GARA DI MATEMATICA CON LE TECNOLOGIE

FINALE 2006

Reggio Emilia 1 Dicembre 2006

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	**C**	**C**	**A**	**D**	**B**	**750**	**25**	**2054**	**26,0%**

1. Il metodo dei minimi quadrati consiste nel determinare, fra le curve di un certo tipo, quale ha minima la somma dei quadrati delle differenze fra i valori dati e quelli stimati sulla curva. Quale fra le seguenti curve esponenziali è quella dei minimi quadrati per i dati in tabella?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0,34	0,95	2,61	6,71	19,02	49,37	134,12	370,15	984,01	2654,12

A. **0,129 x 2,70^x** B. 0,131 · 2,69^x C. 0,130 · 2,71^x D. 0,128 · 2,72^x

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f(x)	0,34	0,95	2,6	6,7	19	49,4	134,1	370,2	984,01	2654,12	
											somma
f1(x)	0,35	0,94	2,54	6,86	18,51	49,98	134,94	364,33	983,70	2656,00	
dif. Q.	0,00	0,00	0,01	0,02	0,26	0,37	0,67	33,82	0,09	3,52	38,76
f2(x)	0,35	0,95	2,55	6,86	18,45	49,63	133,52	359,16	966,14	2598,93	
dif. Q.	0,00	0,00	0,00	0,02	0,32	0,07	0,36	120,75	319,20	3046,26	3486,99
f3(x)	0,35	0,95	2,59	7,01	19,00	51,49	139,55	378,18	1024,87	2777,39	
dif. Q.	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00	4,51	29,48	64,47	1669,19	15194,54	16962,28
f4(x)	0,35	0,95	2,58	7,01	19,06	51,84	140,99	383,50	1043,11	2837,26	
dif. Q.	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00	6,08	47,21	178,12	3492,81	33539,96	37264,27

2. Consideriamo la somma $s(k)=1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^3+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^k$, per quali valori interi di k si avrà $8{,}15 < s(k) < 8{,}79$?

A. $k \le 30$ B. $19 \le k \le 30$ **C. 20 £ *k* £ 30** D. $20 \le k \le 29$

$$\mathrm{SOLVE}\left(8.15 < \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{8}{9}\right)^n < 8.79,\ k,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$19.03466368 < k < 30.90503882$$

3. Per stimare l'età di un reperto fossile si usa misurare la percentuale dell'isotopo C_{14} in esso presente, dato che nel momento in cui l'organismo muore essa comincia a diminuire in modo che ogni 5730 anni si dimezza. Se in un certo fossile si è rilevato che tale percentuale, rispetto

ad un organismo vivente, è del 31,23%, possiamo stimare che il detto organismo è morto quanti anni fa circa?

A. 7881 B. 8451 **<u>C. 9620</u>** D. 10023

```
         x/5730
f(x) := 0.5

SOLVE(f(x) = 0.3123, x, Real)

                          x = 9620.644361
```

4. Il signor Gauss ha acquistato 1015 azioni del titolo GMT a € 0,75 per azione. Successivamente ha acquistato e venduto azioni GMT secondo la seguente tabella. Tenuto conto che le variazioni si riferiscono sempre al valore della riga precedente e che per ogni operazione il signor Gauss paga alla sua banca lo 0,35% della quota trattata, si vuol sapere quale sarà il saldo finale del signor Gauss. Si precisa che ogni valore si tronca per difetto (prima cifra esclusa da 0 a 4) o per eccesso (prima cifra esclusa da 5 a 9) alla seconda cifra decimale.

Num. Azioni	Variazione	Tipo di operazione
752	-5,73%	Acquisto
815	+9,32%	Vendita
531	-4,13%	Acquisto
253	+3,12%	Vendita
491	-6,12%	Acquisto
Azioni rimanenti	+8,31%	Vendita

<u>A. +€ 107,09</u> B. + € 111,19 C. +€114,43 D. + € 118,51

Num. Azioni	Variazione	Valore	Importo	Comm.	Saldo
1015		€ 0,75	€ 761,25	0,35%	-€ 763,91
752	-5,73%	€ 0,71	€ 531,68	0,35%	-€ 533,54
815	+9,32%	€ 0,77	€ 629,93	0,35%	€ 627,72
531	-4,13%	€ 0,74	€ 393,47	0,35%	-€ 394,85
253	+3,12%	€ 0,76	€ 193,32	0,35%	€ 192,65
491	-6,12%	€ 0,72	€ 352,22	0,35%	-€ 353,45
1721	+8,31%	€ 0,78	€ 1.337,16	0,35%	€ 1.332,48
					€ 107,09

5. Una tipografia si rivolge a tre rivenditori per acquistare un massimo di 1 tonnellata di carta. Il primo gli prospetta le seguenti possibilità: € 1,20 al Kg per ordini fino a 1 quintale di carta,

dopodichè applica uno sconto del 10% per ordini fino a 5 q solo per la parte eccedente 1 q, e uno ulteriore del 15% per ordini superiori a 5 q, sempre solo per la parte eccedente tale quantità. Un altro fornitore invece propone un prezzo di € 1,00 il Kg più un fisso per il trasporto di € 30,00 per ogni mezza tonnellata o porzione, cioè se ordina 500 Kg, di carta paga € 30 di fisso, se ne ordina 501 paga € 60. Un terzo fornitore invece chiede € 1,35 il Kg fino a 250 Kg., ogni 250 Kg. sconta di € 0,05 il prezzo al Kg, fino a che il prezzo non si stabilizzi a € 1,00: così se ordina 251 Kg, pagherà € 1,30 il chilo, per 501 Kg. € 1,25, e così via. Quanti Kg di carta si devono ordinare affinché sia più conveniente il secondo fornitore?

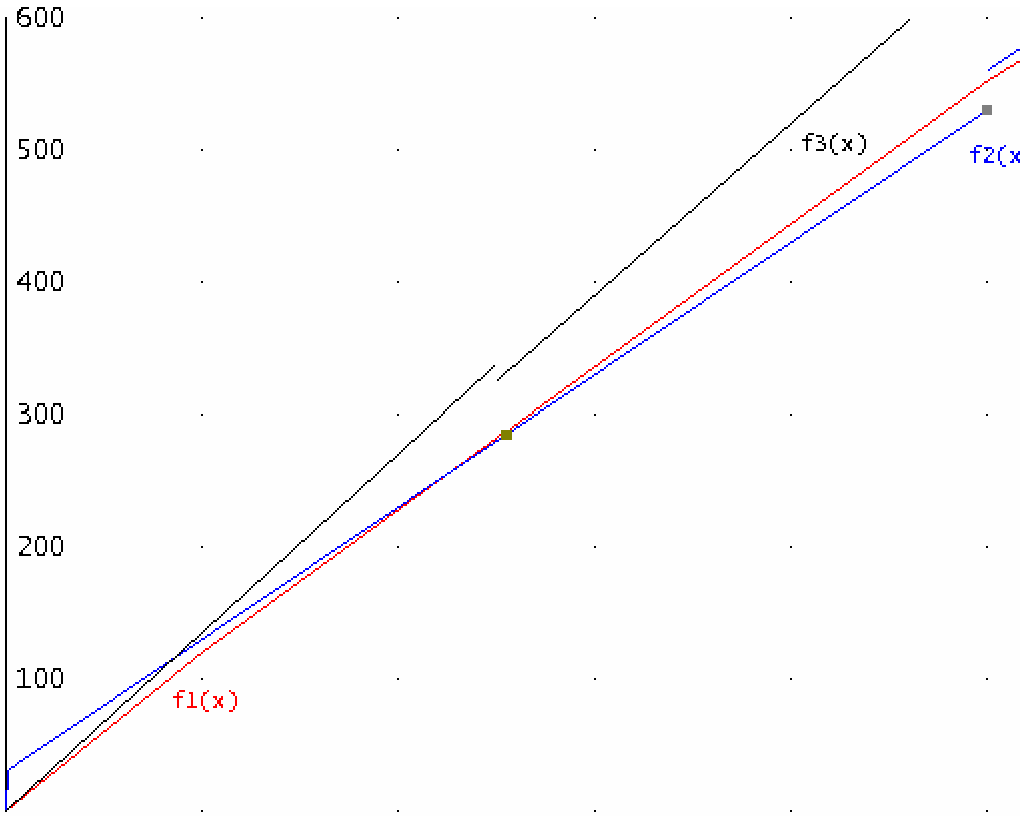
A. Non è mai conveniente B. più di 225 C. meno di 500 **D. più di 225 e meno di 500**

```
f1(x) :=
  If x ≤ 100
     1.2·x
     If x ≤ 500
        120 + 1.2·0.9·(x - 100)
        120 + 400·1.2·0.9 + 1.2·0.9·0.85·(x - 500)

f2(x) := x + 30·(FLOOR(x - 1, 500) + 1)

f3(x) := (1.35 - 0.05·FLOOR(x - 1, 250))·x
```

Graficamente si ha:



Con le tabelle abbiamo:

TABLE([f1(x), f2(x), f3(x)], x, 224, 226)

x	f1(x)	f2(x)	f3(x)
224	253.92	254	302.4
225	255	255	303.75
226	256.08	256	305.1

TABLE([f1(x), f2(x), f3(x)], x, 499, 501)

x	f1(x)	f2(x)	f3(x)
499	550.92	529	648.7
500	552	530	650
501	552.918	561	626.25

6. In una lontana galassia un pianeta si muove su un'orbita ellittica i cui fuochi, in un certo sistema di riferimento, hanno coordinate (-0,13; 2,11) e (2,15; 3,12) e asse maggiore lungo 3,27. Una cometa, che si muove nello stesso piano dell'orbita del pianeta, ha una traiettoria parabolica di fuoco (4,11; 1,79) e direttrice di equazione 2,13x – 3,11 y + 0,72 = 0. Si sa che un meteorite si muove lungo una traiettoria rettilinea che incontrerà le due orbite rispettivamente nei punti P e Q di ascissa 1,15 e 2,37. Dato che di tali punti ve ne sono più di due, quanto vale la somma delle distanze PQ?

A. 15,31 **B. 16,29** C. 18,53 D. 21,12

Definiamo delle funzioni che calcolano le equazioni generiche di un'ellisse di dati fuochi e diametro e di una parabola di dato fuoco e direttrice.

el(-0.13, 2.11, 2.15, 3.12, 3.27)

$$21.978\cdot x^2 + x\cdot(3.779016 - 18.4224\cdot y) + 38.6912\cdot y^2 - 183.748352\cdot y = -190.4982553$$

par(4.11, 1.79, 2.1, -3.11, 0.72)

$$0.6868364803\cdot x^2 + x\cdot(0.9275605200\cdot y - 8.434740699) + 0.3131635196\cdot y^2 - 3.261979250\cdot y = -20.$$

Troviamo le ordinate dei punti di ascisse date.

$$\text{NSOLVE}(21.978\cdot 1.15^2 + 1.15\cdot(3.779016 - 18.4224\cdot y) + 38.6912\cdot y^2 - 183.748352\cdot y = -190.4982553,\ y,\ \text{Real})$$

$$y = 1.540834523 \vee y = 3.755824975$$

$$\text{NSOLVE}(0.6868364803\cdot 3.58^2 + 3.58\cdot(0.92756052\cdot y - 8.434740699) + 0.3131635196\cdot y^2 - 3.26197925\cdot$$

$$-20.0593873,\ y,\ \text{Real})$$

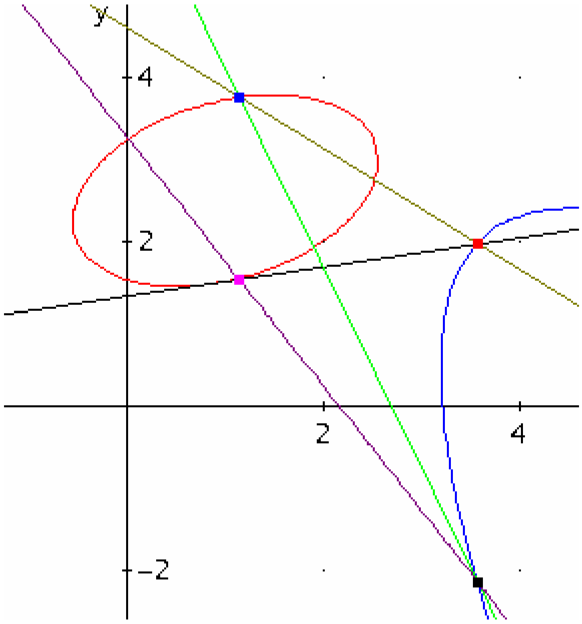
$$y = -2.159909151 \vee y = 1.972507337$$

Mediante una funzione che calcola la distanza di due punti, dopo avere approssimato le ordinate a due decimali, abbiamo:

```
d(1.15, 1.54, 3.58, 1.97) + d(1.15, 3.76, 3.58, -2.15) + d(1.15, 1.54, 3.58, -2.15) + d(1.15, 3.76,
  3.58, 1.97)

                                16.29419200
```

La rappresentazione grafica è la seguente.



7. Un'azienda ha una spesa fissa di € 300,00 per produrre un certo bene A e di € 250,00 per produrre un bene B, inoltre ogni unità del bene A costa € 6,00 e ogni unità di B costa € 4,00. Sappiamo che

   a) il prezzo di vendita unitario è rispettivamente di € 8,00 e € 5,50;

   b) il mercato non assorbe più di 500 pezzi di tipo A e 350 di tipo B;

   c) non possono prodursi più di 700 pezzi complessivi per volta.

   Determinare il massimo guadagno che si può ottenere, nell'ipotesi che il mercato assorba tutto il prodotto.

   <u>€ 750,00</u>

$$\mathrm{COSTO\_A}(X) := 300 + 6\cdot X$$

$$\mathrm{COSTO\_B}(Y) := 250 + 4\cdot Y$$

$$\mathrm{VENDITA\_A}(X) := 8\cdot X$$

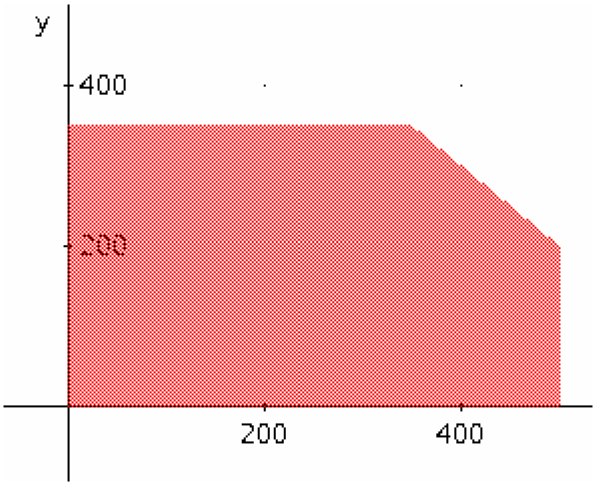
$$\mathrm{VENDITA\_B}(Y) := 5.5\cdot Y$$

$$\mathrm{GUADAGNO}(X, Y) := \mathrm{VENDITA\_A}(X) + \mathrm{VENDITA\_B}(Y) - \mathrm{COSTO\_A}(X) - \mathrm{COSTO\_B}(Y)$$

$$\mathrm{GUADAGNO}(X, Y) := \frac{4\cdot X + 3\cdot Y - 1100}{2}$$

$$0 \le X \le 500 \wedge 0 \le Y \le 350 \wedge 0 \le X + Y \le 700$$

Il poligono delle soluzioni è il seguente



I massimi si trovano nei vertici del poligono.

guadagno(0, 350)

-25

guadagno(350, 350)

675

guadagno(500, 200)

750

guadagno(500, 0)

450

8. Alla variabile n dell'espressione $n^2 + 3$ sostituiamo tutti i multipli di 23 positivi e minori di 2006. Quanti dei numeri così ottenuti sono multipli di 7?

B. 25

$$\frac{2006}{23}$$

87.21739130

```
a := VECTOR((23·h)^2 + 3, h, 1, 87)

DIM(SELECT(MOD(n, 7) = 0, n, a))
```

25

9. Il numero 2006^{2006} ha 6625 cifre, quante di queste sono uguali a 0, 2 o 6?

2054

Definiamo una funzione che scrive le cifre di un numero in un vettore.

```
cifre(n) :=
  Prog
    v := []
    m := n
    Loop
      If m = 0
         RETURN REVERSE(v)
         v := APPEND(v, [MOD(m, 10)])
      m := FLOOR(m/10)
```

Applichiamola al nostro numero.

```
a := cifre(2006^2006)
```

Selezioniamo le cifre uguali a 0, 2 e 6.

```
b := SELECT(ELEMENT(a, i) = 0 ∨ ELEMENT(a, i) = 2 ∨
  ELEMENT(a, i) = 6, i, 1, DIM(a))

DIM(b)
```

2054

10. Determinare la probabilità che, da un’urna contenente 2345 biglie numerate da 1 a 2345, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà:

a) sia un numero divisibile per 4 minore di 1234;

b) sia un numero divisibile per 6 maggiore di 956;

c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 547 e 1256.

Il risultato deve essere approssimato al primo decimale e scritto in percentuale.

<u>26,0 %</u>

La probabilità si trova utilizzando il principio di inclusione-esclusione, ossia con

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Abbiamo:

Multipli di 4 minori di 1234

```
#1:    DIM(SELECT(MOD(x, 4) = 0, x, 1, 1233))

#2:                                          308
```

Multipli di 6 maggiori di 956 e minori di 2346

```
#3:    DIM(SELECT(MOD(x, 6) = 0, x, 657, 2345))

#4:                                          281
```

Multipli di 9 maggiori di 547 e minori di 1256

```
#5:    DIM(SELECT(MOD(x, 9) = 0, x, 548, 1256))

#6:                                           79
```

Multipli di 4 minori di 1234 e multipli di 6 maggiori di 956

```
#7:    DIM(SELECT(MOD(x, 4) = 0 ∧ MOD(x, 6), x, 957, 1233))

#8:                                      23
```

si ottiene lo stesso risultato anche in questo modo

```
#9:    DIM(SELECT(MOD(x, 12) = 0, x, 957, 1233))

#10:                                     23
```

Multipli di 4 minori di 1234 e multipli di 9 compresi tra 547 e 1256

```
#11:  DIM(SELECT(MOD(x, 36) = 0, x, 254, 1233))

#12:                                          27
```

Multipli di 6 maggiori di 956 e minori di 2346 e multipli di 9 compresi tra 547 e 1256

```
#13:  DIM(SELECT(MOD(x, 18) = 0, x, 957, 1255))

#14:                                          16
```

Multipli di 4 minori di 1234 e multipli di 6 maggiori di 956 e multipli di 9 tra 547 e 1256

```
#15:  DIM(SELECT(MOD(x, 36) = 0, x, 957, 1233))

#16:                                          8
```

Probabilità unione

#17: $$\frac{308 + 281 + 79 - 23 - 27 - 16 + 8}{2345}$$

#18: 0.2601279317