RISPOSTE QUESITI GMT TRIENNIO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	**c**	**a**	**c**	**b**	**c**	**a**	**b**	**d**	**d**

1. La curva di equazione $y=\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cdot\sin(x)-\frac{2\cdot\cos(x)}{x^2}$ incontra l'asse delle x in un punto di ascissa che è circa

a) 1,625 **b) 1,983** **c) 2,082** **d) 2,145**

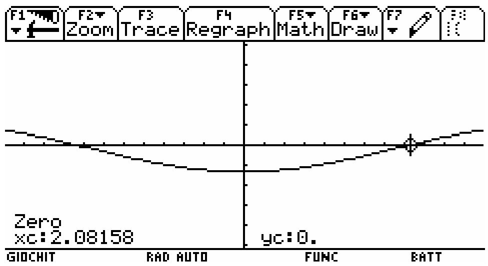
O rappresentiamo graficamente la curva e cerchiamo di stabilire, con il cursore, il valore dell'ascissa, oppure usiamo un comando di soluzione approssimata.

Soluzione con Derive

$$\mathrm{NSOLVE}\left(\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{SIN}(x)-\frac{2\cdot\mathrm{COS}(x)}{x^2}=0,\ x,\ 1,\ 3\right)$$

$$x = 2.081575977$$

Soluzione con le calcolatrici



2. Si considerino la distribuzione statistica {5, 6, 4.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 5, 6, 6.5, 8} e q_1 , il suo primo *quartile*, cioè il valore che, ordinata la distribuzione in modo crescente, la divide in modo che i termini alla sua destra siano il triplo di quelli alla sua sinistra. Allora $\sqrt{\frac{\sum_{1\le i\le n}(x_i-q_1)^2}{n}}$ vale circa

a) 1,04 **b) 1,23** **c) 1,56** **d) 5**

Intanto determiniamo il valore del primo quartile. Immettiamo i valori in un vettore, che ordiniamo, perciò determiniamo il primo quartile, quindi eseguiamo le operazioni indicate.

Soluzione con Derive

$$V := [5,\ 6,\ 4.5,\ 6,\ 6.5,\ 7,\ 7.5,\ 5,\ 6,\ 6.5,\ 8]$$

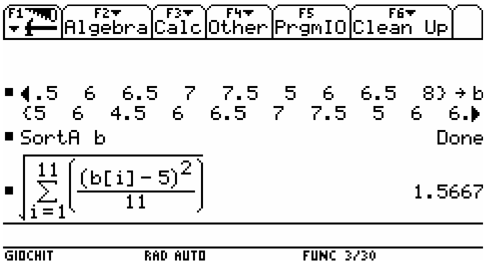
$$\mathrm{SORT}(V)$$

$$[4.5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6.5,\ 6.5,\ 7,\ 7.5,\ 8]$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sum_{k=1}^{\mathrm{DIM}(V)} (V_k - 5)^2}{\mathrm{DIM}(V)}\right)}$$

$$1.566698903$$

Soluzione con le calcolatrici



3. Da un mazzo di 40 carte italiane ti vengono date dieci carte (come nel gioco del tresette). La probabilità di ricevere esattamente tre figure è circa

a) **30,7%** **b)** **20,4%** **c)** **15,6%** **d) 25,7%**

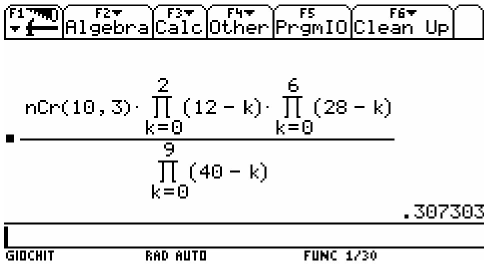
Abbiamo dieci carte che vogliamo siano del tipo (F, F, F, N, N, N, N, N, N, N), in cui F indica una figura e N una non figura. dobbiamo intanto calcolare i vari modi in cui si presentano le F, che sono $\binom{10}{3}$, poi contiamo le probabilità di estrarre le 3 figure che sono $\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{10}{38}$ e quelle di estrarre 7 non figure, che sono $\frac{28}{37}\cdot\frac{27}{36}\cdot\ldots\cdot\frac{22}{31}$, infine calcoliamo il tutto.

Soluzione con Derive

$$\frac{\mathrm{COMB}(10,\ 3)\cdot\left(\prod_{k=0}^{2}(12 - k)\right)\cdot\prod_{k=0}^{6}(28 - k)}{\prod_{k=0}^{9}(40 - k)}$$

$$0.3073032085$$

Soluzione con le calcolatrici



4. Consideriamo i prodotti $\binom{20}{k}\cdot\binom{10}{k}$, per ogni k naturale compreso tra 1 e 20. Per quale k si ottiene il massimo?

a) 5 **b) 6** **c) 7** **d) 8**

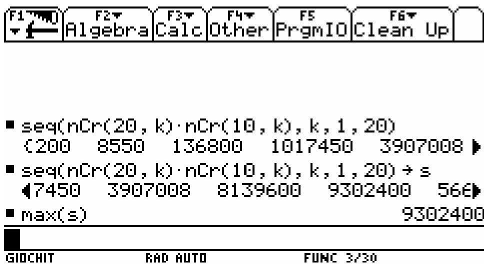
Immettiamo le 20 moltiplicazioni, anche se 10 di esse sono ovviamente nulle, in un vettore, di cui calcoliamo poi il massimo.

Soluzione con Derive

```
VECTOR(COMB(20, k)·COMB(10, k), k, 1, 20)

[200, 8550, 136800, 1017450, 3907008, 8139600, 9302400, 5668650, 1679600, 184756, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

Soluzione con le calcolatrici



5. Viene lanciata per aria 4 volte una moneta che ha probabilità p di uscire testa. Per quale valore di p gli eventi “le facce uscite non sono tutte uguali” ed “esce al più una testa” sono indipendenti?

a) 48,32% **b) 58,87%** **c) 68,67%** **d) 78,41%**

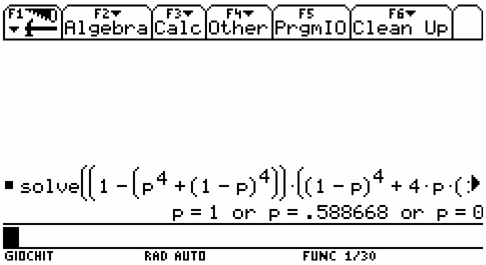
Due eventi A e B con probabilità rispettive p e q di verificarsi sono indipendenti se P(A ∩B) = P(A) · P(B). Dire che “le facce uscite non sono tutte uguali” equivale a calcolare il complementare dell'evento “le facce uscite sono tutte diverse”, cioè sono tutte testa, con probabilità p^4, o tutte croce, con probabilità $(1-p)^4$. Dire “esce al più una testa”, significa che escono 0 teste, con probabilità $(1-p)^4$, oppure 1 sola testa, con probabilità $4 \cdot p \cdot (1-p)^3$. IL 4 dipende dal fatto che la testa può uscire come prima, seconda, terza o quarta. L'intersezione dei due eventi è l'evento "esce solo una testa). Allora impostiamo l'equazione e la risolviamo.

Soluzione con Derive

$$\text{SOLVE}((1-(p^4+(1-p)^4))\cdot((1-p)^4+4\cdot p\cdot(1-p)^3)=4\cdot p\cdot(1-p)^3,\ p,\ \text{Real})$$

$$p = 0.5886681606 \vee p = 1 \vee p = 0$$

Soluzione con le calcolatrici

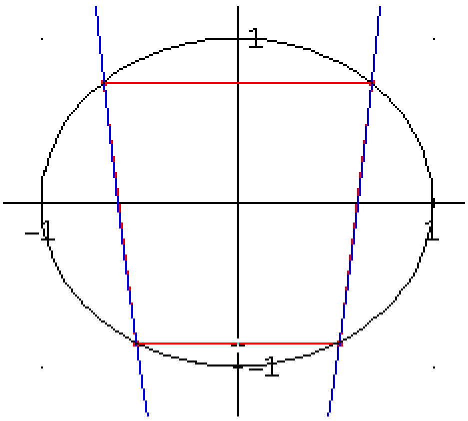


6. La parabola di equazione $y = 8x^2 - 3$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si intersecano formando un trapezio di area quasi uguale a?

a) 0,7 **b) 1,8** **c) 1,9** **d) 3,1**

Risolviamo il sistema formato dalle due equazioni e troviamo le coordinate dei vertici, quindi applichiamo la formula per il calcolo dell'area di un trapezio.

Soluzione con Derive



$$\text{SOLVE}\left(\left[y = 8\cdot x^2 - 3,\ x^2 + y^2 = 1\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\left[x = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{161}}{128} + \frac{47}{128}\right)} \wedge y = \frac{\sqrt{161}}{16} - \frac{1}{16},\ x = -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{161}}{128} + \frac{47}{128}\right)} \wedge y = \frac{\sqrt{161}}{16} - \frac{1}{16},\right.$$

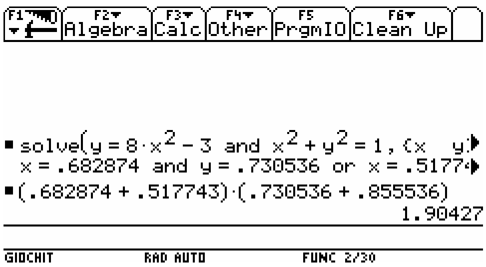
$$\left. x = \sqrt{\left(\frac{47}{128} - \frac{\sqrt{161}}{128}\right)} \wedge y = -\frac{\sqrt{161}}{16} - \frac{1}{16},\ x = -\sqrt{\left(\frac{47}{128} - \frac{\sqrt{161}}{128}\right)} \wedge y = -\frac{\sqrt{161}}{16} - \frac{1}{16}\right]$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{161}}{128} + \frac{47}{128}\right)} + \sqrt{\left(\frac{47}{128} - \frac{\sqrt{161}}{128}\right)}\right)\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{161}}{16} - \frac{1}{16}\right) - \left(-\frac{\sqrt{161}}{16} - \frac{1}{16}\right)\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{161\cdot\sqrt{2}}{128} + \frac{7567}{4096}\right)}$$

$$1.904265634$$

Soluzione con le calcolatrici



7. Di un triangolo ABC si sa che le misure di due lati e dell'area sono rispettivamente (x – 1), x e (x + 1). Se il terzo lato è lungo 10, allora x è

a) minore di 6 b) fra 6 e 7 c) maggiore di 7 d) il problema non ha soluzioni reali

Per trovare l'incognita scriviamo due condizioni, quella per il calcolo dell'area conoscendo due lati e il seno dell'angolo compreso e il teorema di Carnot. Quindi risolviamo il sistema.

Soluzione con Derive

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-1)\cdot \text{SIN}(\alpha) = x + 1,\ \alpha\right)$$

$$\alpha = -\ \text{ASIN}\left(\frac{2\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)}\right) - \pi \vee \alpha = \pi - \text{ASIN}\left(\frac{2\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)}\right) \vee \alpha = \text{ASIN}\left(\frac{2\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)}\right)$$

$$x^2 + (x-1)^2 - 2\cdot x\cdot(x-1)\cdot \text{COS}(\alpha) = 100$$

$$x^2 + (x-1)^2 - 2\cdot x\cdot(x-1)\cdot \text{COS}\left(\text{ASIN}\left(\frac{2\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)}\right)\right) = 100$$

$$-\ 2\cdot\sqrt{(x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 8\cdot x - 4)}\cdot \text{SIGN}(x\cdot(x-1)) + 2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1 = 100$$

$$-\ 2\cdot\sqrt{(x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 8\cdot x - 4)}\cdot \text{SIGN}(x\cdot(x-1)) = -\ 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 99$$

$$(-\ 2\cdot\sqrt{(x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 8\cdot x - 4)}\cdot \text{SIGN}(x\cdot(x-1)) = -\ 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 99)^2$$

$$4\cdot(x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 8\cdot x - 4) = (2\cdot x^2 - 2\cdot x - 99)^2$$

$$\text{SOLVE}(4\cdot(x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 8\cdot x - 4) = (2\cdot x^2 - 2\cdot x - 99)^2,\ x,\ \text{Real})$$

$$x = 5.676997679 \vee x = -4.550681889$$

Verifica

$$\frac{5.676997679 + (5.676997679 - 1) + 10}{2}$$

$$10.17699767$$

$$\sqrt{(p\cdot(p - a)\cdot(p - b)\cdot(p - c))}$$

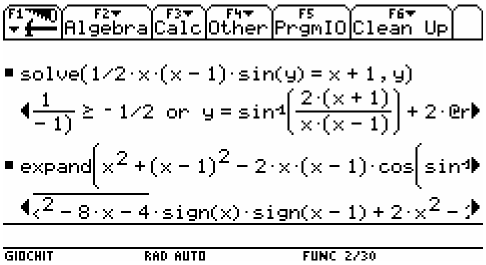
$$\sqrt{(p\cdot(a - p)\cdot(b - p)\cdot(p - c))}$$

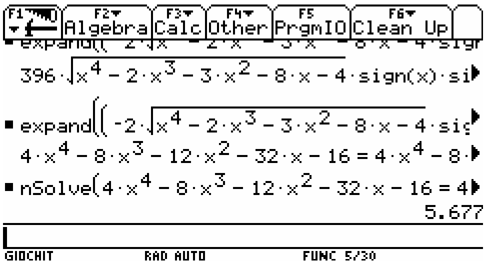
$$10.17699767$$

$$\sqrt{(10.17699767\cdot(5.676997679 - 10.17699767)\cdot((5.676997679 - 1) - 10.17699767)\cdot(10.17699767 - 10))}$$

$$6.676997503$$

Soluzione con le calcolatrici





8. In tabella sono riportate le variazioni del paniere azionario del signor Chance in un dato giorno

Titolo	Valore iniziale	Valore finale	Numero azioni
A	€ 1,201	€ 1,205	1000
B	€ 5,074	€ 5,063	500
C	€ 8,125	€ 8,120	750
D	€ 7,320	€ 7,331	X
E	€ 2,712	€ 2,703	3000

Qual è il minimo valore di X perché la variazione del paniere sia positiva?

a) 2931 **b) 2932** **c) 2933** **d) 8000.**

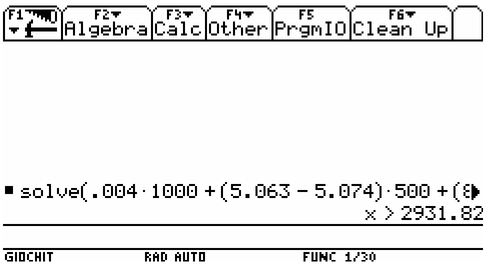
Calcoliamo la variazione del paniere moltiplicando i valori iniziale e finale per il numero di azioni, quindi sottraiamo. Otteniamo una disequazione in X che risolviamo.

Soluzione con Derive

```
SOLVE((1.205 - 1.201)·1000 + (5.063 - 5.074)·500 + (8.12 - 8.125)·750 + (7.331 - 7.32)·x
  + (2.703 - 2.712)·3000 > 0, x)

                    x > 2931.818181
```

Soluzione con le calcolatrici



9. Quali sono le coordinate del simmetrico del punto di coordinate (a, b) rispetto la retta di equazione y = mx + q?

a) $(-a,\ -b)$ **b)** $\left(-2m\cdot(b-q)+a\cdot(m^2-1),\ 2am+b\cdot(m^2-1)+2q\right)$

c) $\left(\dfrac{a\cdot(m^2-1)}{m^2+1},\ \dfrac{b\cdot(m^2-1)}{m^2+1}\right)$ **d)** $\left(\dfrac{2m\cdot(b-q)-a\cdot(m^2-1)}{m^2+1},\ \dfrac{2am+b\cdot(m^2-1)+2q}{m^2+1}\right)$

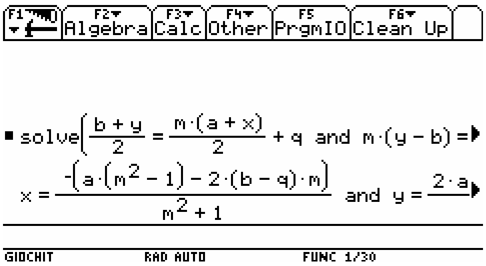
Perché P sia simmetrico di P' rispetto a una retta devono accadere due cose. Il punto medio di PP' deve stare sulla retta e PP' deve essere perpendicolare alla retta. Basta perciò imporre le due condizioni e risolvere.

Soluzione con Derive

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{b+y}{2}=\frac{m\cdot(a+x)}{2}+q \wedge \frac{y-b}{x-a}\cdot m=-1,\ [x,\ y]\right)$$

$$x=\frac{2\cdot m\cdot(b-q)-a\cdot(m^2-1)}{m^2+1} \wedge y=\frac{2\cdot a\cdot m+b\cdot(m^2-1)+2\cdot q}{m^2+1} \wedge x\neq a$$

Soluzione con le calcolatrici



10. Quale fra le seguenti è la corretta equazione di un'ellisse di fuochi (1, 2) e (-2, -1), e diametro maggiore lungo 5?

a) $64x^2-72xy-64y^2+100x-100y-125=0$ **b)** $64x^2-72xy+64y^2-100x-100y-125=0$

c) $64x^2+72xy+64y^2-125=0$ **d)** $64x^2-72xy+64y^2+100x-100y-125=0$

Un'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dei fuochi è uguale all'asse maggiore. Basta perciò imporre la condizione e risolvere.

Soluzione con Derive

$$\text{EXPAND}\left((x-1)^2+(y-2)^2-\left(\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}-5\right)^2=0\right)$$

$$10\cdot\sqrt{x^2+4\cdot x+y^2+2\cdot y+5}-6\cdot x-6\cdot y=25$$

$$10\cdot\sqrt{x^2+4\cdot x+y^2+2\cdot y+5}=6\cdot x+6\cdot y+25$$

$$\left(10\cdot\sqrt{x^2+4\cdot x+y^2+2\cdot y+5}\right)^2-(6\cdot x+6\cdot y+25)^2=0$$

$$64\cdot x^2+4\cdot x\cdot(25-18\cdot y)+64\cdot y^2-100\cdot y-125=0$$

$$64\cdot x^2-72\cdot x\cdot y+100\cdot x+64\cdot y^2-100\cdot y=125$$

Soluzione con le calcolatrici