GARA DI MATEMATICA CON LE TECNOLOGIE

SELEZIONE 2006

6 Novembre 2006

SOLUZIONI

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **C** | **B** | **C** | **C** | **B** | **C** | **A** | **B** | **A** | **A** |

1. Qual è il minimo valore di $n$ per cui $2006^n$ ha più di 1000 cifre?

A. 100 B. 271 **C. 303** D. 412

Deve essere $2006^n > 10^{1000} \Rightarrow \log(2006^n) > 1000 \Rightarrow n > 1000/\log(2006)$ ˜ 302,8. Quindi $2006^{303}$ ha almeno 1000 cifre.

$$\left[2006^{302},\ 2006^{303}\right]$$

$$\left[2.013448207\cdot 10^{997},\ 4.038977105\cdot 10^{1000}\right]$$

2. Sia $x=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}-\sqrt[5]{5}+\ldots+\sqrt[98]{98}-\sqrt[99]{99}$ , possiamo dire che è

A. $x < 0$ **B. $0 < x < 0.4$** C. $0{,}4 < x < 0{,}7$ D. $0{,}7 < x < 0{,}9$

$$\sum_{n=2}^{99} (-1)^n\cdot n^{1/n}$$

$$0.1642009952$$

3. Nella tabella seguente sono riportati i dati relativi al costo di un dato prodotto rilevato a prefissati e uguali intervalli di tempo.

| Tempo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 5,12 | 7,92 | 11,51 | 14,62 | 17,84 | 20,98 | 25,01 | 27,42 | 30,12 | 32,99 |

Supponendo un andamento quasi lineare, possiamo dire che all'unità di tempo t = 15, il costo del prodotto sarà circa

A. 43 B. 46 **C. 49** D. 52

Risoluzione con Excel, la calcolatrice fornisce valori molto simili

| Tempo | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | **5,12** | **7,92** | **11,51** | **14,62** | **17,84** | **20,98** | **25,01** | **27,42** | **30,12** | **32,99** | | | | | |

| y=ax+b | 5,17 | 8,32 | 11,47 | 14,62 | 17,78 | 20,93 | 24,08 | 27,23 | 30,39 | 33,54 | 36,69 | 39,84 | 42,99 | 46,15 | 49,30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | | | | | | | | | | | | | | |
| 3,15 | 2,02 | | | | | | | | | | | | | | |

4. La somma dei quadrati delle radici reali dell'equazione $x^5 - 0{,}4x^4 - 2x^3 + 0{,}7x^2 + 0{,}8x - 0{,}2 = 0$ è circa

   A. 1,64 B. 3,81 **C. 4,16** D. 7,32

```
                   5         4       3          2
a := SOLUTIONS(x   - 0.4·x   - 2·x   + 0.7·x   + 0.8·x - 0.2, x, Real)

a := [0.2347494261, -1.196138571, -0.6964296124, 1.218411358,

  0.8394073991]


 2
a

                                     4.16
```

5. Malcom deve scegliere fra gli abbonamenti ADSL elencati in tabella, ciascuno dei quali prevede un impegno almeno annuale. Detto *h* il numero di ore che Malcolm si collega per anno, quando gli conviene scegliere il servizio C?

| Servizio | Canone | Periodo | Costo per ora |
|---|---|---|---|
| A | € 9,95 | Mensile | € 0,15 |
| B | € 12,00 | Mensile | € 0,12 |
| C | € 25,00 | Trimestrale | € 0,18 |
| D | € 45,00 | Semestrale | € 0,20 |

   A. 647≤ *h* ≤ 733 **B. 501£ *h* £ 646** C. 501 ≤ *h* ≤ 733 D. *h* ≤ 647

```
sa(h) := 9.95·12 + 0.15·h

sb(h) := 12·12 + 0.12·h

sc(h) := 25·4 + 0.18·h

sd(h) := 45·2 + 0.2·h

SOLVE(sc(h) < sa(h), h)

                                h < 646.6666666

SOLVE(sc(h) < sb(h), h)

                                h < 733.3333333

SOLVE(sc(h) < sd(h), h)

                                    h > 500
```

6. Un titolo, che ha un valore nominale di € 1,00, viene acquistato a € 0,87, pagando una commissione dello 0,23%. Il titolo ha un tasso di interesse del 8,75%, sul valore nominale, su cui viene effettuata una ritenuta del 12,50%. Dopo 157 giorni il titolo viene venduto a € 0,89, pagando una commissione del 0,25%. € 1000,00 investiti, alla fine sono diventati

A. € 1027,82 B. € 1030,89 **C. € 1056,37** € 1062,49

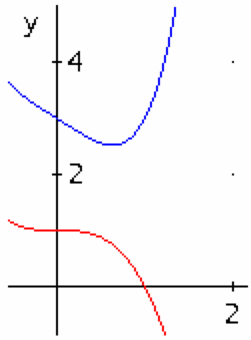
| Cap. iniz. | Val. di acq. | Cap. inv. | Tasso | Capit. Nom. | Ced. Lor. Anno |
|---|---|---|---|---|---|
| € 1.000,00 | 0,87 | € 997,70 | 8,75% | € 1.146,78 | € 100,34 |
| Ced. L. per. | Ced. Netta | Val. di vend. | Cap. lordo | Cap. Netto | Cap. finale |
| € 43,76 | € 38,29 | € 0,89 | € 1.020,64 | € 1.018,08 | € 1.056,37 |

7. Le leggi del moto di due particelle che partono allo stesso istante $t = 0$ sono $s_1(t) = t^4 - t + 3$, $s_2(t) = -t^3 + 1$ Quanto vale la minima distanza a cui possono trovarsi?

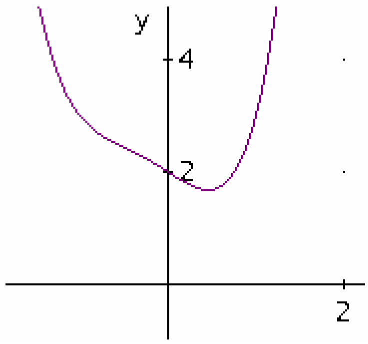
**A. circa 1,68** B. circa 1,42 C. circa 1,28 D. circa 0,2

$$s1(t) := t^4 - t + 3$$

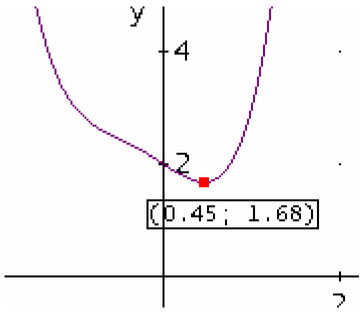
$$s2(t) := - t^3 + 1$$




$$s1(t) - s2(t)$$




Graficamente si ha




Usando il calcolo differenziale invece si ha:

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{d}{dt}(s1(t) - s2(t)),\ t,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$t = 0.4554100411$$

$$s1(0.4554100411) - s2(0.4554100411)$$

$$1.682055286$$

8. Una nave si trova in avaria in un punto dell’oceano che in un certo sistema cartesiano ortogonale monometrico ha coordinate (5,25; 4,13), Il suo S.O.S. è captato da 6 navi le cui coordinate e la rispettiva velocità in unità di misura orarie è elencata nella seguente tabella. Se la nave colerà al picco in 3 ore, quante delle 6 navi riusciranno a raggiungerla in tempo?

| Posizione | Velocità (u/h) |
|---|---|
| (3,12; 1,92) | 0,95 |
| (1,14; 6,87) | 1,28 |
| (3,75; 8,11) | 1,42 |
| (7,28; 0,53) | 1,33 |
| (7,53; 6,21) | 1,02 |
| (10,31; 4,15) | 1,72 |

A. meno di 2 **<u>B. 2</u>** C. 3 o 4 D. Più di 4

$$dist\_2\_pti(xa, ya, xb, yb) := \sqrt{(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2}$$

$$\frac{dist\_2\_pti(5.25, 4.13, 3.12, 1.92)}{0.95}$$

$$3.230910268$$

$$\frac{dist\_2\_pti(5.25, 4.13, 1.14, 6.87)}{1.28}$$

$$3.859066599$$

$$\frac{dist\_2\_pti(5.25, 4.13, 3.75, 8.11)}{1.42}$$

$$2.995268370$$

$$\frac{\mathrm{dist\_2\_pti}(5.25,\ 4.13,\ 7.28,\ 0.53)}{1.33}$$

$$3.107447028$$

$$\frac{\mathrm{dist\_2\_pti}(5.25,\ 4.13,\ 7.53,\ 6.21)}{1.02}$$

$$3.025713206$$

$$\frac{\mathrm{dist\_2\_pti}(5.25,\ 4.13,\ 10.31,\ 4.15)}{1.72}$$

$$2.941883445$$

9. Definiamo una funzione nel seguente modo. Di ogni numero naturale si stabilisce nell'ordine se è multiplo di 2, 3, 5, 7, fermandosi quando la risposta è positiva. Se il numero è multiplo di uno dei detti numeri, k per esempio, lo moltiplica per k e gli aggiunge 1, diversamente lo moltiplica per 11 e gli aggiunge 1. Per esempio f(6) = 2 · 6 + 1 = 13, f(15) = 3 · 15 + 1 = 46, f(35) = 5 · 35 +1 = 176, f(49) = 7 · 49 + 1 = 344, f(13) = 11 · 13 + 1 = 144. Consideriamo la seguente catena di applicazioni della funzione f(2) = 5 ⇒ f(5) = 26 ⇒ f(26) = 53, e così via per 100 volte. Quante cifre ha il numero così ottenuto?

**A. 64** B. 75 C. 100 D. 320

Definiamo la funzione

```
f(x) :=
  If EVEN?(x)
     2·x + 1
     If MOD(x, 3) = 0
        3·x + 1
        If MOD(x, 5) = 0
           5·x + 1
           If MOD(x, 7) = 0
              7·x + 1
              11·x + 1
```

Applichiamola 100 volte a partire da 2.

```
ITERATE(f(x), x, 2, 100)
```

$$1.932000697 \cdot 10^{63}$$

10. Un giorno un titolo azionario ha avuto uno strano comportamento in borsa. Nelle prime 10 rilevazioni è salito ogni volta dell'x%, nelle successive 10 rilevazioni è sceso ogni volta dell'x%, per altre 10 rilevazioni è salito dell'y% ogni volta e nelle ultime 10 rilevazioni è sceso ogni volta dell'y%. Sapendo che all'inizio valeva € 100,00 e alla fine € 97,77 e che se fosse salito dell'x% in ognuna delle prime 20 rilevazioni e sceso dell'y% in ognuna delle successive 20 rilevazioni, il suo valore finale sarebbe stato di circa € 80,73, determinare quanto vale all'incirca |x – y|.

**A. 0,01** B. 0,02 C. 0,03 D. 0,04

Ecco l'evoluzione del valore del titolo. Da 100 diventa

$$100 + 100 \cdot x = 100 \cdot (1 + x)$$

poi

$$100 \cdot (1 + x) + 100 \cdot (1 + x) \cdot x = 100 \cdot (1 + x) \cdot (1 + x)^2$$

e così via, alla decima rilevazione sarà $100 \cdot (1 + x)^9$.

All'undicesima rilevazione sarà

$$100 \cdot (1 + x)^9 - 100 \cdot (1 + x)^9 \cdot x = 100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)$$

alla ventesima

$$100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)^{10}$$

alla ventunesima

$$100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)^{10} \cdot (1 + y)$$

alla trentesima

$$100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)^{10} \cdot (1 + y)^{10}$$

alla trentunesima

$$100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)^{10} \cdot (1 + y)^{10} \cdot (1 - y)$$

alla quarantesima

$$100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)^{10} \cdot (1 + y)^{10} \cdot (1 - y)^{10}.$$

Nella seconda ipotesi invece alla fine avremo

$$100 \cdot (1 + x)^{19} \cdot (1 - y)^{20}.$$

Deve perciò aversi

$$\mathrm{NSOLVE}\left(100 \cdot (1 + x)^9 \cdot (1 - x)^{10} \cdot (1 + y)^{10} \cdot (1 - y)^{10} = 94.69 \wedge 100 \cdot (1 + x)^{19} \cdot (1 - y)^{20} = 77.51,\ [x, y],\ \mathrm{Real}\right)$$

che Derive non riesce a risolvere. Non conviene avvalersi della rappresentazione grafica perché Derive opera nei complessi. Si effettua invece un procedimento di tentativi con excel.

| Cap. iniz. | tasso x | tasso y | cap. fin. 1 | cap. fin. 2 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 0,01 | 0,02 | 98,52 | 80,65 |
| | 0,01 | 0,03 | 98,02 | 65,70 |
| | 0,02 | 0,03 | 96,77 | 79,22 |
| | 0,02 | 0,04 | 96,10 | 64,39 |
| | 0,03 | 0,04 | 94,69 | 77,51 |