

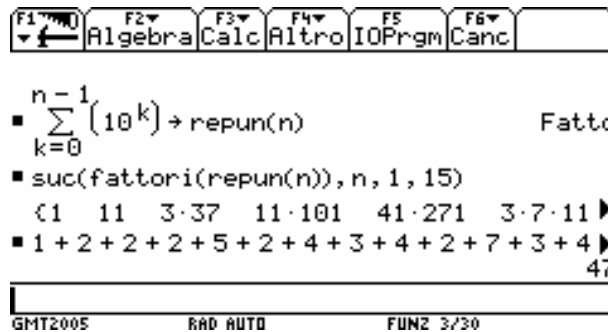
Selezione 2005 con risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	E	B	C	A	D	D	A	E

Forniamo le soluzioni con le calcolatrici della Texas Instruments e con Derive.

1. Consideriamo i cosiddetti numeri repunit, formati da cifre tutte uguali a 1 (p.e. 1, 11, 111, 111, ...). Indichiamo con r_n il numero con n cifre. Scomponiamo in fattori primi tutti gli r_n per n da 1 a 15. Quanti elementi otteniamo? Si stia attenti che consideriamo solo i fattori primi.
 A. 15 B. 30 C. 47 D. 60 E. Più di 60

Risposta esatta C



$$\text{repun}(n) := \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

$$Y := \text{VECTOR}(\text{FACTORS}(V), i, 1, \text{DIM}(V))$$

$$\sum_{k=1}^{\text{DIM}(Y)} \text{DIM}(Y_k)$$

47

2. Quanto fa la somma delle soluzioni minori di 1 e maggiori di -1, dell'equazione $x^7 - 0.16x^6 - 3.2339x^5 + 0.092366x^4 + 3.2337952x^3 + 0.3581912672x^2 - 0.91358486016x - 0.24736416768=0$?
 A. -0.08 B. 0.04 C. 3.94 D. 1.99 E. 1.16

Risposta esatta A

$$q := \text{VECTOR}(x^2, x, 1, 20)$$

$$q := [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400]$$

$$q1 := \text{VECTOR}\left(\sum_{i=1}^k q_i, k, 1, 20\right)$$

$$q1 := [1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870]$$

$$q2 := \text{VECTOR}\left(\sum_{i=1}^k q1_i, k, 1, 20\right)$$

$$q2 := [1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540, 825, 1210, 1716, 2366, 3185, 4200, 5440, 6936, 8721, 10830, 13300, 16170]$$

$$q3 := \text{VECTOR}\left(\sum_{i=1}^k q2_i, k, 1, 20\right)$$

$$q3 := [1, 7, 27, 77, 182, 378, 714, 1254, 2079, 3289, 5005, 7371, 10556, 14756, 20196, 27132, 35853, 46683, 59983, 76153]$$

$$q4 := \text{VECTOR}\left(\sum_{i=1}^k q3_i, k, 1, 20\right)$$

$$q4 := [1, 8, 35, 112, 294, 672, 1386, 2640, 4719, 8008, 13013, 20384, 30940, 45696, 65892, 93024, 128877, 175560, 235543, 311696]$$

$$q5 := \text{VECTOR}\left(\sum_{i=1}^k q4_i, k, 1, 20\right)$$

$$q5 := [1, 9, 44, 156, 450, 1122, 2508, 5148, 9867, 17875, 30888, 51272, 82212, 127908, 193800, 286824, 415701, 591261, 826804, 1138500]$$

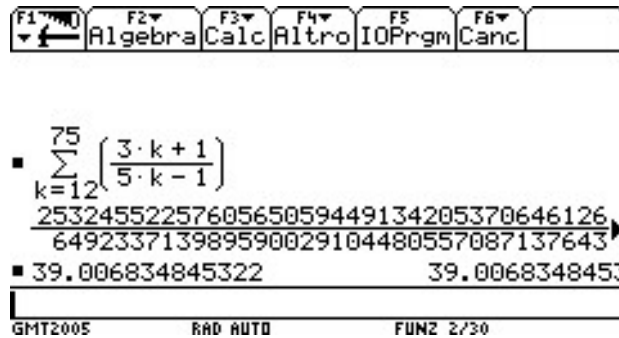
$$\Sigma(q5)$$

$$3782350$$

4. Sia l'insieme $X = \left\{ \frac{37}{59}, \frac{5}{8}, \frac{43}{69}, \frac{23}{37}, \frac{49}{79}, \frac{13}{21}, \frac{55}{89}, \frac{29}{47}, \frac{61}{99}, \dots, \frac{223}{369}, \frac{113}{187} \right\}$, la somma dei suoi 64 elementi è circa

A. 38 B. 39 C. 43 D. Meno di 38 E. Più di 43

Risposta esatta B



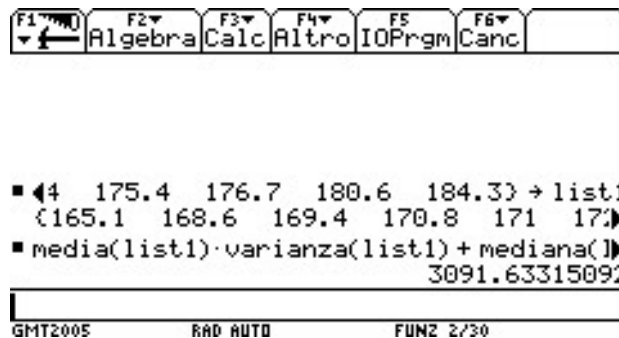
$$\sum_{k=12}^{75} \frac{3 \cdot k + 1}{5 \cdot k - 1}$$

39.00683484

5. I seguenti dati sono riferiti alle altezze, in centimetri, di 20 studenti di una stessa classe. {165.1, 168.6, 169.4, 170.8, 171.0, 172.0, 172.1, 172.3, 172.7, 173.2, 173.2, 173.4, 173.9, 174.5, 175.1, 175.4, 175.4, 176.7, 180.6, 184.3}. Determinare il valore approssimato al secondo decimale della somma fra la mediana e il prodotto della media per la varianza della distribuzione statistica.

A. 363.50 B. 3087.12 C. 3091.63 D. 505472.62 E. Meno di 363

Risposta esatta C



d := [165.1, 168.6, 169.4, 170.8, 171, 172, 172.1, 172.3, 172.7, 173.2, 173.2, 173.4, 173.9, 174.5, 175.1, 175.4, 175.4, 176.7, 180.6, 184.3]

`SORT(d)`

[165.1, 168.6, 169.4, 170.8, 171, 172, 172.1, 172.3, 172.7, 173.2, 173.2, 173.4, 173.9, 174.5, 175.1, 175.4, 175.4, 176.7, 180.6, 184.3]

DIM(d)

20

La mediana è la media aritmetica dei termini che occupano decimo e undicesimo posto

$$\text{med} := \frac{d_{10} + d_{11}}{2}$$

med := 173.2

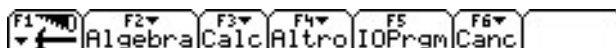
AVERAGE(d) * VARIANCE(d) + med

3091.633150

6. La seguente distribuzione statistica si riferisce ad alcune rilevazioni del valore di un titolo azionario nella stessa giornata, espressi in euro con una precisione al centesimo. {y, 2.03, 2.05, 2.01, 2.02, 2.03, 2.01, 2.05, 2.04, 2.05, 2.05, 2.03, 2.01, x}. Determinare i valori incogniti sapendo che la media e la devianza standard della distribuzione sono 2.03 e 0.01617. I risultati sono troncati e non approssimati, ossia consideriamo solo le prime due cifre decimali così come vengono proposte dalla calcolatrice.

A. 2.00 e 2.03 B. 2.04 e 2.03 C. 2.02 e 2.03 D. 2.03 e 2.03 E. 2.01 e 2.04

Risposta esatta A



```

2.04 2.05 2.05 2.03 2.01 x) → 1
(y 2.03 2.05 2.01 2.02 2.03 2.0)
risolvi {somma(1) = 2.03 and somma((1 - r)
x = 2.03517505521 and y = 2.00482494479}
GMT2005 RAD AUTO FUN2 2/30

```

d1 := [y, 2.03, 2.05, 2.01, 2.02, 2.03, 2.01, 2.05, 2.04, 2.05, 2.05, 2.03, 2.01, x]

SOLVE(AVERAGE(d1) = 2.03 ^ STDEV(d1) = 0.01617, [x, y])

(x = 2.010022633 ^ y = 2.029977366) v (x = 2.029977366 ^ y = 2.010022633)

Come si nota le calcolatrici e Derive forniscono risultati leggermente diversi.

7. Quanto misura l'area delimitata dalla curva di equazione $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 1}$ e dall'asse della x, in

unità quadrate??

A. Meno di 2 B. Fra 2 e 2.05 C. Fra 2.05 e 2.07 D. Fra 2.07 e 2.08 E. Più di 2.08

Risposta esatta D

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Altro	IOPrgm	Canc	

■ risolvi($x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0, x$)
 $x = -(\sqrt{2} - 1)$ or $x = \sqrt{2} + 1$

■ $\int_{1 - \sqrt{2}}^{1 + \sqrt{2}} \left(\frac{x^2 - 2 \cdot x - 1}{x^2 + 1} \right) dx$
 $\ln(2 \cdot \sqrt{2} + 3) - 2 \cdot \sqrt{2} + \pi$
 ■ $\ln(2 \cdot \sqrt{2} + 3) - 2 \cdot \sqrt{2} + \pi$ 2.07591270288

GMT2005 RAD AUTO FUNZ 3/30

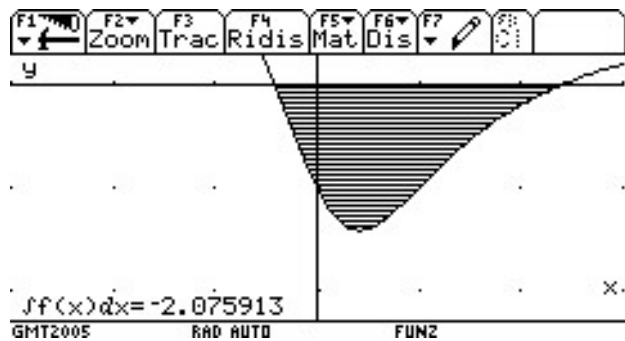
SOLVE($x^2 - 2 \cdot x - 1, x, \text{Real}$)

$x = 1 - \sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} + 1$

$$\int_{1 - \sqrt{2}}^{1 + \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2 \cdot x - 1}{x^2 + 1} dx$$

2.075912702

Per chi non conosce il concetto di integrale si propone una risoluzione grafica.



8. Lanciamo 100 volte un dado regolare a 6 facce. Con che probabilità otteniamo almeno 30 volte un punteggio superiore a 4?

- A. Circa 21% B. Circa 50% C. Circa 67% D. Circa 79% E. Circa 90%

Risposta esatta D

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Altro	IOPrgm	Canc	

■ $1 - \sum_{k=0}^{29} \left(n\text{Comb}(100, k) \cdot (2/6)^k \cdot (4/6)^{100 - k} \right)$
 .790730298147

GMT2005 RAD AUTO FUNZ 1/30

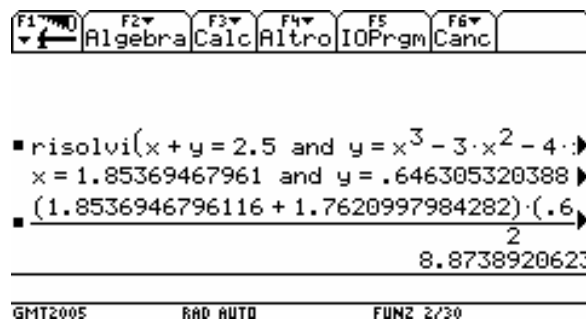
$$1 - \sum_{k=0}^{29} \text{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{100-k}$$

0.7907302981

9. Consideriamo il trapezio i cui vertici sono le intersezioni di ascissa minore di 2 fra la curva di equazione $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ e la retta di equazione $x + y = 2.5$, e le proiezioni di tali punti sull'asse x. Quanto vale l'area del trapezio, in unità quadrate?

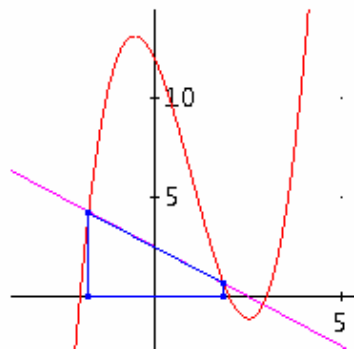
A. Meno di 9 B. Fra 9 e 10 C. Fra 10 e 11 D. Fra 11 e 12 E. Più di 12

Risposta esatta A



$$\text{SOLVE}(x + y = 2.5 \wedge y = x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 12, [x, y])$$

$$(x = 1.853694679 \wedge y = 0.6463053203) \vee (x = 2.908405118 \wedge y = -0.4084051188) \vee (x = -1.762099798 \wedge y = 4.262099798)$$



10. Le equazioni di un'omotetia di centro (cx, cy) e rapporto k sono $w: \begin{cases} x' = k \cdot x + (1-k) \cdot cx \\ y' = k \cdot y + (1-k) \cdot cy \end{cases}$

Componiamo le omotetie di centri $(1, -2)$ e $(-0.4, 1.1)$ e rispettivi rapporti $k = 0.75$ e $k' = -0.8$.

Determinare le coordinate del centro dell'omotetia composizione.

A. $(0.85, -1)$ B. $(-1.52, 3.58)$ C. $(0.16, -0.76)$ D. $(0.76, -1.64)$ E. $(-0.575, 1.4875)$

Risposta esatta E

F1 Algebra F2 Calc F3 Altro F4 IOPrgm F5 Canc F6

■ $(k \cdot x + (1 - k) \cdot cx \quad k \cdot y + (1 - k) \cdot cy) \rightarrow om(x)$
 Fatto
 ■ $om(om(x, y, 1, -2, .75)[1], om(x, y, 1, -2, \cdot$
 $(-.6 \cdot x - .92 \quad 2.38 - .6 \cdot y)$
 ■ $risolvi((1 - .6) \cdot x = -.92 \text{ and } (1 - .6) \cdot y$
 $x = -.575 \text{ and } y = 1.4875$

GMT2005 RAD AUTO FUNZ 3/30

$$om(x, y, cx, cy, k) := [k \cdot x + (1 - k) \cdot cx, k \cdot y + (1 - k) \cdot cy]$$

$$om(om(x, y, 1, -2, 0.75))_1, (om(x, y, 1, -2, 0.75))_2, -0.4, 1.1, -0.8)$$

$$[-0.04 \cdot (15 \cdot x + 23), 0.02 \cdot (119 - 30 \cdot y)]$$

$$SOLVE(om(x, y, cx, cy, 0.75 \cdot (-0.8)) = [-0.04 \cdot (15 \cdot x + 23), 0.02 \cdot (119 - 30 \cdot y)], [cx, cy])$$

$$cx = -0.575 \wedge cy = 1.4875$$