco a banda limitata ha di conseguenza una potenza media associata che non è più infinita.



[Fig. 4-2]

Densità spettrale di potenza del rumore bianco a banda limitata

È possibile dimostrare che l'autocorrelazione del rumore bianco coincide con l'autocorrelazione della derivata temporale del moto browniano standard ed è uguale alla funzione delta di Dirac:

$$[4-32] \quad \langle W(t_1)W(t_2) \rangle = \langle \dot{B}(t_1)\dot{B}(t_2) \rangle = \delta(t_2 - t_1)$$

Da questo risultato si può dedurre l'importante conseguenza che:

$$[4-33] \quad W(t) = \dot{B}(t)$$

cioè il rumore bianco coincide con la derivata temporale del moto browniano (nel senso di “derivata di un processo stocastico” come si precisa nei corsi di telecomunicazioni).

Definiamo a questo punto il cosiddetto *integrale di rumore bianco*, riferito ad un processo stocastico $X(t)$ arbitrario, nel seguente modo:

$$[4-34] \quad X(t) \equiv \int_0^t f(t) dB(t)$$

Sarebbe più corretto utilizzare all'interno dell'integrale una variabile indicata differentemente da t ma per comodità trascuriamo questo vincolo matematico.

Tale integrale può ugualmente essere definito come:

$$[4-35] \quad X(t) \equiv \int_0^t f(t) \dot{B}(t) dt$$

o, se si preferisce:

$$[4-36] \quad X(t) \equiv \int_0^t f(t) W(t) dt$$

così da far comparire esplicitamente il rumore bianco.

Il termine $f(t)$ rappresenta una funzione continua arbitraria definita sull'asse positivo dei tempi, da non confondere con la funzione densità di probabilità $f_{X(t)}(x)$ del processo stocastico $X(t)$.

La funzione aleatoria $X(t)$ così definita risulta essere un processo gaussiano perché l'integrale, presente nella sua definizione, agisce solo sul tempo e non sulla natura stocastica del processo $\dot{B}(t)$ che è appunto di tipo gaussiano.

Vediamo ora alcune caratteristiche della funzione $X(t)$.

Essa ha condizione iniziale:

$$[4-37] \quad X(0) = 0$$

e il suo valore medio risulta anch'esso nullo perchè lo è quello del rumore bianco:

$$[4-38] \quad \langle X(t) \rangle = 0$$

Se si calcola la funzione di autocorrelazione di $X(t)$ si ottiene, dopo alcuni passaggi:

$$[4-39] \quad \langle X(t_1)X(t_2) \rangle = \int_0^{\min(t_1, t_2)} f^2(t) dt$$

La varianza, essendo il valor medio nullo, è uguale, per i motivi già visti nel primo paragrafo, a:

$$[4-40] \quad \sigma_{X(t)}^2 = \langle X(t)X(t) \rangle$$

per cui:

$$[4-41] \quad \sigma_{X(t)}^2 = \int_0^t f^2(t) dt$$

Di conseguenza si può calcolare la deviazione standard:

$$[4-42] \quad \sigma_{X(t)} = \pm \sqrt{\int_0^t f^2(t) dt}$$

Per concludere, possiamo affermare che la $X(t)$ com'è stata definita nella [4-35], o nelle altre forme equivalenti, non è nient'altro che il moto browniano per il quale la variabile tempo è stata riscalata utilizzando la funzione $f(t)$. In altri termini, si può vedere la $X(t)$ anche nel seguente modo:

$$[4-43] \quad X(t) = B\left(\int_0^t f^2(t) dt\right)$$

dove cioè il tempo t è stato sostituito dal tempo riscalato:

$$[4-44] \quad t \rightarrow \int_0^t f^2(t) dt$$

Ci si può rendere conto dell'esattezza della [4-43], in quanto, effettuando questo tipo di riscalamento temporale, si mantengono le proprietà prima viste per la $X(t)$, si hanno cioè le corrispondenze:

$$[4-45] \quad X(0) = 0 \rightarrow B(0) = 0$$

$$[4-46] \quad \langle X(t) \rangle = 0 \rightarrow \left\langle B\left(\int_0^t f^2(t) dt\right) \right\rangle = 0$$

Inoltre, vale l'uguaglianza tra le funzioni di autocorrelazione, che non dimostreremo, come qui indicato:

$$[4-47] \quad \langle X(t_1)X(t_2) \rangle = \left\langle B \left(\int_0^{t_1} f^2(t) dt \right) B \left(\int_0^{t_2} f^2(t) dt \right) \right\rangle$$

Per il processo gaussiano $X(t)$ la funzione densità di probabilità risulta essere, come noto:

$$[4-48] \quad f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{X(t)}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{X(t)}^2}}$$

o considerando la $X(t)$ come un moto browniano riscaldato:

$$[4-49] \quad f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\int_0^t f^2(t) dt}} e^{-\frac{x^2}{2\int_0^t f^2(t) dt}}$$

Se assumiamo il caso:

$$[4-50] \quad f(t) = 1$$

ci si riconduce alla funzione densità di probabilità del moto browniano standard [4-18]:

$$[4-51] \quad f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Possiamo quindi applicare tutti questi risultati ad un volo spaziale che si svolge in condizioni relativistiche, anche se non si sono dimostrati tutti i risultati citati per non appesantire il testo data la lunghezza dei calcoli.

4.2 Versione della KLT valida per telecomunicazioni relativistiche

In questo secondo paragrafo vedremo più nel dettaglio come la KLT trattata finora in senso generale possa ottimamente adattarsi ai problemi di comunicazione tra corpi che si muovano in moto relativo a velocità elevatissime, cioè in condizioni relativistiche. Affronteremo il problema del viaggio di una sonda in diverse condizioni di moto, dal moto uniforme al moto iperbolico fino al moto con profilo arbitrario di accelerazione.

4.2.1 KLT e relatività speciale

Considerando tutti i risultati visti nel primo paragrafo, riscriviamo per comodità le importanti relazioni [4-34] e [4-43] che definiscono il processo stocastico che consideriamo:

$$[4-52] \quad X(t) = \int_0^t f(t)dB(t) = B\left(\int_0^t f^2(t)dt\right)$$

È stato dimostrato (rif. [30]) che un trattamento matematico adeguato porta a scoprire che lo sviluppo in serie di KL di tale funzione è:

$$[4-53] \quad X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n N_n \sqrt{f(t) \int_0^t f(t)dt} J_{\mu(t)} \left(\gamma_n \frac{\int_0^t f(t)dt}{\int_0^T f(t)dt} \right)$$

Vediamo ora qual è il significato dei vari termini.

- Z_n sono le variabili aleatorie già definite nel precedente paragrafo, ed hanno anche le stesse caratteristiche già viste
- $J_{\mu(t)}$ è la funzione di Bessel di ordine $\mu(t)$
- $\mu(t)$ è l'ordine della funzione di Bessel, in generale non è costante nel tempo e vale:

$$[4-54] \quad \mu(t) = \sqrt{-\frac{\chi^3(t)}{f^2(t)} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\chi'(t)}{f^2(t)} \right]}$$

dove:

$$[4-55] \quad \chi(t) = \sqrt{f(t) \int_0^t f(t)dt}$$

- γ_n sono gli zeri positivi della equazione:

$$[4-56] \quad \chi'(t) \cdot J_{\mu(T)}(\gamma_n) + \chi(T) \cdot \left[\frac{f(T) \cdot \gamma_n}{\int_0^T f(t)dt} \cdot J'_{\mu(T)}(\gamma_n) + \frac{\partial J_{\mu(T)}(\gamma_n)}{\partial \mu} \cdot \mu'(T) \right] = 0$$

che in genere non è risolvibile analiticamente ma solo numericamente

➤ N_n sono le costanti di normalizzazione e derivano dalla condizione di normalizzazione:

$$[4-57] \quad N_n^2 \left(\int_0^T f(t) dt \right)^2 \cdot \int_0^1 x \cdot [J_{\mu(x)}(\gamma_n x)]^2 dx = 1$$

dove i nuovi ordini delle funzioni di Bessel $\mu(x)$ sono ottenuti grazie alla trasformazione:

$$[4-58] \quad \int_0^t f(t) dt = x \cdot \int_0^T f(t) dt$$

➤ gli autovalori λ_n sono dati da:

$$[4-59] \quad \lambda_n = \left[\int_0^T f(t) dt \right]^2 \cdot \frac{1}{\gamma_n^2}$$

Introduciamo quindi i concetti di relatività speciale utili in questo studio.

Come visto nel primo capitolo, esiste un legame tra il tempo proprio τ misurato a bordo di una sonda relativistica e il tempo coordinato t misurato a terra. Indichiamo nuovamente tale legame già visto con la [1-87] esplicitando le dipendenze dei vari termini dal tempo coordinato:

$$[4-60] \quad \tau(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt$$

dove i vari simboli hanno i significati più volte visti.

Interpretiamo, quindi, il moto browniano in senso relativistico dove la variabile temporale è il tempo proprio, per cui lo indichiamo con $B(\tau)$, e non il tempo coordinato, per il quale si aveva invece $B(t)$. In questo modo abbiamo supposto di interpretare il cambiamento non lineare di variabile temporale come un riscaldamento del tempo.

Da ciò possiamo imporre che il tempo riscaldato sia esattamente il tempo proprio:

$$[4-61] \quad \int_0^t f^2(t) dt \stackrel{\downarrow}{=} \tau(t)$$

da cui, sostituendo al posto di τ il suo valore dato dalla relazione [4-60], si ha:

$$[4-62] \quad \int_0^t f^2(t) dt = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt$$

Differenziando questa equazione, e considerando solo la radice positiva, possiamo ottenere la fondamentale espressione della funzione di riscaldamento $f(t)$ in termini della velocità della sonda relativistica:

$$[4-63] \quad f(t) = \sqrt[4]{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}$$

o se si preferisce:

$$[4-64] \quad f(t) = \left[1 - \frac{u^2(t)}{c^2}\right]^{1/4}$$

Tale formula è l'espressione basilare da cui partire per effettuare lo studio della KLT per tutte le telecomunicazioni relativistiche.

Invertendo poi quest'espressione si può viceversa ricavare la velocità della sonda relativistica, nota la funzione di riscaldamento del tempo $f(t)$:

$$[4-65] \quad u(t) = c \cdot \sqrt{1 - f^4(t)}$$

Data la presenza di una radice quadrata si deve imporre un limite superiore al valore numerico della funzione $f(t)$:

$$[4-66] \quad f(t) \leq 1$$

e dalle [4-53] e [4-55] si deve imporre invece un limite inferiore, per la presenza di $f(t)$ sotto radici, uguale a zero. Unendo i vincoli si ha infine:

$$[4-67] \quad 0 \leq f(t) \leq 1$$

Per completezza possiamo notare che se facciamo tendere il valore della velocità della luce ad infinito la $f(t)$ assume il valore newtoniano:

$$[4-68] \quad \lim_{c \rightarrow \infty} f(t) = 1$$

e di conseguenza il moto browniano riscaldato tende a quello standard:

$$[4-69] \quad \lim_{c \rightarrow \infty} B(\tau) = B(t)$$

È possibile infine indicare, senza dare in questa sede le relative dimostrazioni (che possono essere trovate nel rif. [30]), alcuni concetti legati all'energia totale ε che il segnale $X(t)$ possiede (calcolata con riferimento alla tensione in uscita del ricevitore e considerando la conduttanza di valore unitario):

$$[4-70] \quad \varepsilon \equiv \int_0^T X^2(t) dt$$

dove ε rappresenta però una variabile aleatoria e T il tempo di integrazione (cioè la durata di ricezione del segnale). Usando lo sviluppo di KL, si può dimostrare che questa nuova variabile aleatoria è esprimibile in termini delle variabili aleatorie Z_n per mezzo della seguente serie infinita (la cui convergenza è conseguenza della convergenza dello sviluppo di KL):

$$[4-71] \quad \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^2$$

Si possono anche definire due grandezze caratteristiche legate all'energia totale del segnale, il suo valore medio:

$$[4-72] \quad \langle \varepsilon \rangle = \int_0^T dt \int_0^t f^2(t) dt$$

e la sua varianza:

$$[4-73] \quad \sigma_\varepsilon^2 = 4 \int_0^T dt \int_0^t dt \left[\int_0^t f^2(t) dt \right]^2$$

Per il caso del moto browniano standard, per cui $f(t)=1$, si ha un valore medio dell'energia totale pari a:

$$[4-74] \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{T^2}{2}$$

mentre la varianza risulta essere:

$$[4-75] \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{T^4}{3}$$

4.2.2 KLT per il caso semplice del moto uniforme

Vediamo in questa sezione l'applicazione dei risultati appena ottenuti al caso particolare di una sonda che viaggia a velocità relativistiche con moto uniforme.

Consideriamo la velocità della sonda pari al valore costante:

$$[4-76] \quad u(t) = u_k$$

Utilizzando tale valore è possibile ricavare esplicitamente la funzione di riscaldamento del tempo $f(t)$ che risulta essere un'altra costante e che indicheremo con K :

$$[4-77] \quad f(t) = \left[1 - \frac{u_k^2}{c^2} \right]^{1/4} = K$$

Dalla [4-52] si può ottenere quindi, per sostituzione del valore appena definito, l'espressione della funzione che rappresenta il moto browniano riscaldato:

$$[4-78] \quad X(t) = B\left(\int_0^t f^2(t) dt\right) = B\left(\int_0^t K^2 dt\right) = K B(t)$$

dove l'ultimo passaggio nella precedente espressione è possibile per la proprietà di self-similarità di ordine $1/2$ del moto browniano, per il quale si ha in generale:

$$[4-79] \quad B(kt) = \sqrt{k} B(t)$$

dove $k \geq 0$.

Quindi dalla [4-52], che riscriviamo in questo modo:

$$[4-80] \quad X(t) = B(\tau)$$

e dalla [4-78] sopra scritta, si ottiene:

$$[4-81] \quad B(\tau) = K B(t)$$

È possibile ricavare tutti i termini utili per la [4-53], noto il valore di $f(t)$, così da ottenere nuovamente l'espressione [4-81] ma in forma esplicita, cioè come nella [4-31].

Se effettuassimo tutti i passaggi necessari, che qui evitiamo per brevità, si avrebbero i seguenti valori:

$$[4-82] \quad \chi(t) = K \sqrt{t}$$

$$[4-83] \quad \chi'(t) = \frac{K}{2\sqrt{t}}$$

$$[4-84] \quad \mu(t) = \frac{1}{2}$$

$$[4-85] \quad J_{\mu(t)}(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$[4-86] \quad \gamma_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$[4-87] \quad N_n = \frac{\sqrt{\gamma_n \pi}}{KT}$$

Moltiplicando tra loro in modo opportuno tutti questi termini si ottengono i valori delle autofunzioni che risultano essere gli stessi del moto browniano standard.

Gli autovalori, invece, risultano essere:

$$[4-88] \quad \lambda_n = \frac{K^2 T^2}{\gamma_n^2}$$

da cui le variabili aleatorie si trasformano in:

$$[4-89] \quad Z_n = K Z_n^0$$

dove Z_n^0 rappresentano le variabili aleatorie nel caso di velocità della sonda nulla, o se si preferisce nel caso in cui $f(t) = 1$, cioè nel caso di moto browniano standard.

Infine, riotteniamo la [4-81]:

$$[4-90] \quad B(\tau) = K \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^0 \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \frac{t}{T} \right] \right\} = K B(t)$$

Ovviamente tale espressione poteva semplicemente essere riottenuta moltiplicando per K l'espressione [4-29] e sostituendo a Z_n il simbolo Z_n^0 . Agendo in questo modo, però, abbiamo ottenuto anche i valori espliciti di tutti i termini che compongono le autofunzioni dello sviluppo in serie e abbiamo visto che in realtà tali autofunzioni sono le stesse del caso standard e ciò che varia sono solamente le variabili aleatorie Z_n secondo la legge [4-89], come già accennato.

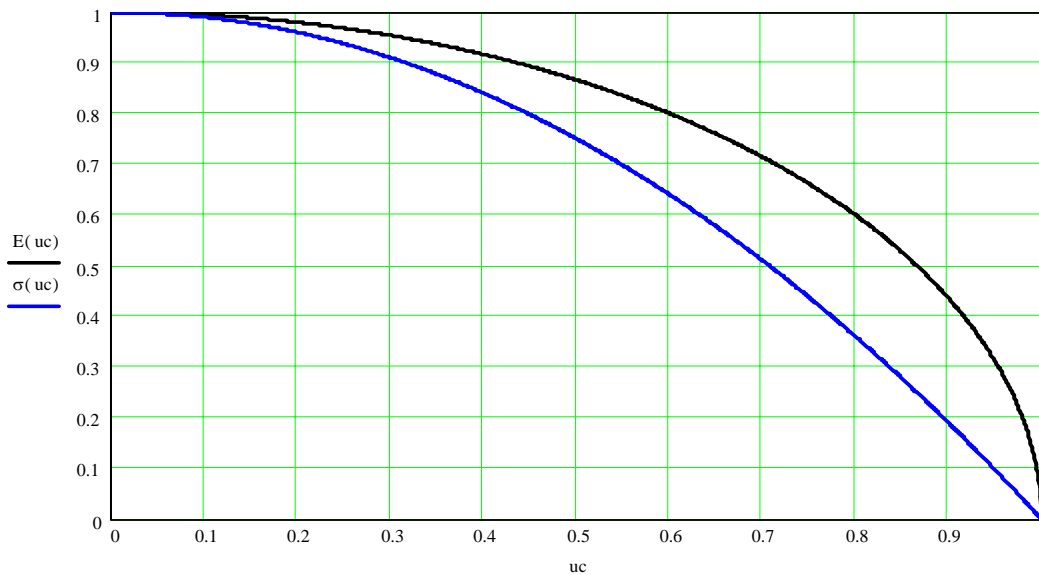
Per concludere, mostriamo i valori dei principali parametri legati all'energia totale del segnale, ottenibili dalle [4-72] e [4-73] essendo nota la [4-77]. Il valore medio dell'energia vale:

$$[4-91] \quad \langle \varepsilon \rangle = K^2 \frac{T^2}{2}$$

mentre la varianza risulta essere:

$$[4-92] \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = K^4 \frac{T^4}{3}$$

Si noti come i valori siano uguali a quelli del moto browniano standard a meno di un fattore moltiplicativo pari ad una potenza di K . A causa di questo fattore K , legato dalla [4-77] alla velocità di volo della sonda, l'energia media e la varianza del segnale ricevuto a terra diminuiscono all'aumentare della velocità della sonda in moto uniforme, come dal diagramma di [Fig. 4-3], a parità di durata totale della trasmissione T .



[Fig. 4-3]

Energia media, qui indicata con E , e varianza, indicata semplicemente con σ , (adimensionalizzate rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard) di un segnale trasmesso da una sonda in moto uniforme all'aumentare della velocità di volo, indicata con uc , adimensionalizzata rispetto alla velocità della luce

Otteniamo un diagramma di questo tipo esplicitando il legame tra K e la velocità di volo della sonda e sostituendolo nelle [4-91] e [4-92]:

$$[4-93] \quad \langle \varepsilon \rangle = \sqrt{1 - \frac{u_k^2}{c^2}} \frac{T^2}{2}$$

e:

$$[4-94] \quad \sigma_\varepsilon^2 = \left(1 - \frac{u_k^2}{c^2}\right) \frac{T^4}{3}$$

Si noti che l'energia media del segnale trasmesso dalla sonda si riduce al 90% di quello di riferimento, cioè del moto browniano, solo per velocità di volo pari a circa il 44% della velocità della luce, mentre tale energia si dimezza per velocità pari a circa l'87% di c .

Sappiamo che il 44% della velocità della luce è già un valore enormemente alto per una sonda, per cui si può, con buona approssimazione, supporre che nella pratica, sicuramente quella attuale, l'energia del segnale trasmesso non subisce variazioni degne di nota anche se la sonda che lo invia è in moto uniforme rispetto al riferimento a terra.

Ragionamenti analoghi è possibile farli anche per la varianza, che subisce però variazioni per valori più bassi della velocità della sonda.

4.3 KLT per il moto iperbolico

Studiamo ora il caso del moto iperbolico, moto particolarmente importante per i viaggi interstellari, come già più volte detto, data la semplicità della trattazione analitica delle equazioni che lo rappresentano.

Consideriamo, come nel primo capitolo, una sonda che viaggia con accelerazione propria costante a_0 . L'andamento della velocità nel tempo risulta essere, come dalla [1-82], il seguente:

$$[4-95] \quad u(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}$$

È possibile quindi calcolare esplicitamente il valore della funzione $f(t)$ sostituendo la precedente espressione nella [4-64]:

$$[4-96] \quad f(t) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2\right]^{1/4}}$$

Se sostituiamo tale espressione nella [4-59] si ottiene il legame tra il tempo riscaldato, cioè il tempo proprio, e il tempo coordinato:

$$[4-97] \quad \tau(t) = \frac{c}{a_0} \operatorname{asinh}\left(\frac{a_0 t}{c}\right)$$

o ugualmente:

$$[4-98] \quad \tau(t) = \frac{c}{a_0} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2} + \frac{a_0 t}{c} \right]$$

ma tali espressione sono quelle ben note del moto iperbolico già ricavate per altra via e corrispondenti rispettivamente alle [1-89] e [1-91].

Infine, possiamo ottenere il moto browniano riscaldato $B(\tau)$:

$$[4-99] \quad X(t) = B(\tau) = B \left[\frac{c}{a_0} \operatorname{asinh} \left(\frac{a_0 t}{c} \right) \right] = B \left\{ \frac{c}{a_0} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2} + \frac{a_0 t}{c} \right] \right\}$$

Purtroppo lo sviluppo in serie di KL di tale espressione non può essere calcolata analiticamente perché non sono calcolabili analiticamente molti degli integrali contenenti la funzione $f(t)$. Sorprendentemente, però, risulta essere trattabile analiticamente il caso asintotico, per $t \rightarrow \infty$, della [4-99], e ciò verrà fatto nel paragrafo 4.4.

Per concludere lo studio del moto iperbolico, affrontiamo l'aspetto energetico, come già fatto per il moto uniforme, il quale, per fortuna, può essere trattato esplicitamente.

Sostituiamo il valore di $f(t)$ dato dalla [4-96] nella [4-72] così da ottenere, dopo alcuni passaggi, il valor medio della variabile aleatoria che rappresenta l'energia del “segnale+rumore” nel lasso di tempo fra 0 e T :

$$[4-100] \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{c^2}{a_0^2} \left[\frac{a_0 T}{c} \operatorname{asinh} \left(\frac{a_0 T}{c} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 T}{c} \right)^2} + 1 \right]$$

La varianza corrispondente la si può ottenere sostituendo la $f(t)$ nella [4-73] e calcolando i relativi integrali, da cui risulta:

$$[4-101] \quad \sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{c}{a_0} \right)^4 \left\{ \left[2 \left(\frac{a_0 T}{c} \right)^2 - 1 \right] \operatorname{asinh}^2 \left(\frac{a_0 T}{c} \right) + \right. \\ \left. - 6 \left(\frac{a_0 T}{c} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 T}{c} \right)^2} \operatorname{asinh} \left(\frac{a_0 T}{c} \right) + 7 \left(\frac{a_0 T}{c} \right)^2 \right\}$$

Se calcoliamo il limite di queste due ultime espressioni per $a_0 \rightarrow 0$, cioè per accelerazione propria nulla, si riottiene un valore di energia media pari a quello già visto per il caso del moto browniano standard, cioè:

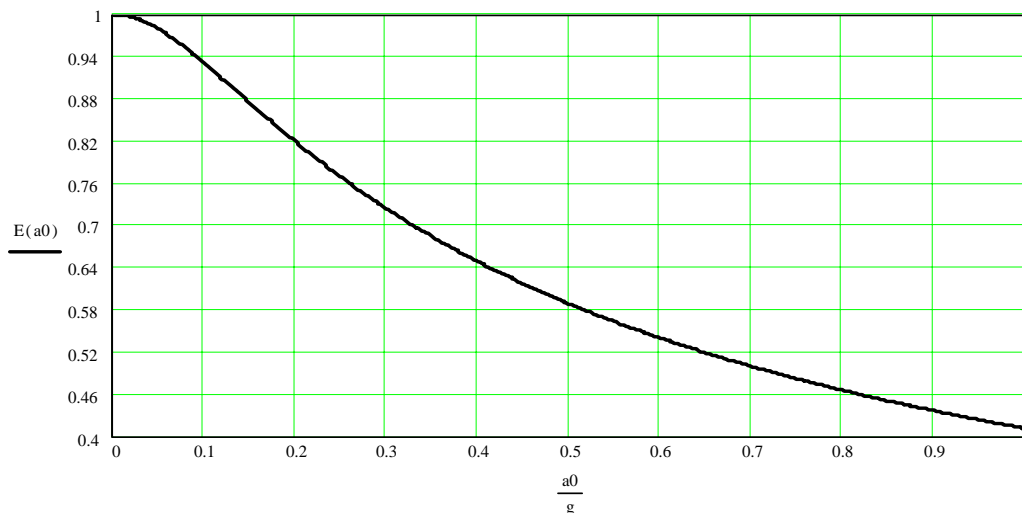
$$[4-102] \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{T^2}{2}$$

e analogamente per la varianza:

$$[4-103] \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{T^4}{3}$$

Possiamo osservare che in linea di principio si sarebbero dovuti ottenere i valori del moto uniforme e non di quello particolare del moto browniano standard, ma ciò non è successo perché la velocità della sonda, la [4-95], è stata calcolata assumendo una velocità iniziale nulla, alla quale ci si riconduce proprio se $a_0 \rightarrow 0$.

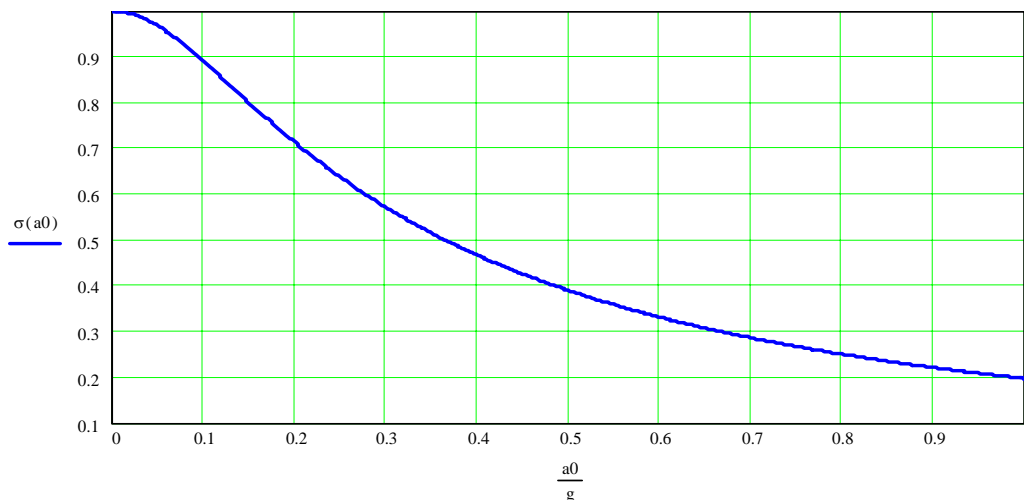
Se diagrammiamo quindi le espressioni [4-102] e [4-103], al variare dell'accelerazione propria, otteniamo le [Fig. 4-4] e [Fig. 4-5].



[Fig. 4-4]

Energia media, qui indicata con E (adimensionalizzata rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard, cioè con $a_0 = 0$ e velocità iniziale nulla), di un segnale trasmesso da una sonda, in moto iperbolico, rispetto al valore dell'accelerazione della stessa, indicata con a_0 , e adimensionalizzata rispetto a g .

Il tempo totale considerato è 10 anni



[Fig. 4-5]

Varianza, qui indicata con σ (adimensionalizzata rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard, cioè con $a_0 = 0$ e velocità iniziale nulla), di un segnale trasmesso da una sonda, in moto iperbolico, rispetto al valore dell'accelerazione della stessa, indicata con a_0 , e adimensionalizzata rispetto a g . Il tempo totale considerato è 10 anni

Nei due diagrammi consideriamo un tempo totale T di durata della trasmissione pari a 10 anni, valore ragionevole se supponiamo un viaggio interstellare verso le stelle più vicine, e adimensionalizziamo l'energia media e la varianza del segnale rispetto ai corrispondenti valori del moto browniano standard appena visti.

4.4 KLT di crociera per il moto iperbolico asintotico

In questa sezione supereremo le difficoltà analitiche, che impedivano di calcolare un'espressione esplicita per lo sviluppo di KL del segnale $X(t)$ nel caso di sonda in moto iperbolico, ricorrendo alla espressione asintotica di questo moto per $t \rightarrow \infty$ (useremo il pedice ∞ per indicare i termini asintotici).

Per prima cosa calcoliamo il tempo riscaldato per $t \rightarrow \infty$, utilizzando l'espressione [4-97] e indicandolo con τ_∞ :

$$[4-104] \quad \tau_\infty(t) = \frac{c}{a_0} \ln \left(2 \frac{a_0 t}{c} \right)$$

Ottenuto questo risultato possiamo subito riscrivere la [4-99], che indica il moto browniano riscaldato, per il caso asintotico:

$$[4-105] \quad X_{\infty}(t) = B_{\infty}(\tau) = B_{\infty} \left[\frac{c}{a_0} \ln \left(2 \frac{a_0 t}{c} \right) \right]$$

Sappiamo anche dall'espressione [4-61] il legame tra il tempo riscaldato, cioè il tempo proprio dato dalla [4-104], e la funzione $f(t)$, che in questo caso risulta essere:

$$[4-106] \quad \int_0^t f_{\infty}^2(t) dt = \frac{c}{a_0} \ln \left(2 \frac{a_0 t}{c} \right)$$

Differenziando ed estraendo la radice quadrata possiamo ottenere il valore della funzione $f_{\infty}(t)$:

$$[4-107] \quad f_{\infty}(t) = \sqrt{\frac{c}{a_0 t}}$$

Ottenuta tale espressione possiamo quindi calcolare tutti i termini necessari per esplicitare lo sviluppo in serie di KL.

Il primo termine lo otteniamo dalla [4-55]:

$$[4-108] \quad \chi_{\infty}(t) = \sqrt{2 \frac{c}{a_0}}$$

ed essendo costante si ottiene immediatamente:

$$[4-109] \quad \chi'_{\infty}(t) = 0$$

È possibile quindi ricavare l'ordine della funzione di Bessel utilizzando la [4-54]:

$$[4-110] \quad \mu_{\infty}(t) = 0$$

La funzione di Bessel di ordine zero presente nello sviluppo in serie di KL, come si vede nella [4-53], è:

$$[4-111] \quad J_0 \left(\gamma_{n,\infty} \sqrt{\frac{t}{T}} \right)$$

Per determinare i valori di $\gamma_{n,\infty}$ si può utilizzare la formula [4-56], che, dopo tutte le sostituzioni e semplificazioni dovute, si riduce a:

$$[4-112] \quad J'_0(\gamma_{n,\infty}) = 0$$

formula della quale bisogna determinare gli zeri positivi che sono appunto i $\gamma_{n,\infty}$ voluti. Per le proprietà delle funzioni di Bessel, risulta in realtà che la [4-112] equivale a:

$$[4-113] \quad J_1(\gamma_{n,\infty}) = 0$$

dove si ha la funzione di Bessel al primo ordine invece della derivata di quella di ordine zero. I risultati sono ottenibili per via numerica.

Se però ci accontentiamo di un'approssimazione asintotica anche per la funzione di Bessel del primo ordine, è possibile ottenere un'espressione analitica per i $\gamma_{n,\infty}$ che ci fornisce valori molto vicini a quelli ottenibili per via numerica. Essa vale:

$$[4-114] \quad \gamma_{n,\infty} \approx \frac{\pi}{4}(4n+1)$$

Gli autovalori sono, come visto nella [4-59], legati ai $\gamma_{n,\infty}$ e alla $f_\infty(t)$ e valgono:

$$[4-115] \quad \lambda_n = \frac{4cT}{a_0} \cdot \frac{1}{\gamma_{n,\infty}^2}$$

dove i $\gamma_{n,\infty}$ possono essere quelli numerici o quelli asintotici (ricordiamo che tali autovalori rappresentano le varianze delle variabili aleatorie $Z_{n,\infty}$).

Dalla [4-57] otteniamo i valori delle costanti $N_{n,\infty}$ che sono:

$$[4-116] \quad N_{n,\infty} = \sqrt{\frac{a_0}{2cT}} \cdot \frac{1}{|J_0(\gamma_{n,\infty})|}$$

Questi valori possono essere calcolati numericamente, per via delle funzioni di Bessel, o possono essere determinati analiticamente utilizzando l'approssimazione asintotica delle stesse funzioni, così da avere:

$$[4-117] \quad N_{n,\infty} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a_0}{cT}} \sqrt{4n+1}$$

Ottenute tutte queste espressioni possiamo quindi esprimere esplicitamente lo sviluppo in serie di KL del moto browniano riscaldato per il moto iperbolico asintotico:

$$[4-118] \quad B_\infty \left[\frac{c}{a_0} \ln \left(2 \frac{a_0 t}{c} \right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n,\infty} \frac{1}{\sqrt{T} |J_0(\gamma_{n,\infty})|} J_0 \left(\gamma_{n,\infty} \sqrt{\frac{t}{T}} \right)$$

Tale sviluppo in serie può essere calcolato solo numericamente, data la presenza dei $\gamma_{n,\infty}$ e delle funzioni di Bessel. Se invece ci accontentiamo della versione approssimata (asintotica) abbiamo:

$$[4-119] \quad B_\infty \left[\frac{c}{a_0} \ln \left(2 \frac{a_0 t}{c} \right) \right] \approx \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n,\infty} \frac{1}{(T \cdot t)^{1/4}} \cos \left[\frac{\pi}{4} \left((4n+1) \sqrt{\frac{t}{T}} - 1 \right) \right]$$

Esiste una condizione di validità per queste due ultime espressioni legata al valore della velocità della sonda nel caso di moto iperbolico asintotico, valore dato dalla [4-65], che qui riportiamo:

$$[4-120] \quad u(t) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a_0 t} \right)^2}$$

Da questa espressione risulta infatti ovvio che per la non negatività del radicando deve essere:

$$[4-121] \quad 1 - \left(\frac{c}{a_0 t} \right)^2 \geq 0$$

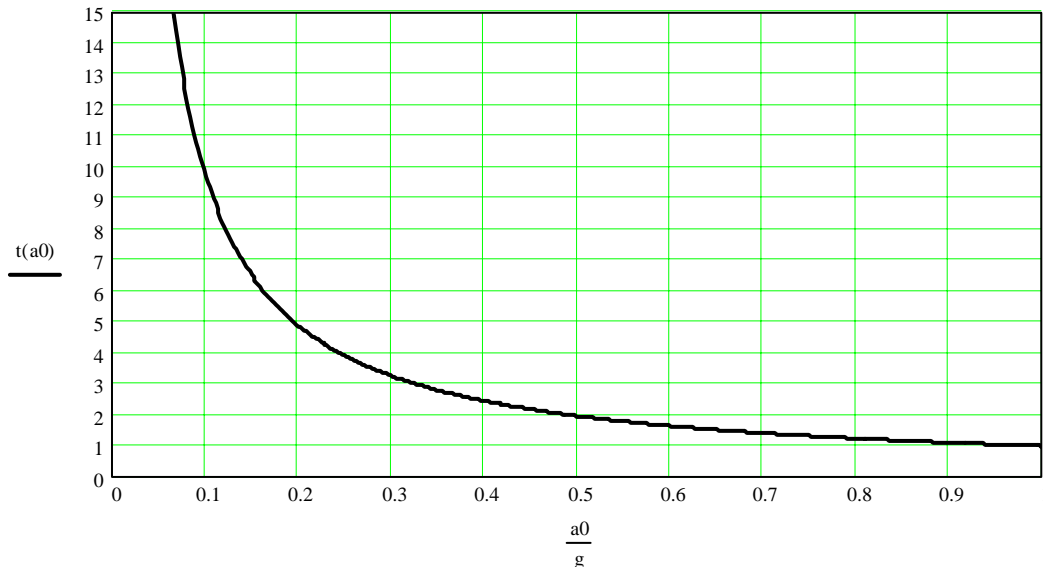
per cui:

$$[4-122] \quad t \geq \frac{c}{a_0}$$

Se diagrammiamo tale andamento, per valori di accelerazione compresi tra zero e l'accelerazione gravitazionale terrestre media, si ha la [Fig. 4-6].

Da questo grafico è possibile vedere che se l'accelerazione della sonda è superiore, ad esempio, a un decimo di quella terrestre il tempo minimo necessario di durata della missione è 10 anni, cioè un tempo accettabile anche per una missione umana. O viceversa, se si vuole che la missione possa durare al minimo quattro anni, ad esempio, l'accelerazione minima che la sonda deve avere è circa il 25% di quella gravitazionale terrestre. Quindi se si rispettano questi vincoli temporali è possibile sfruttare la semplicità dello studio asintotico sulla KLT per la progettazione dei sistemi di telecomunicazioni.

Per concludere anche questa sezione vediamo quali sono i valori energetici del segnale nel caso asintotico.



[Fig. 4-6]

Tempo coordinato minimo $t(a_0)$, valore del tempo totale della missione espresso in anni, necessario per garantire la validità dello studio asintotico al variare dell'accelerazione propria della sonda, indicata come sempre con a_0 , adimensionata rispetto all'accelerazione gravitazionale terrestre g

L'energia media data dalla [4-72] vale:

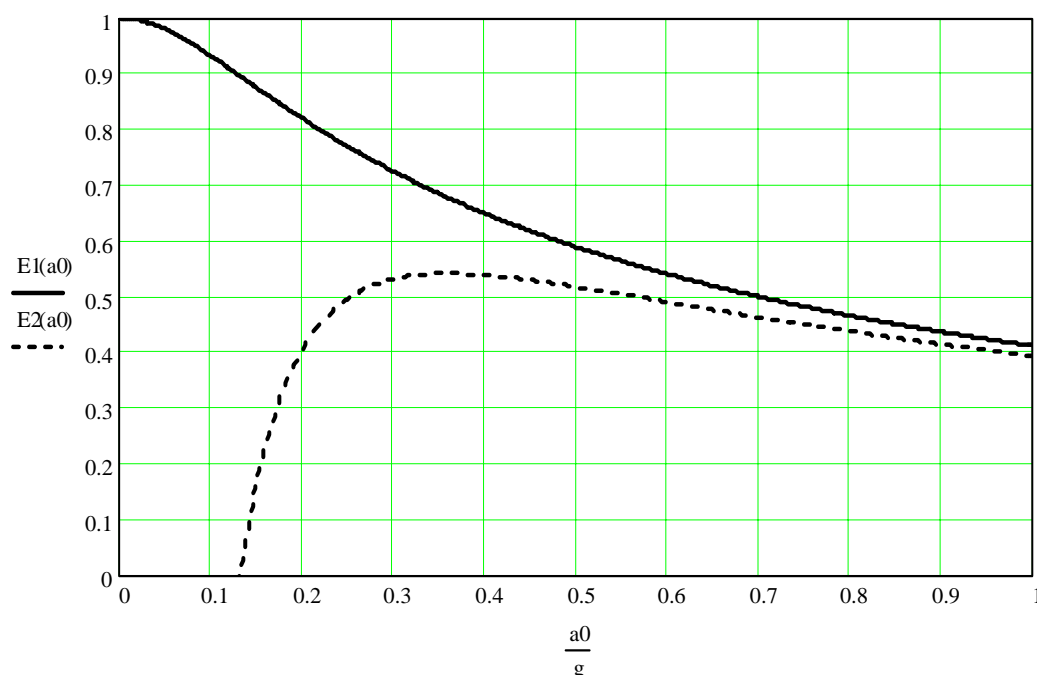
$$[4-123] \quad \langle \varepsilon \rangle_\infty = \frac{cT}{a_0} \left[\ln \left(2 \frac{a_0 T}{c} \right) - 1 \right]$$

e la varianza data dalla [4-73]:

$$[4-124] \quad \sigma_{\varepsilon, \infty}^2 = \left(\frac{cT}{a_0} \right)^2 \left[2 \ln^2 \left(2 \frac{a_0 T}{c} \right) - 6 \ln \left(2 \frac{a_0 T}{c} \right) + 7 \right]$$

Diagrammiamo ora questi due ultimi andamenti in funzione dell'accelerazione propria sovrapponendo tali diagrammi a quelli esatti di [Fig. 4-4] e [Fig. 4-5], per un valore di $T = 10 \text{ year}$ nel primo caso e $T = 5 \text{ year}$ nel secondo.

Nel diagramma [Fig. 4-7] rappresentiamo l'andamento dell'energia media, adimensionata rispetto a quella del moto browniano standard. Si nota come i valori divergano notevolmente da quelli esatti per accelerazioni inferiori al 40% di g , cioè solo se i valori di accelerazione sono elevati non si nota una grossa differenza tra valori esatti e approssimati.



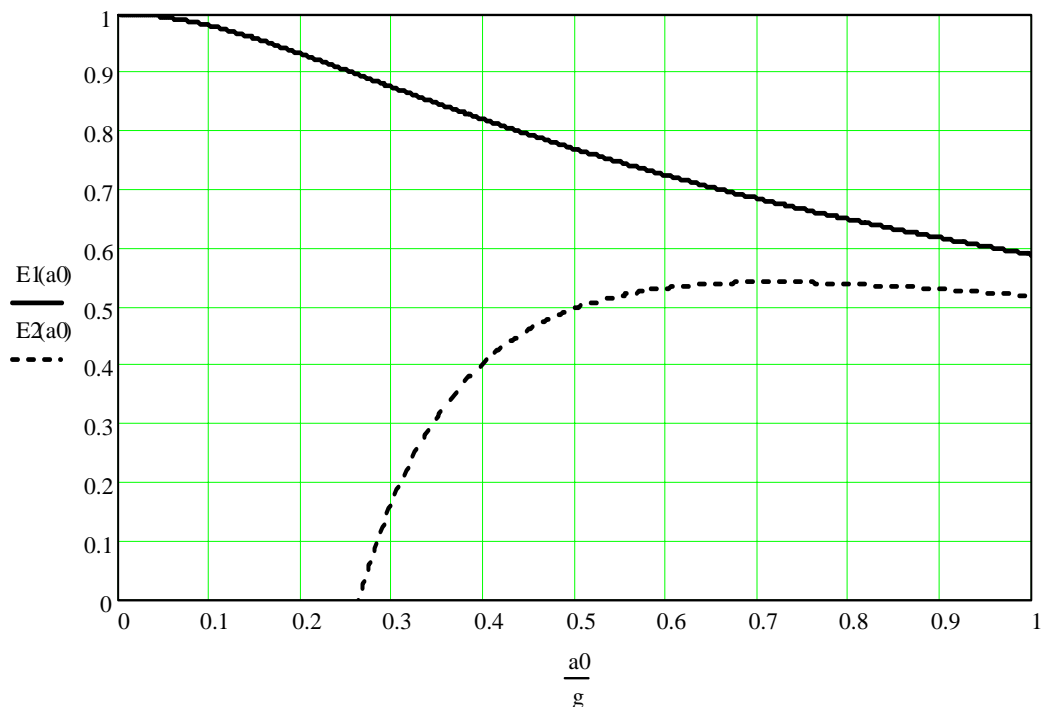
[Fig. 4-7]

Confronto tra energia media del moto iperbolico, qui indicata con $E1$ (adimensionalizzata rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard, cioè con $a_0 = 0$), e energia media del moto iperbolico asintotico, indicata con $E2$, al variare dell'accelerazione propria della sonda, indicata con a_0 e adimensionalizzata rispetto all'accelerazione g . Il tempo totale considerato è 10 anni

Se invece riduciamo il tempo coordinato totale della missione a 5 anni si nota nel diagramma di [Fig. 4-8] come la divergenza tra i valori esatti e quelli approssimati avvenga già per accelerazioni uguali al 90% di g , quindi il margine accelerazioni accettabili è diminuito notevolmente.

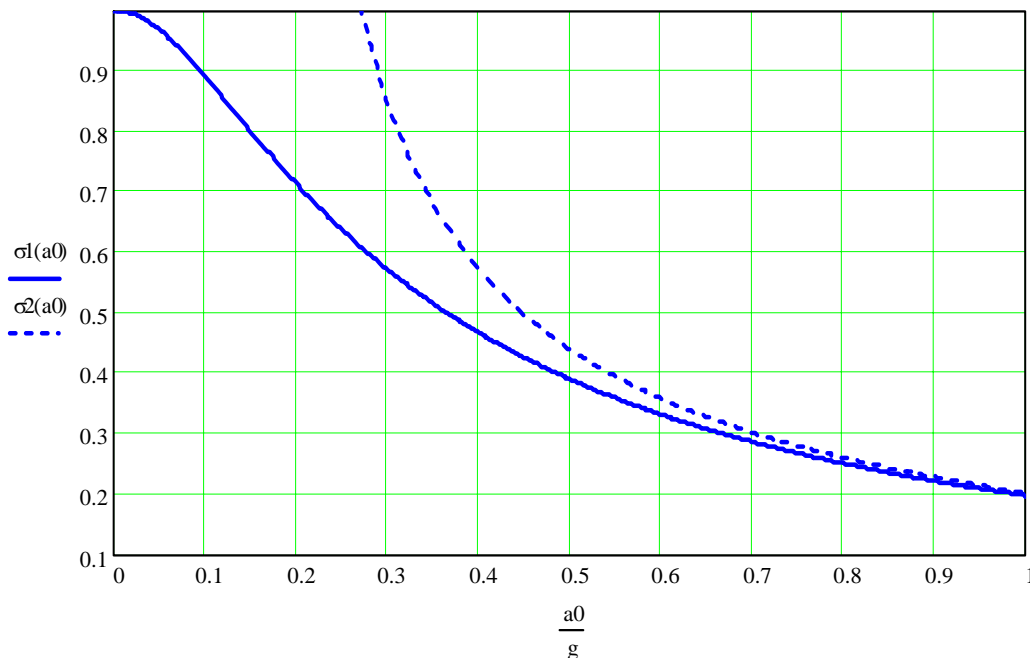
Il tempo della missione gioca quindi un ruolo importantissimo nei confronti delle approssimazioni per i parametri energetici considerati, infatti più è elevato tale tempo migliore sarà l'approssimazione anche per accelerazioni basse, imponendo quindi una grossa attenzione durante lo svolgimento dei calcoli numerici di una missione reale.

Analogamente per la varianza la divergenza si evidenzia circa per gli stessi valori di accelerazione propria, come si nota dalle [Fig. 4-9] e [Fig. 4-10].



[Fig. 4-8]

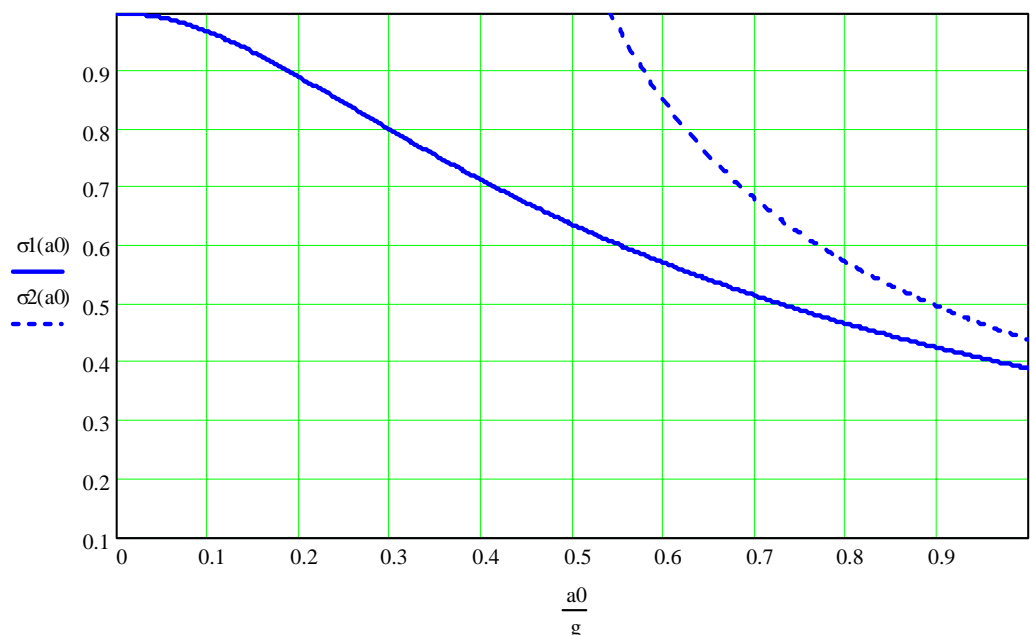
Confronto tra energia media del moto iperbolico, qui indicata con $E1$ (adimensionalizzata rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard, cioè con $a_0 = 0$), e energia media del moto iperbolico asintotico, indicata con $E2$, al variare dell'accelerazione propria della sonda, indicata con a_0 e adimensionalizzata rispetto all'accelerazione g . Il tempo totale considerato è 5 anni



[Fig. 4-9]

Confronto tra varianza per il moto iperbolico, qui indicata con σ_1 (adimensionalizzata rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard, cioè con $a_0 = 0$), e varianza per il moto iperbolico asintotico, indicata con σ_2 , al variare dell'accelerazione propria della sonda, indicata con a_0 e adimensionalizzata rispetto all'accelerazione g .

Il tempo totale considerato è 10 anni



[Fig. 4-10]

Confronto tra varianza per il moto iperbolico, qui indicata con σ_1 (adimensionalizzata rispetto ai valori di riferimento del moto browniano standard, cioè con $a_0 = 0$), e varianza per il moto iperbolico asintotico, indicata con σ_2 , al variare dell'accelerazione propria della sonda, indicata con a_0 e adimensionalizzata rispetto all'accelerazione g .

Il tempo totale considerato è 5 anni

4.5 KLT durante l'accelerazione di partenza e decelerazione di arrivo

Consideriamo il particolare caso in cui il tempo proprio sia proporzionale ad una potenza reale e positiva del tempo coordinato:

$$[4-125] \quad \tau_H(t) = C t^{2H}$$

dove C è una costante, H una variabile reale e il fattore 2 ad esponente è introdotto solo per comodità di raffronto con l'opera di Benoit Mandelbrot sui "moti browniani frazionari". È da notare il pedice H che indica la dipendenza anche da questa variabile, per cui in seguito useremo sempre questa notazione.

Dalla [4-61], che definisce il tempo riscalo per il moto browniano, si ottiene, dopo alcuni semplici passaggi, il valore della funzione $f_H(t)$:

$$[4-126] \quad f_H(t) = \sqrt{2HC} t^{H-1/2}$$

Di conseguenza, dalla [4-65], l'andamento della velocità nel tempo risulta essere:

$$[4-127] \quad u_H(t) = c \sqrt{1 - (2HC)^2 \cdot t^{2(2H-1)}}$$

Per garantire la non negatività del radicando di tale espressione deve essere:

$$[4-128] \quad (2HC)^2 \cdot t^{2(2H-1)} \leq 1$$

L'istante iniziale dal quale inizia la decelerazione lo scegliamo per convenzione uguale a zero e l'istante finale uguale a T come fatto sempre finora, da cui deve essere necessariamente:

$$[4-129] \quad 2H - 1 \geq 0$$

e quindi:

$$[4-130] \quad H \geq \frac{1}{2}$$

Se pensiamo alla decelerazione di arrivo, supponendo che per $t = T$ si abbia $u_H(T) = 0$, si ottiene il valore della costante C :

$$[4-131] \quad C = \frac{1}{2HT^{2H-1}}$$

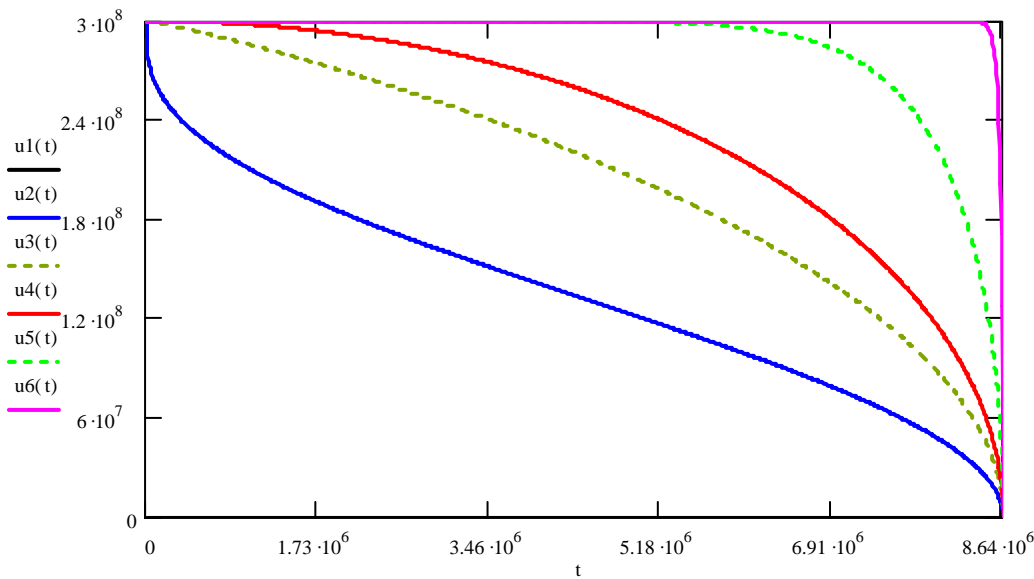
In conclusione, la funzione $f_H(t)$ risulta essere:

$$[4-132] \quad f_H(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^{H-1/2}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella [4-65] si ha quindi:

$$[4-133] \quad u_H(t) = c \sqrt{1 - \left(\frac{t}{T}\right)^{2(2H-1)}}$$

Diagrammiamo quindi l'andamento della velocità della sonda, supponendo una durata della decelerazione pari a 100 giorni e per sei diversi valori di H :



[Fig. 4-11]

Andamento della velocità della sonda durante la fase di decelerazione di arrivo. Supponiamo una durata di decelerazione pari a 100 giorni, e rappresentiamo l'andamento per sei differenti valori di H .

$H1 = 0.5$ caso del moto browniano standard (rappresentato da una velocità costantemente nulla), $H2 = 0.58$, $H3 = 0.78$, $H4 = 1$ valore che fornisce un andamento ellittico, $H5 = 3$ e, infine, $H6 = 50$ valore che fa tendere sempre di più l'andamento ad un rettangolo

Si noti che la velocità iniziale della sonda è stata scelta essere pari a c .
La relazione [4-125] può quindi essere scritta esplicitamente come:

$$[4-134] \quad \tau_H(t) = \frac{t^{2H}}{2HT^{2H-1}}$$

Utilizzando quest'espressione possiamo quindi studiare lo sviluppo di KL. Scriviamo l'espressione generale [4-52] come:

$$[4-135] \quad X_H(t) = B_H \left(\frac{t^{2H}}{2HT^{2H-1}} \right)$$

Per la proprietà di self-similarità del moto browniano si ha:

$$[4-136] \quad X_H(t) = \frac{1}{\sqrt{2H} \cdot T^{H-1/2}} \cdot B_H(t^{2H})$$

Ricordando l'espressione [4-53] per la $X_H(t)$, indichiamo di seguito i valori dei vari termini contenuti in essa, calcolati per questo caso specifico:

$$[4-137] \quad \chi_H(t) = \frac{t^H}{\sqrt{H + \frac{1}{2}} \cdot T^{H-1/2}}$$

$$[4-138] \quad \chi_H'(t) = \frac{H t^{H-1}}{\sqrt{H + \frac{1}{2}} \cdot T^{H-1/2}}$$

$$[4-139] \quad \mu_H = \frac{2H}{2H+1}$$

è da notare che il grado μ_H della funzione di Bessel è costante nel tempo ed è solo funzione del parametro H . Dato il campo di variazione di H da $1/2$ a ∞ segue di conseguenza che μ_H varia da $1/2$ a 1 .

I termini $\gamma_{n,H}$ corrispondono agli zeri della funzione di Bessel di ordine $\mu_H - 1$:

$$[4-140] \quad J_{\mu_H-1}(\gamma_{n,H}) = 0$$

ottenibili solo per via numerica. È possibile però darne un'espressione approssimata, cioè asintotica per grandi valori dell'argomento delle funzioni di Bessel:

$$[4-141] \quad \gamma_{n,H} \approx n\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(2H+1)}$$

Nello sviluppo in serie di KL è presente anche $|J_{\mu_H}(\gamma_{n,H})|$ esprimibile numericamente, o in via approssimata:

$$[4-142] \quad |J_{\mu_H}(\gamma_{n,H})| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_{n,H}}}$$

Le costanti di normalizzazione $N_{n,H}$ sono:

$$[4-143] \quad N_{n,H} = \frac{\left(H + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2}}{T \cdot |J_{\mu_H}(\gamma_{n,H})|}$$

o, nell'approssimazione asintotica esplicitando il valore di $J_{\mu_H}(\gamma_{n,H})$ indicato dalla [4-142], si ha:

$$[4-144] \quad N_{n,H} \approx \frac{\pi}{T} \left(H + \frac{1}{2} \right) \sqrt{n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2(2H+1)}}$$

Gli autovalori $\lambda_{n,H}$ valgono:

$$[4-145] \quad \lambda_{n,H} = \frac{T^2}{\left(H + \frac{1}{2} \right)^2} \cdot \frac{1}{\gamma_{n,H}^2}$$

o, nell'approssimazione asintotica:

$$[4-146] \quad \lambda_{n,H} \approx \frac{T^2}{\left(H + \frac{1}{2} \right)^2} \cdot \frac{1}{\pi^2 \left[n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2(2H+1)} \right]^2}$$

In conclusione l'espressione esatta della $X_H(t)$ vale:

$$[4-147] \quad X_H(t) = \frac{\sqrt{2H+1} \cdot t^H}{T^{H+1/2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n,H} \frac{1}{J_{\mu_H}(\gamma_{n,H})} J_{\mu_H} \left(\gamma_{n,H} \left(\frac{t}{T} \right)^{H+1/2} \right)$$

Anche per la $X_H(t)$, infine, possiamo indicare l'espressione asintotica approssimata:

$$[4-148] \quad X_H(t) \approx \frac{\sqrt{2H+1} \cdot t^{H/2-1/4}}{T^{H/2+1/4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n,H} \sin \left(\gamma_{n,H} \left(\frac{t}{T} \right)^{H+1/2} - \frac{2H\pi}{2(2H+1)} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Ora esprimiamo i parametri utili per valutare l'energia del segnale trasmesso. Per primo l'energia media $\langle \mathcal{E} \rangle_H$:

$$[4-149] \quad \langle \mathcal{E} \rangle_H = \frac{T^2}{2H(2H+1)}$$

e quindi la varianza:

$$[4-150] \quad \sigma_{\mathcal{E},H}^2 = \frac{T^4}{2H^2(2H+1)(4H+1)}$$

Infine, se poniamo $H = 1/2$ nelle due precedenti espressioni si riottengono i valori noti del moto browniano dati dalle [4-74] e [4-75].

4.6 KLT per un moto rettilineo con profilo arbitrario di accelerazione

Affrontiamo ora il problema generale di un moto rettilineo per il quale il profilo di accelerazione sia arbitrario, considerando una velocità iniziale nulla, e indicando l'accelerazione in ogni istante con $A(t)$. Analogamente ai calcoli affrontati nel primo capitolo per il moto iperbolico, è possibile ottenere il valore della velocità della sonda in moto:

$$[4-151] \quad u(t) = \frac{\int_0^t A(t) dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}}$$

Possiamo ottenere lo spazio percorso dalla precedente espressione, integrandola rispetto al tempo. Per farlo è bene prima effettuare alcune modifiche alla [4-151].

Usando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si può verificare che sussiste l'identità:

$$[4-152] \quad \frac{d}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2} = \frac{\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}} \cdot \frac{A(t)}{c}$$

da cui invertendo tale formula si può esattamente ottenere il secondo membro della [4-151]:

$$[4-153] \quad \frac{\int_0^t A(t) dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}} = \frac{c^2}{A(t)} \cdot \frac{d}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}$$

e quindi la velocità vale:

$$[4-154] \quad u(t) = \frac{c^2}{A(t)} \cdot \frac{d}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}$$

Possiamo ora integrare per parti tale espressione per ottenere il valore dello spazio percorso nel tempo (anche in questo caso ci si riferisce sempre al tempo coordinato):

$$[4-155] \quad x(t) = c^2 \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt\right)^2} - 1}{A(t)} + \int_0^t \left(\frac{1}{A^2(t)} \cdot \frac{dA(t)}{dt} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt\right)^2} \right) dt \right]$$

Dalla relatività ricordiamo il generico legame tra tempo proprio e tempo coordinato più volte indicato:

$$[4-156] \quad \tau(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt$$

Sostituiamo quindi la velocità data dalla [4-151] in quest'ultima e, dopo alcuni semplici passaggi, si ha:

$$[4-157] \quad \tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt\right)^2}}$$

Ora passiamo al problema del moto browniano riscaldato secondo questo nuovo tempo τ , vogliamo cioè ottenere un'espressione per:

$$[4-158] \quad X(t) = B(\tau) = B\left(\int_0^t f^2(t) dt\right)$$

Possiamo quindi ottenere il valore della funzione $f(t)$, che ricordiamo essere dalla [4-64]:

$$[4-159] \quad f(t) = \left[1 - \frac{u^2(t)}{c^2}\right]^{1/4}$$

e nel nostro caso, sostituendo la [4-151] in quest'ultima, vale:

$$[4-160] \quad f(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt\right)^2\right]^{-1/4}$$

È anche possibile invertire tale formula per indicare il valore dell'accelerazione arbitraria in funzione della funzione $f(t)$, ottenendo:

$$[4-161] \quad A(t) = -\frac{2c}{f^3(t)\sqrt{1-f^4(t)}} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

Evitando le lunghe dimostrazioni indichiamo di seguito i valori di tutte le grandezze utili per esplicitare la [4-158].

Per primo la funzione $\chi(t)$:

$$[4-162] \quad \chi(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/8} \cdot \frac{\int_0^t dt}{\left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{1/4}}$$

quindi l'ordine della funzione di Bessel:

$$[4-163] \quad \mu(t) = \sqrt{-\chi^3(t) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{d}{dt} \left[\chi'(t) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2} \right]}$$

I γ_n sono gli zeri reali positivi dell'equazione:

$$[4-164] \quad \chi'(T) \cdot J_{\mu(T)}(\gamma_n) + \chi(T) \cdot \left\{ \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/4}}{\int_0^T \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/4} dt} \cdot \gamma_n \cdot J'_{\mu(T)}(\gamma_n) + \frac{\partial J_{\mu(T)}(\gamma_n)}{\partial \mu} \cdot \mu'(T) \right\} = 0$$

mentre le costanti N_n sono gli zeri dell'equazione:

$$[4-165] \quad N_n^2 \cdot \left\{ \int_0^T \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/4} dt \right\} \cdot \int_0^1 (x J_{\mu(x)}^2(\gamma_n x)) dx = 1$$

dove l'ordine $\mu(x)$ della funzione di Bessel è ottenuto da $\mu(t)$ tramite la trasformazione:

$$[4-166] \quad \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/4} dt = x \int_0^T \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/4} dt$$

Gli autovalori λ_n sono dati da:

$$[4-167] \quad \lambda_n = \left\{ \int_0^T \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/4} dt \right\}^2 \cdot \frac{1}{\gamma_n^2}$$

ricordando che le variabili aleatorie Z_n sono ortogonali tra loro, hanno valore medio nullo e varianza λ_n .

Noti tutti questi valori possiamo quindi scrivere esplicitamente la [4-158], come nella [4-53]:

$$[4-168] \quad X(t) = B(\tau) = \left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{-1/8} \cdot \frac{\int_0^t dt}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{1/4}}}$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z_n N_n J_{\mu(t)} \left(\gamma_n \cdot \frac{\int_0^t \frac{dt}{\left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{1/4}}}{\int_0^T \frac{dt}{\left[1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2 \right]^{1/4}}} \right)$$

Per concludere indichiamo i valori di energia media e varianza dell'energia totale del segnale $X(t)$:

$$[4-169] \quad \langle \varepsilon \rangle = \int_0^T \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c} \int_0^t A(t) dt \right)^2}} dt$$

$$[4-170] \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = 4 \int_0^T dt \int_0^t dt \left[\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c_0} \int_0^t A(t) dt \right)^2}} \right]^2$$