Casistica

$A(nxm)$

se $r(A) < r(A \vdots b) \longrightarrow$ nessuna soluzione

se $r(A) = r(A \vdots b) = k\ e \begin{cases} k = m \rightarrow & \text{una sola soluzione} \\ k < m \rightarrow & \text{infinite soluzioni} \end{cases}$

Ad esempio

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b = 1$$

$r(A) = r(A \vdots b) = 1 < 2 \rightarrow \infty$ soluzioni al variare di x_2.

Esercizi

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, determinant: 10, adjugate: $\begin{bmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, inverse: $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

$r(A) = r(A \vdots b) = 3$ esiste una e una sola soluzione data da

$$x = A^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{11}{10} \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(A \vdots b) = 2 < 3$ infinite soluzioni.

Il sistema si scrive

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

che in termini di matrici diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 - 4x_3 \\ 1 - x_3 \end{bmatrix}$$

, determinant: –1, adjugate: $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, inverse: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Le soluzioni sono date da

$$x = A^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 4x_3 \\ 1 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 11x_3 \\ 3 - 7x_3 \end{bmatrix}$$

al variare di x_3

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(A \vdots b) = 2 = m$ una sola soluzione

Il sistema si scrive

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Si considerano solo le prime due e si risolve ponendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, determinant: –5, adjugate: $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, inverse: $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(A \vdots b) = 3 < 4$ infinite soluzioni. Le soluzioni sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 + x_4 \\ -1 - 5x_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + x_4 \\ -1 - 5x_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2x_4 \\ -1 + x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

, determinant: -7, adjugate: $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, inverse: $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

5. Discutere e risolvere il seguente sistema in funzione di h

$$\begin{cases} x + hy = 0 \\ hx + 4y = h + 2 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 4 \end{bmatrix}$ $(A \vdots b) = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 4 & h+2 \end{bmatrix}$

, determinant: $4 - h^2 = 0 \to h = \pm 2$ le soluzioni sono date da Cramer

$$x = \frac{-h(h+2)}{(2-h)(2+h)} = -\frac{h}{(2-h)}$$

$$y = \frac{(h+2)}{(2-h)(2+h)} = \frac{1}{(2-h)}$$

Se $h = 2$ $r(A) = 1$ e

$$(A \vdots b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2 quindi nessuna soluzione.
Se $h = -2$ $r(A) = 1$ e

$$(A \vdots b) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 1. La soluzione si riduce all'equazione

$$x - 2y = 0$$

$$x = 2y$$

$$y = y$$

6. Discutere e risolvere il seguente sistema in funzione di h

$$\begin{cases} x + hy + z = 2 \\ hx + y + z = 2h \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Per determinare il rango di A scelgo la sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{bmatrix}$ che ha det $1 - h^2$. per $h \neq \pm 1$ il rango è 2. Se $h = -1,$ dalla $\begin{bmatrix} h & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ il rango è ancora 2; se $h = 1$ il rango è 1.
Si calcola ora il rango di $(A \vdots b)$:
per $h \neq 1$ il rango è 2; per $h = 1$ è 1 quindi
$h \neq \pm 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + hy = 2 - z \\ hx + y = 2h - z \end{cases}$$

e le soluzioni sono date da Cramer

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 2-z & h \\ 2h-z & 1 \end{bmatrix}}{1-h^2} = \frac{(2-z) - h(2h-z)}{(1-h)(1+h)}$$

$$= \frac{2(1-h^2)}{1-h^2} - \frac{z(1-h)}{(1-h)(1+h)} = 2 - \frac{z}{(1+h)}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 2-z \\ h & 2h-z \end{bmatrix}}{1-h^2} = \frac{2h - z - 2h + zh}{(1-h)(1+h)}$$

$$= -\frac{z(1-h)}{(1-h)(1+h)} = -\frac{z}{(1+h)}$$

$$z = z$$

$h = -1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} hy + z = 2 - x \\ y + z = 2h - hx \end{cases}$$

e le soluzioni sono date da Cramer

$$\begin{aligned} y &= \frac{\det\begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ 2h-hx & 1 \end{bmatrix}}{h-1} = \frac{2-x-2h+hx}{h-1} \\ &= \frac{-2(h-1)+x(h-1)}{h-1} = x-2 \\ z &= \frac{\det\begin{bmatrix} h & 2-x \\ 1 & 2h-hx \end{bmatrix}}{h-1} = \frac{2h^2-h^2x-2+x}{h-1} \\ &= \frac{2(h^2-1)-x(h^2-1)}{h-1} = (2-x)(h+1) \\ x &= x \end{aligned}$$

$h = 1$ il sistema si riduce all'equazione $x + y + z = 2$ con soluzioni

$$\begin{aligned} x &= 2 - y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

7. Determinare le terne a, b, c per cui il sistema

$$\begin{cases} ax - by + 2cz = 1 + a \\ ax - 2cz = 1 \\ ax + by = 2 + a \end{cases}$$

ammette la soluzione

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione:
Sostituendo i valori si ottiene il seguente sistema nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a - 1c = 1 \\ a - 1b = 2 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

, determinant: $-4 \neq 0$. La soluzione unica è, Solution is : $\{b = -1, a = 1, c = 1\}$.

8. Determinare il valore del parametro h per cui esiste una sola terna a, b, c tale che il sistema

$$\begin{cases} ax - bhy + z = 2 \\ ax - y - c(z-1) = 1 + h \\ -ax - by + cz = c + 1 \end{cases}$$

ammetta come soluzione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Soluzione:
Sostituendo i valori si ottiene il seguente sistema nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} a + bh = 0 \\ a - c = h \\ -a + b + c = 1 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

, determinant: $1 \neq 0\ \forall h$.

9. Discutere il sistema

$$\begin{cases} hx + y = k \\ x + hy + kz = h - 1 \end{cases}$$

al variare dei parametri h e k.
Soluzione:
La matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & k \end{bmatrix}$$

dalla quale si possono estrarre le seguenti $2x2$

$$\begin{bmatrix} h & 1 \\ 1 & h \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & k \end{bmatrix}$$

i cui determinanti valgono rispettivamente

$$h^2 - 1$$
$$hk$$
$$k$$

Dal terzo si può concludere che per $k \neq 0$ e $\forall h$ il rango è 2 ed il sistema ammette ∞ soluzioni.
Se $k = 0$, dal primo si deduce che per $h \neq \pm 1$ e $\forall k$ il rango è 2 ed il sistema ammette ∞ soluzioni.
Rimangono da esaminare i casi $k = 0$ e $h = 1$ e $k = 0$ e $h = -1$.
$k = 0$ e $h = 1$ il sistema si riduce all'equazione

$$x + y = 0$$
$$x = -y$$

e si hanno ∞^2 soluzioni al variare di y e z (le incognite erano tre).
$k = 0$ e $h = -1$ l'unico vettore colonna linearmente indipendente della matrice dei coefficienti diventa $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^t$ che, accostato al vettore b forma la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

, determinant: 2 e rango 2; essendo $r(A) < r(A \vdots b)$ $\nexists$ soluzioni.

10. Discutere il sistema

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ 4x + hy = 4 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

al variare dei parametri h e k.

Soluzione:
La matrice dei coefficienti e la matrice orlata sono rispettivamente

$$\begin{bmatrix} h & 1 \\ 4 & h \\ 1 & k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 4 & h & 4 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

, determinant: $h(h-4k)$Si possono subito calcolare i valori per i quali il determinante della matrice orlata è diverso da zero in quanto in tal caso non esistono soluzioni (si noti inoltre che $r(A \vdots b) \geq 2$ in quanto $\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 4 \end{bmatrix} \neq 0$ sempre).
, determinant: $h(h-4k) = 0$, Solution is : $\{h = 0\}, \{h = 4k\}$
$\{h = 0\}$: la matrice dei coefficienti diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

che ha rango 2 $\forall k$ ($\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = -4$) quindi esiste una sola soluzione per ogni valore di k.
In particolare il sistema si riduce alle prime due equazioni che forniscono

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

$\{h = 4k\}$: la matrice dei coefficienti diventa

$$\begin{bmatrix} 4k & 1 \\ 4 & 4k \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

nella quale si nota che la seconda riga è pari a quattro volte la terza. Si scelgono dunque la prima e l'ultima per verificare il rango calcolando

$$\det\begin{bmatrix} 4k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} = 4k^2 - 1$$

che risulta pari a zero per $k = \pm\frac{1}{2}$. Quindi per $h = 4k$ e $k = \pm\frac{1}{2}$ $r(A) = 1 < r(A \vdots b) = 2$ e $\nexists$

soluzioni; per $h = 4k$ e $k \neq \pm\frac{1}{2}$ $r(A) = r(A \vdots b) = 2$ ed esiste una sola soluzione. In particolare il sistema si riduce ale due equazioni

$$\begin{cases} 4kx + y = 0 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione unica (in funzione di k) è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1-4k^2} \\ y = -\frac{4k}{1-4k^2} \end{cases}$$

11. Discutere per ogni valore dei parametri reali h e k il seguente sistema lineare e risolverlo quando possibile:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^h \\ 1 & e^{-h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$\det \begin{bmatrix} 1 & e^h \\ 1 & e^{-h} \end{bmatrix} = e^{-h} - e^h = 0$ per $h = 0$. Quindi $r(A) = 2$ per $h \neq 0$ ed esiste una soluzione unica data da:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} k & e^h \\ 0 & e^{-h} \end{bmatrix}}{e^{-h} - e^h} = \frac{ke^{-h}}{e^{-h} - e^h}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{e^{-h} - e^h} = \frac{-k}{e^{-h} - e^h}$$

Nel caso in cui $h = 0$, $A \vdots b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Estraendo la matrice $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, il cui determinante è $-k$, si deduce che $r(A \vdots b) = 1$ se $k = 0$ e 2 altrimenti. Nel secondo caso non esistono soluzioni, nel primo ne esistono ∞^1. In particolare il sistema si riduce all'equazione

$$x + y = 0$$

da cui le soluzioni

$$\begin{aligned} x &= -y \\ y &= y \end{aligned}$$

12. Discutere per ogni valore dei parametri reali h e k il seguente sistema lineare e risolverlo quando possibile:

$$\begin{bmatrix} e^h & k \\ k & e^{-h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$\det \begin{bmatrix} e^h & k \\ k & e^{-h} \end{bmatrix} = 1 - k^2 = 0$ per $k = \pm 1$ $(\forall h)$. Quindi $r(A) = 2$ per $k \neq \pm 1$ ed esiste una soluzione unica data da:

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} h & k \\ 0 & e^{-h} \end{bmatrix}}{1-k^2} = \frac{he^{-h}}{1-k^2}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} e^h & h \\ k & 0 \end{bmatrix}}{1-k^2} = \frac{-kh}{1-k^2}$$

Per $k = 1$ da $\det\begin{bmatrix} e^h & h \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -h$ si ottiene che $r(A \vdots b) = r(A) = 1$ se $h = 0$ e in tal caso si hanno ∞^1 soluzioni date dall'equazione

$$x + y = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= -y \\ y &= y \end{aligned}$$

Se $h \neq 0$ non esistono soluzioni.

Per $k = -1$da $\det\begin{bmatrix} e^h & h \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = h$ si ottiene che $r(A \vdots b) = r(A) = 1$ se $h = 0$ e in tal caso si hanno ∞^1 soluzioni date dall'equazione

$$x - y = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= y \\ y &= y \end{aligned}$$

Se $h \neq 0$ non esistono soluzioni.

13. Risolvere il seguente sistema lineare in dipendenza del parametro reale a :

$$\begin{cases} (a+1)^2x + y - 4z = 2 \\ x + y + 2az = 1 \end{cases}$$

Soluzione:

La matrice A dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} (a+1)^2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2a \end{bmatrix}$$

che, considerando $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2a \end{bmatrix}$ ha rango 2 per $a \neq -2$. In tal caso si hanno ∞^1 soluzioni date da

$$x = x$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 2-(a+1)^2x & -4 \\ 1-x & 2a \end{bmatrix}}{2a+4}$$

$$= \frac{4a-2xa^3-4xa^2-2xa+4-4x}{2a+4}$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2-(a+1)^2x \\ 1 & 1-x \end{bmatrix}}{2a+4}$$

$$= \frac{-1+xa(a+2)}{2a+4}$$

Se invece $a = -2$ $r(A) = 1$ e $A \vdots b$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha det $\neq 0$ per cui rango pari a 2 e il sistema non ha soluzioni.

14. Risolvere il seguente sistema lineare in dipendenza del parametro reale a :

$$\begin{cases} (a+1)x+(a+1)y+2z = 2(a+1) \\ ax+y+z = 2a \end{cases}$$

Soluzione:
La matrice A dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} (a+1) & (a+1) & 2 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si ”tiene” la terza colonna e si verifica il rango orlando con la prima e poi la seconda. I determinanti valgono rispettivamente, determinant: $1-a$, determinant: $a-1$ che si annullano entrambi per $a = 1$.
Se $a = 1$ allora orlando con b si ha

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è pari a zero. In tal caso esistono ∞^2 soluzioni date ad esempio dalla prima equazione

$$x = -y-z+2$$
$$y = y$$
$$z = z$$

Se $a \neq 1$ $r(A) = r(A \vdots b) = 2$ e si hanno ∞ soluzioni. Scegliendo x come variabile libera si ottiene

$$x = x$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 2(a+1)-(a+1)x & 2 \\ 2a-ax & 1 \end{bmatrix}}{a-1}$$

$$= \frac{(a-1)(x-2)}{a-1}$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} (a+1) & 2(a+1)-(a+1)x \\ 1 & 2a-ax \end{bmatrix}}{a-1}$$

$$= \frac{-(a-1)(a+1)(x-2)}{a-1}$$