Prova finale delle GMT 2004

1. Un triangolo ha due lati lunghi rispettivamente 306 e 2592. La sua area è massima quando l'altezza relativa al terzo lato vale

a) 44064/145 b) 34652/514 c) 54987/415 d) 45041/541

SOLUZIONE.

L'area di un triangolo si trova $\frac{1}{2}a \cdot b \cdot sin(\gamma)$, in cui a e b sono le misure di lati qualsiasi e γ quella dell'angolo compreso tra i due lati. Tale valore è massimo quando il seno è massimo, cioè quando l'angolo è retto. In questo caso l'altezza cercata è quella relativa all'ipotenusa. Abbiamo perciò

#1: $\sqrt{(306^2 + 2592^2)}$

#2: 2610

#3: $\frac{306 \cdot 2592}{2610}$

#4: $\frac{44064}{145}$

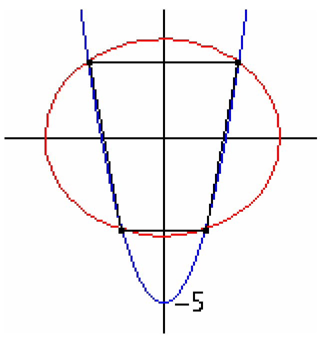
2. La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e la parabola $y = 2x^2 - 5$ si intersecano formando un trapezio di area quasi uguale a

a) 10,459 b) 7,398 c) 8,751 **d) 15.155**

Troviamo le intersezioni delle due curve

#1: SOLVE($x^2 + y^2 = 9 \wedge y = 2 \cdot x^2 - 5$, [x, y])

#2: $\left(x = -\frac{\sqrt{35}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \wedge y = \frac{\sqrt{105}}{4} - \frac{1}{4}\right) \vee \left(x = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{35}}{4} \wedge y = -\frac{\sqrt{105}}{4} - \frac{1}{4}\right) \vee \left(x = \frac{\sqrt{35}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \wedge y = -\frac{\sqrt{105}}{4} - \frac{1}{4}\right) \vee \left(x = \frac{\sqrt{35}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \wedge y = \frac{\sqrt{105}}{4} - \frac{1}{4}\right)$



Calcoliamo le dimensioni della base e dell'altezza

#3: $\text{base\_mag} := 2\cdot\left(\frac{\sqrt{35}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

#4: $\text{base\_mag} := 3.824065295$

#5: $\text{base\_min} := 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{35}}{4}\right)$

#6: $\text{base\_min} := 2.092014487$

#7: $\text{altezza} := \left(\frac{\sqrt{105}}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{105}}{4}+\frac{1}{4}\right)$

#8: $\text{altezza} := 5.123475382$

#9: $\frac{\text{base\_mag}+\text{base\_min}}{2}\cdot\text{altezza}$

#10: 15.15544456

3. Le coordinate dell'ortocentro del triangolo di vertici (4,25; 2,17), (8,12;0,93) e (1,82; 6,31) sono circa

a) (4,73; 3,14) b) (-1,35;-3,28) **c)(-1,76; -4,87)** d) (2,17; 2,25)

Troviamo le equazioni di due altezze, quindi le intersechiamo.

#1: $\text{coeff\_ang\_lato}(xa, ya, xb, yb) := \frac{ya - yb}{xa - xb}$

#2: $\text{retta\_perp\_pto\_coeff\_ang}(xp, yp, m) := y - yp = -\frac{1}{m}\cdot(x - xp)$

#3: retta_perp_pto_coeff_ang(8.12, 0.93, coeff_ang_lato(4.25, 2.17, 1.82, 6.31))

#4: $y = 0.001304347826\cdot(450\cdot x - 2941)$

#5: retta_perp_pto_coeff_ang(4.25, 2.17, coeff_ang_lato(8.12, 0.93, 1.82, 6.31))

#6: $y = 0.0005204460966\cdot(2250\cdot x - 5393)$

#7: SOLVE([y = 0.001304347826·(450·x - 2941), y = 0.0005204460966·(2250·x - 5393)], [x, y])

#8: $[x = -1.762393801 \wedge y = -4.870535491]$

4. Un'urna contiene 70 biglie di cui 30 rosse e 40 bianche. Ne vengono estratte 20 senza rimessa. La probabilità che tra quelle estratte ci siano al più 6 biglie rosse è

a) 8,57% b) 10,42% **c) 13,37%** d) 11,33%

La probabilità è la somma di 7 probabilità, che vi siano 0 palline rosse, 1 pallina rossa, ..., 6 palline rosse. Visto che non vi è rimessa, la probabilità di ottenere esattamente $0 < k < 20$ palline rosse, estraendone 20 è $\binom{20}{k} \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot ... \cdot (30-k+1)}{70 \cdot 69 \cdot ... \cdot (70-k+1)} \cdot \frac{40 \cdot 39 \cdot ... \cdot (40-(20-k-1))}{(70-k) \cdot ... \cdot 51}$, invece per ottenere 0 palline rosse la probabilità è $\frac{40 \cdot 39 \cdot ... \cdot 21}{70 \cdot ... \cdot 51}$, definiamo perciò una funzione che effettui questo calcolo.

```
      prob_rosse(n) :=
        If n = 0
#1:        ∏((40 - k)/(70 - k), k, 0, 19)
           COMB(20, n)·∏(30 - k, k, 0, n - 1)·∏(40 - (20 - k), k, n + 1, 20)/∏(70 - k, k, 0, 19)

        6
#2:     Σ  prob_rosse(n)
       n=0

#3:                              0.1337258722
```

5. In una moneta la probabilità di uscire testa è *p*. Se essa viene lanciata per aria 196 volte, per quale valore di p è massima la probabilità di avere esattamente 117 teste?

a) 51,63% **b) 59,69%** c) 53,81% d) 56,45%

La probabilità che lanciando n volta una moneta che ha probabilità p di uscire testa e (1-p) di uscire croce, vengano fuori esattamente $k \leq n$ volte testa è $\binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Definiamo una funzione che effettui questo calcolo per n = 196 e k = 117, quindi calcoliamone il massimo con l'uso delle derivate

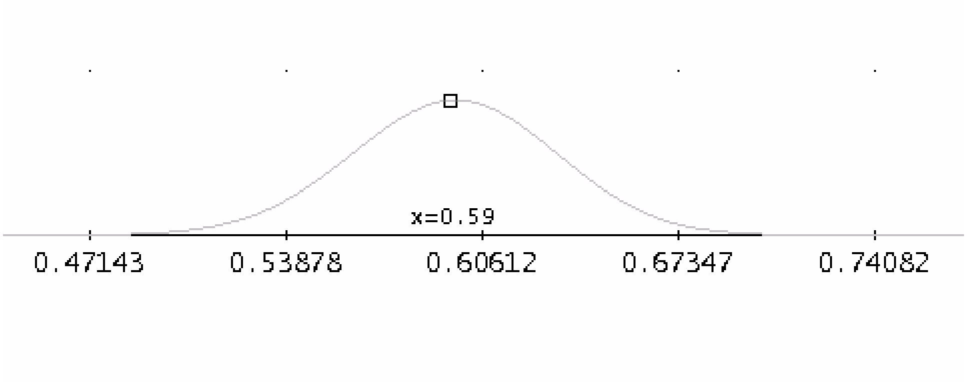
$$\#1: \quad COMB(196, 117) \cdot p^{117} \cdot (1-p)^{196-117}$$

$$\#2: \quad SOLVE\left(\frac{d}{dp}\left(COMB(196, 117) \cdot p^{117} \cdot (1-p)^{196-117}\right), p\right)$$

$$\#3: \quad p = \frac{117}{196} \vee p = 1 \vee p = 0$$

$$\#4: \quad p = 0.5969387755 \vee p = 1 \vee p = 0$$

oppure rappresentiamo la funzione e cerchiamo graficamente il suo massimo



6. La matrice M (3x3) ha per righe gli zeri, in ordine crescente, rispettivamente dei polinomi $x^3 - 2x^2 - x + 2$, $x^3 - 13x - 12$ e di $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$. Chi è l'elemento centrale di M^4?

a) 72 b) 43 c) 58 **d) 64**

Calcoliamo gli zeri dei polinomi e li ordiniamo

#1: $m := [\text{SORT}(\text{SOLUTIONS}(x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 2, x)), \text{SORT}(\text{SOLUTIONS}(x^3 - 13 \cdot x - 12, x)), \text{SORT}(\text{SOLUTIONS}(x^3 + 2 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 12, x))]$

#2: $m := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

#3: m^4

#4: $\begin{bmatrix} 100 & 16 & -112 \\ 150 & 64 & -98 \\ 125 & 74 & -43 \end{bmatrix}$

7. I divisori del numero 210 sono stati scritti in ordine decrescente. Al nono posto c'è

a) 14 b) 21 c) 10 d) 7

Calcoliamo i divisori del numero, poiché li otteniamo in ordine crescente, calcoliamo non il nono elemento, ma il nono dalla fine, quindi se dim(d) è il numero totale di elementi quello di posto dim(d) – 8.

#1: d := DIVISORS(210)

#2: d := [1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210]

#3: $d_{\text{DIM}(d) - 8}$

#4: 14

8. Il coefficiente di x^2 nel polinomio $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)(x - 5)(x + 6)$ è

a) 436 **b) 400** c) 453 d) 460

Basta sviluppare il prodotto

$$\#1: \quad \text{EXPAND}((x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x - 3)\cdot(x + 4)\cdot(x - 5)\cdot(x + 6))$$

$$\#2: \quad x^6 + 3\cdot x^5 - 41\cdot x^4 - 87\cdot x^3 + 400\cdot x^2 + 444\cdot x - 720$$

9. Chi dei seguenti numeri ha più fattori primi?

a) 406.296 b) 229.431.609 **c) 1.412.775** d) 450.225

Basta fattorizzare e contare solo i fattori primi

$$\#1: \quad \text{FACTOR}(406296, \text{Rational})$$

$$\#2: \quad 2^3\cdot 3^5\cdot 11\cdot 19$$

$$\#3: \quad \text{FACTOR}(229431609, \text{Rational})$$

$$\#4: \quad 3^8\cdot 11^2\cdot 17^2$$

$$\#5: \quad \text{FACTOR}(1412775, \text{Rational})$$

$$\#6: \quad 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23$$

$$\#7: \quad \text{FACTOR}(450225, \text{Rational})$$

$$\#8: \quad 3^3\cdot 5^2\cdot 23\cdot 29$$

10. La somma dei cubi dei numeri naturali da 1 a 50 vale

a) 1625625 b) 1745745 c) 1065065 d) 1756756

Basta sommare

$$\#1: \quad \sum_{k=1}^{50} k^3$$

$$\#2: \quad 1625625$$

11. La somma dei quadrati delle radici del polinomio $123x^2 + 456x + 789$ vale

a) 1678/3113 **b) 1538/1681** c) 1477/2891 d) 1731/1739

Calcoliamo un vettore in cui ci sono le soluzioni, se lo innalziamo al quadrato Derive ne calcola la somma dei quadrati degli elementi.

$$\#1: \quad \text{SOLUTIONS}(123\cdot x^2 + 456\cdot x + 789, x)^2$$

$$\#2: \quad \frac{1538}{1681}$$

12. Un macellaio compra conigli e polli in un allevamento (i conigli costano 10,45 euro l'uno e i polli 8,75 euro l'uno) spendendo 331,75 euro. In un altro allevamento compra lo stesso numero di conigli e di polli (qui i conigli costano 11,58 euro l'uno e i polli 9,95 euro l'uno) spendendo 372,70 euro. Quanti animali ha acquistato il macellaio?

a) 80 b) 35 **c) 70** d) 94

Basta impostare e risolvere un sistema

#1: $\text{SOLVE}(10.45 \cdot c + 8.75 \cdot p = 331.75 \wedge 11.58 \cdot c + 9.95 \cdot p = 372.7, [c, p])$

#2: $c = 15 \wedge p = 20$

Ne compra 35 in ognuno dei due, quindi il totale è 70