GIOCHI MATEMATICI CON LE TECNOLOGIE

FASE FINALE 2005

Soluzioni

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	E	D	A	B	D	C	B	C

1. Consideriamo i cosiddetti numeri rep-unit, formati tutti da cifre uguali a 1, come 1, 11, 111, 1111, ... Da quante cifre è formato il prodotto dei primi 41 numeri rep-unit?
A. **780** B. **781** C. **821** D. **822** E. **863**

Risposta esatta D.

$$rp(n) := \sum_{x=0}^{n-1} 10^x$$

$$\prod_{n=1}^{41} rp(n)$$

$$6.690399450 \cdot 10^{821}$$

2. Consideriamo il triangolo di vertici A ≡ (1, 2), B ≡ (-3, 1), C ≡ (2, -3). Quanto misura il segmento che ha per estremi l'ortocentro e il circocentro di ABC, nell'unità di misura stabilita?
A. **Meno di 2** B. **Fra 2 e 2.5** C **Fra 2.5 e 3** D. **Fra 3 e 4** E. **Più di 3**
Risposta esatta C

Equazioni di due altezze

$$y - 2 = - \frac{2 + 3}{-3 - 1} \cdot (x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{5 \cdot (x - 1)}{4}$$

$$y - 1 = - \frac{2 - 1}{-3 - 2} \cdot (x + 3)$$

$$y - 1 = \frac{x + 3}{5}$$

Ortocentro

$$\text{SOLVE}\left(\left[y - 2 = \frac{5 \cdot (x - 1)}{4},\ y - 1 = \frac{x + 3}{5}\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\left[x = \frac{17}{21} \wedge y = \frac{37}{21}\right]$$

Troviamo le equazioni di due assi

$$y - \frac{-3 + 1}{2} = - \frac{2 + 3}{-3 - 1} \cdot \left(x - \frac{2 - 3}{2}\right)$$

$$y + 1 = \frac{5 \cdot (2 \cdot x + 1)}{8}$$

$$y - \frac{-3 + 2}{2} = - \frac{2 - 1}{-3 - 2} \cdot \left(x - \frac{2 + 1}{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot x - 3}{10}$$

Circocentro

$$\text{SOLVE}\left(\left[y + 1 = \frac{5 \cdot (2 \cdot x + 1)}{8},\ y + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot x - 3}{10}\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\left[x = - \frac{17}{42} \wedge y = - \frac{37}{42}\right]$$

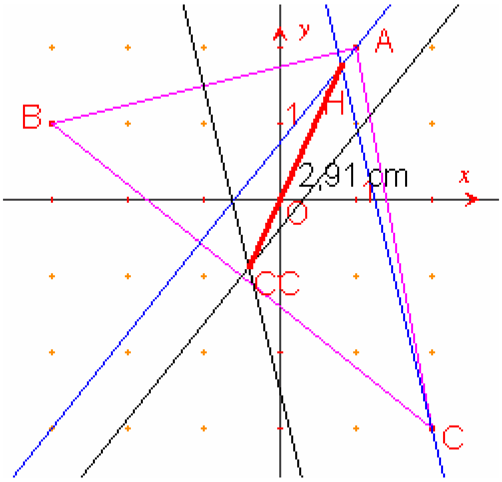
Distanza fra ortocentro e circocentro

$$\sqrt{\left(\left(- \frac{17}{42} - \frac{17}{21}\right)^2 + \left(- \frac{37}{42} - \frac{37}{21}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1658}}{14}$$

$$2.908467581$$

O più facilmente con Cabri



3. Consideriamo la somma $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}+\frac{1}{2005}$, espressa sotto forma di numero decimale. La decima cifra dopo la virgola è
A. **3** B. **4** C. **6** D. **8** E. **9**
Risposta esatta E

```
PrecisionDigits := 12

NotationDigits := 12

            k + 1
2005   (-1)
 Σ    ___________
k=1        k

                                   0.693396494929
```

4. Una banca offre i seguenti servizi di tenuta conto:

A. Un fisso di € 20 annui, € 0.15 per le prime 100 operazioni e € 0.12 per le successive.

B. Un fisso di € 25 annui, € 0.15 per le prime 50 operazioni e uno sconto di € 0.01 per ogni ulteriori 50 operazioni con un limite inferiore di € 0.10.

C. € 0.20 per le prime 75 operazioni, € 0.18 per le successive 75, € 0.16 per ogni operazione successiva alla 150ª.

Quante operazioni si devono fare al massimo perché sia più conveniente il servizio C?
A. **503** B. **500** C. **473** D. **462** E. **Meno di 400**

Risposta esatta D

```
ya(x) :=
  If x ≤ 100
     20 + 0.15·x
     20 + 0.15·100 + 0.12·(x - 100)

yb(x) :=
  If x ≤ 50
     25 + 0.15·x
     If x ≤ 100
        25 + 0.15·50 + 0.14·(x - 50)
        If x ≤ 150
           25 + 0.15·50 + 0.14·50 + 0.13·(x - 100)
           If x ≤ 200
              25 + (0.15 + 0.14 + 0.13)·50 + 0.12·(x - 150)
              If x ≤ 250
                 25 + (0.15 + 0.14 + 0.13 + 0.12)·50 + 0.11·(x - 200)
                 25 + (0.15 + 0.14 + 0.13 + 0.12 + 0.11)·50 + 0.1·(x - 250)

yc(x) :=
  If x ≤ 75
     0.2·x
     If x ≤ 150
        0.2·75 + 0.18·(x - 75)
        0.2·75 + 0.18·75 + 0.16·(x - 150)
```

Calcoliamo i valori delle tre funzioni per x da 0 a 500 per multipli di 10

```
TABLE([ya(x), yb(x), yc(x)], x, 0, 500, 10)
```

0	20	25	0
10	21.5	26.5	2
20	23	28	4
30	24.5	29.5	6
40	26	31	8
50	27.5	32.5	10
60	29	33.9	12
70	30.5	35.3	14
80	32	36.7	15.9
90	33.5	38.1	17.7
100	35	39.5	19.5
110	36.2	40.8	21.3
120	37.4	42.1	23.1
130	38.6	43.4	24.9
140	39.8	44.7	26.7

150	41	46	28.5
160	42.2	47.2	30.1
170	43.4	48.4	31.7
180	44.6	49.6	33.3
190	45.8	50.8	34.9
200	47	52	36.5
210	48.2	53.1	38.1
220	49.4	54.2	39.7
230	50.6	55.3	41.3
240	51.8	56.4	42.9
250	53	57.5	44.5
260	54.2	58.5	46.1
270	55.4	59.5	47.7
280	56.6	60.5	49.3
290	57.8	61.5	50.9
300	59	62.5	52.5

310	60.2	63.5	54.1
320	61.4	64.5	55.7
330	62.6	65.5	57.3
340	63.8	66.5	58.9
350	65	67.5	60.5
360	66.2	68.5	62.1
370	67.4	69.5	63.7
380	68.6	70.5	65.3
390	69.8	71.5	66.9
400	71	72.5	68.5
410	72.2	73.5	70.1
420	73.4	74.5	71.7
430	74.6	75.5	73.3
440	75.8	76.5	74.9
450	77	77.5	76.5

460	78.2	78.5	78.1
470	79.4	79.5	79.7
480	80.6	80.5	81.3
490	81.8	81.5	82.9
500	83	82.5	84.5

In effetti C è meglio delle altre fino a 460 e non più a 470, quindi calcoliamo i valori da 460 a 469

```
TABLE([ya(x), yb(x), yc(x)], x, 460, 469)
```

460	78.2	78.5	78.1
461	78.32	78.6	78.26
462	78.44	78.7	78.42
463	78.56	78.8	78.58
464	78.68	78.9	78.74
465	78.8	79	78.9
466	78.92	79.1	79.06
467	79.04	79.2	79.22
468	79.16	79.3	79.38
469	79.28	79.4	79.54

C è meglio degli altri fino a 462 operazioni

5. Giovanni deve svolgere un test di 10 quesiti a risposta multipla in cui le risposte sono le lettere dalla A alla E. Viene informato che la sequenza esatta è formata da 3A, 2B, 2C, 3D, ma non ne conosce l'ordine. Se Giovanni tira ad indovinare, che probabilità percentuale ha di rispondere esattamente ad 8 domande?

A. **Meno di 0.5%** B. **Fra 0.5% e 2%** C. **Fra 2% e 10%** D. **Fra 10% e 20%** E. **Più di 20%**

Risposta esatta A.

Le possibili risposte che possono darsi, con le condizioni imposte sono tante quante le permutazioni della parola AAABBCCDDD, cioè

$$\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!}$$

$$25200$$

Per indovinare esattamente 8 risposte, dato che conosciamo tutte le lettere vuol dire che scambiamo di posto due lettere diverse. La A e la B si possono scambiare in 6 modi, dato che ognuna delle 3 A si può scambiare con una delle 2 B, la A e la C in 6 modi, la A e la D in 9 modi, la B e la C in 4 modi, la B e la D in 6 modi, la C e la D in 6 modi. Quindi i casi sono un totale di

$$6 + 6 + 9 + 4 + 6 + 6$$

$$37$$

$$\frac{37}{25200}\cdot 100$$

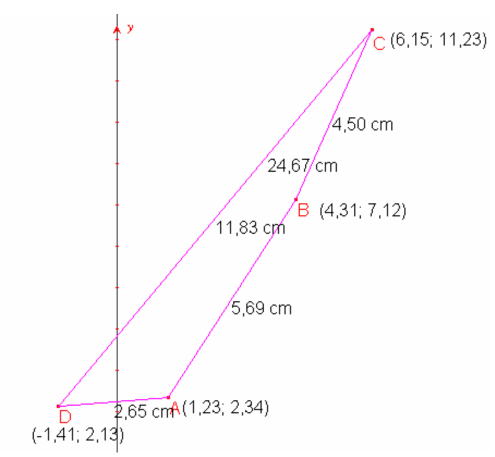
$$0.1468253968$$

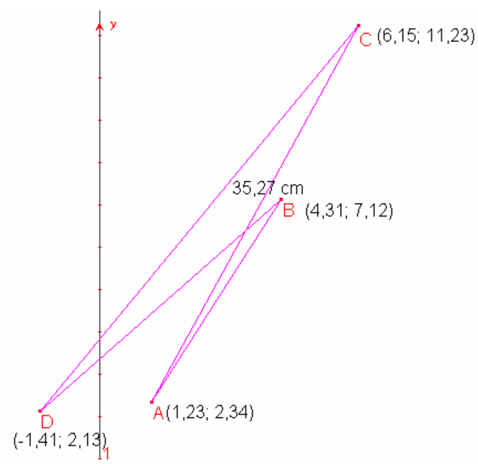
6. Un commesso viaggiatore deve visitare tre clienti e poi tornare a casa. Rappresentando le posizioni della casa del commesso e dei suoi clienti in un riferimento cartesiano ortogonale esse sono A ≡ (1.23; 2.34), B ≡ (4.31; 7.12), C ≡ (6.15; 11.23), D ≡ (-1.41; 2.13). Quanto misura il tragitto più corto nell'unità di misura prescelta, espresso con due decimali?

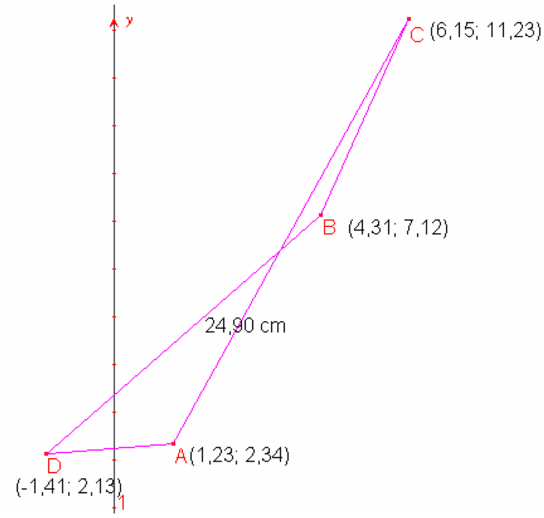
A. **18.25** B. **24.66** C. **24.90** D. **35.26** E. **38.04**

Risposta esatta B.

I tragitti diversi sono 3, dato che sono le permutazioni dei simboli BCD (dato che partiamo e torniamo ad A), ma divise per 2, perché per esempio il percorso ABCDA e il percorso ADCBA sono uguali. Sono possibili solo i seguenti percorsi ABCDA, ABDCA, ACBDA.







Con Derive calcoliamone il valore usando una funzione per la distanza fra due punti nel piano.

$$d\_2\_p(xa,\ ya,\ xb,\ yb) := \sqrt{(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2}$$

$a := [1.23,\ 2.34]$

$b := [4.31,\ 7.12]$

$c := [6.15,\ 11.23]$

$d := [-1.41,\ 2.13]$

$ab := d\_2\_p(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$

$$ab := 5.68636966789$$

$bc := d\_2\_p(b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2)$

$$bc := 4.50307672597$$

$cd := d\_2\_p(c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2)$

$$cd := 11.8306212854$$

$ad := d\_2\_p(a_1,\ a_2,\ d_1,\ d_2)$

$$ad := 2.64833910215$$

$bd := d\_2\_p(b_1,\ b_2,\ d_1,\ d_2)$

$$bd := 7.59068508107$$

$ac := d\_2\_p(a_1, a_2, c_1, c_2)$

$$ac := 10.1606348226$$

$[ab + bc + cd + ad, ab + bd + cd + ac, ac + bc + bd + ad]$

$$[24.6684067814, 35.2683108571, 24.9027357318]$$

Il minimo percorso è perciò ABCDA.

7. Consideriamo il prodotto M * 214541926389, qual è il minimo valore da assegnare ad M affinché il prodotto sia divisibile per tutti i numeri primi da 3 a 23 compresi?

A. **27170** B. **5311735** C. **111546435** D. **13585** E. Non può determinarsi dai dati

Risposta esatta D.

Fattorizziamo il fattore dato.

FACTOR(214541926389)

$$3^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 127$$

Dato che esso contiene già i fattori primi 3, 7, 17 e 23, M è il prodotto dei fattori primi mancanti, cioè

$5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$

$$13585$$

8. Consideriamo l'insieme formato dai numeri {1, 12, 123, ..., 123456789, 987654321, 87654321, ..., 321, 21}. Quanti dei suoi elementi contengono fattori primi la cui cifra delle unità è 7?

A. **3** B. **7** C. **9** D. **12** E. **15**

Risposta C

Dobbiamo generare l'insieme, che preferiamo fare in due modi diversi.

$a1 := \mathrm{VECTOR}\left(\sum_{n=1}^{h} n \cdot 10^{n-1}, h, 1, 9\right)$

$$a1 := [1, 21, 321, 4321, 54321, 654321, 7654321, 87654321, 987654321]$$

$a2 := \mathrm{VECTOR}\left(\sum_{n=1}^{h} n \cdot 10^{h-n}, h, 1, 9\right)$

$$a2 := [1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789]$$

Adesso fattorizziamo gli elementi, anche se abbiamo calcolato due volte il numero 1, dato che in ogni caso non è uno di quelli che vogliamo selezionare.

$\mathrm{VECTOR}(\mathrm{FACTOR}(a1_i),\ i,\ 1,\ \mathrm{DIM}(a1))$

$$\left[1,\ 3\cdot 7,\ 3\cdot 107,\ 29\cdot 149,\ 3\cdot 19\cdot 953,\ 3\cdot 218107,\ 19\cdot 402859,\ 3^2\cdot 1997\cdot 4877,\ 3^2\cdot 17^2\cdot 379721\right]$$

$\mathrm{VECTOR}(\mathrm{FACTOR}(a2_i),\ i,\ 1,\ \mathrm{DIM}(a1))$

$$\left[1,\ 12,\ 3\cdot 41,\ 2\cdot 617,\ 3\cdot 5\cdot 823,\ 2^6\cdot 3\cdot 643,\ 127\cdot 9721,\ 2\cdot 3^2\cdot 47\cdot 14593,\ 3^2\cdot 3607\cdot 3803\right]$$

Totale 9

9. Una classe è formata da 18 studenti, con che probabilità tutti gli studenti compiono il compleanno in un giorno diverso? Supponiamo per semplicità che nessuno sia nato il 29 febbraio. Con la dicitura giorno diverso si intende che non sia lo stesso giorno e lo stesso mese.

A. **meno del 50%** B. **Fra il 50% e il 70 %** C. **Fra il 70% e il 75%** D. **Fra il 75% e il 90%** E. **Più del 90%**

Risposta esatta B

A ogni studente assegniamo un numero da 1 a 365 che rappresenta il giorno dell'anno in cui festeggia il suo compleanno. Quindi il numero dei casi possibili è 365^{18}, dato che ognuno dei 18 studenti può avere assegnato un qualsiasi numero da 1 a 365. I casi favorevoli sono tutte quelle sequenze di 18 numeri formate da numeri tutti diversi, che sono

$$\prod_{k=0}^{17} (365 - k)$$

$$86346283865208054575477919064600803434960000$$

Dato che il primo numero si sceglie fra 365, il secondo fra i rimanenti 364, e così via.

La probabilità richiesta è perciò

$$\frac{\prod_{k=0}^{17} (365 - k)}{365^{18}}$$

$$0.653088582128$$

10. Quanto vale il prodotto degli elementi dell'insieme $\left\{\frac{13}{14}, \frac{40}{41}, \frac{121}{122}, \ldots, \frac{29524}{29525}, \frac{88573}{88574}\right\}$?

A. **Circa 1.15** B. **Circa 0.99** C. **Circa 0.89** D. **Circa 0.75** E. **Nessuno dei precedenti è corretto**

Risposta esatta C

Dobbiamo capire la legge di generazione. Non è facile da capire perché le frazioni sono semplificate. Scriviamo i primi elementi in altro modo.

$$\frac{13}{14}=\frac{26}{28}=\frac{27-1}{27+1}=\frac{3^3-1}{3^4+1},\frac{40}{41}=\frac{80}{82}=\frac{81-1}{81+1}=\frac{3^4-1}{3^4+1}.$$

Abbiamo perciò da stabilire il limite

```
FACTOR(2·88573 + 1)
```

$$3^{11}$$

$$\prod_{n=3}^{11}\frac{3^n-1}{3^n+1}$$

0.8948128694