GARA DI MATEMATICA CON LE TECNOLOGIE

SELEZIONE – 18 OTTOBRE 2007

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Una sola risposta è esatta fra le 4 proposte per ciascun quesito. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta non data 0 punti, ogni risposta errata comporta una penalità di 1 punto.

DURATA ORE 2:00

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	185	28	2008,004	37	12251,35

1. Un numero si dice molteplicemente perfetto se la somma di tutti i suoi divisori è un multiplo dello stesso numero. Quanto fa la somma di tutti i numeri molteplicemente perfetti minori o uguali a 2007?

   A. 1000 B. **1323** C. 1541 D. 2007

```
SELECT(MOD(∑(DIVISORS(n)), n) = 0, n, 1, 2007)
                                        [1, 6, 28, 120, 496, 672]
∑(SELECT(MOD(∑(DIVISORS(n)), n) = 0, n, 1, 2007))
                                                             1323
```

2. Quante coppie di numeri naturali, tutti minori o uguali a 2007, verificano l'equazione

$$221x + 65 = 195\,y\ ?$$

   A. 24 B. 74 C. **118** D. 172

```
DIM(SELECT(MOD(195·x - 65, 221) = 0, x, 1, 2007))
                                                     118
```

3. Consideriamo lo sviluppo decimale di p^p. Quanto vale la sua cifra decimale di posto 2007?

   A. **0** B. 3 C. 4 D. 6

   Il comando Approx(N,n) scrive un numero che complessivamente, compresa la parte intera, ha n cifre

```
        π
APPROX(π , 2011)

36.462159607207911770990826022692123666365508402228818738709335922934074368881699904620079875706774854~
  3681468834367007054273669913935926443156567526718023091777759573724226053032005023354959516138259457~
  1885422222305402433199779769167302876444780028452117394296018175249159350019492001619423210110480018~
  5572587188607828198392153045034535432384762182576648615956090572803143419583904008119915066360662958~
  17900302292747422204210046403709493285444110188479770746635851071036280389118115661808326088453650525~
  5311095948029552909133361385823497120761861157606574436205295895657736468959837126404885207348833917~
  6021695360021749580357206705093187706330864349355932024251894960088805550482133887927693040156397454~
  8089838086663942833779425028452211374187860279325184836662360221465215145327609854503854048204164551~
  6919082097210265379423765817354600472953993840487842116366153365057093066926223775915023204727672609~
  9587372785666335932106896988075086023535522674903216707309293732404516519807501579597086894834690675~
  0231320405360716427365675306646661517383365075423630146397640490553871423502682560453184309799761594~
  8929887365497051982863161835626552244769271680216856778567141253354628778301694461980856391693676179~
  1551598461799902110166616569434491106205980187776974685969484067348489918123021487945695391254040818~
  7182769268975590507632089998959573398443054296053308724277666040025483181935088803955411335039345973~
  2295351091082550956367472005170318766258382645379384319704235981970932148402856626207279037722778079~
  6005237523990459641575209855961867536981079742936719146950072376041462437162577611627709838236824976~
  4794608724184987988662623647399995896285047987757727278658061204572656467735230697385699726578003665~
  0802804024260074344128970218098056886176840117143846433319389797248296088878674512395617831241047421~
  6290659625614879078332820339015241526100044167854305453232218951732577135925169017878588301939389248~
  6600680454706436531842393885478399227453357108603179693736695335419022979235667386155248647101825531~
  3857973003
```

4. Determinare la misura del segmento che ha per estremi l’ortocentro e il circocentro del triangolo di vertici (0.21, 0.43), (-1.34, 0.76), (0.52, -1.35).

   A. »**2.64** B. ≈2.01 C. ≈1.74 D. ≈0.87

```
                                                   xb - xc
altezza_triangolo(xa, ya, xb, yb, xc, yc) := y - ya - ———————·(x - xa) = 0
                                                   yc - yb

ortocentro(xa, ya, xb, yb, xc, yc) := SOLVE(altezza_triangolo(xa, ya, xb, yb, xc, yc) ∧
  altezza_triangolo(xb, yb, xa, ya, xc, yc), [x, y])

                                                             2     2     2     2
asse_segm(xp, yp, xq, yq) := x·(2·xp - 2·xq) + y·(2·yp - 2·yq) = xp  - xq  + yp  - yq

circocentro(xp, yp, xq, yq, xr, yr) := SOLVE(asse_segm(xp, yp, xq, yq) ∧ asse_segm(xp, yp, xr, yr), [x,
  y])

ortocentro(0.21, 0.43, -1.34, 0.76, 0.52, -1.35)
                                   x = 1.05814582 ∧ y = 1.177654609
circocentro(0.21, 0.43, -1.34, 0.76, 0.52, -1.35)
                                   x = -0.83407291 ∧ y = -0.6688273045
                              2                                   2
√((1.05814582 - -0.83407291)  + (1.177654609 - -0.6688273045) )
                                          2.643858388
```

5. Una banca offre le seguenti alternative per la gestione di un conto corrente:

   A. € 54,00 di spese fisse e € 0,52 per ogni operazione;

   B. € 50,00 di spese fisse e € 0,58 per ogni operazione;

   C. € 1,18 per ogni operazione senza spese fisse;

   D. € 42,00 di spese fisse con 100 operazioni gratuite e € 0,85 per ogni operazione superiore a 100.

   Per quante operazioni annuali, il servizio D è più conveniente degli altri?

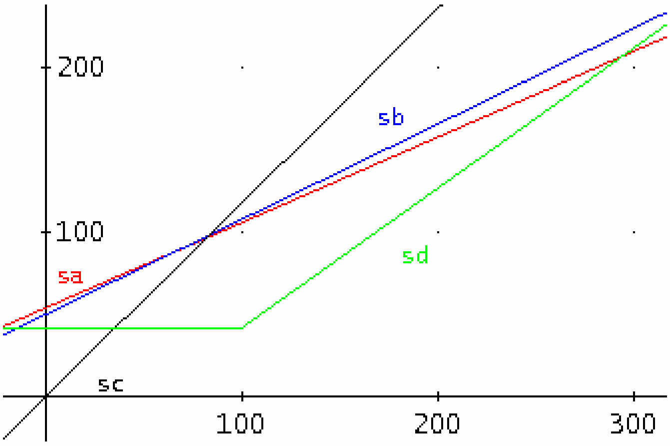
   A. Massimo 100 B. Più di 35 C. **Da 36 a 293** D. Da 30 a 285

```
sa(x) := 54 + 0.52·x

sb(x) := 50 + 0.58·x

sc(x) := 1.18·x

sd(x) :=
  If x ≤ 100
     42
     42 + 0.85·(x - 100)
```




```
TABLE([sa(x), sb(x), sc(x), sd(x)], x, 30, 40)
```

30	69.6	67.4	35.4	42
31	70.12	67.98	36.58	42
32	70.64	68.56	37.76	42
33	71.16	69.14	38.94	42
34	71.68	69.72	40.12	42
35	72.2	70.3	41.3	42
36	72.72	70.88	42.48	42
37	73.24	71.46	43.66	42
38	73.76	72.04	44.84	42
39	74.28	72.62	46.02	42
40	74.8	73.2	47.2	42

Da 36 operazioni

```
TABLE([sa(x), sb(x), sc(x), sd(x)], x, 290, 300)
```

290	204.8	218.2	342.2	203.5
291	205.32	218.78	343.38	204.35
292	205.84	219.36	344.56	205.2
293	206.36	219.94	345.74	206.05
294	206.88	220.52	346.92	206.9
295	207.4	221.1	348.1	207.75
296	207.92	221.68	349.28	208.6
297	208.44	222.26	350.46	209.45
298	208.96	222.84	351.64	210.3
299	209.48	223.42	352.82	211.15
300	210	224	354	212

Fino a 293 operazioni

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

La risposta è formata da un numero intero o decimale. Ogni risposta esatta o parzialmente esatta è valutata da 0 a 5 punti, ogni risposta non data 0 punti, ogni risposta del tutto errata comporta una penalità di 1 punto.

6. Consideriamo la funzione $f\left(n\right)=\begin{cases} n/2 & n\ pari \\ 3n+1 & ndispari \end{cases}$, che agisce su input numeri naturali. Si è verificato per valori molto grandi di n che se la applichiamo successivamente prima o poi raggiungiamo il numero 1. per esempio a partire da 20 abbiamo 7 passi: 20 $\to$ 10 $\to$ 5 $\to$ 16 $\to$ 8 $\to$ 4 $\to$ 2 $\to$ 1. Partendo da 10000000001, dopo quanti passi raggiungiamo 1? **185**

```
f(n) :=
  If ¬ INTEGER?(n)
     "Funzione non definita"
     If EVEN?(n)
        n/2
        3·n + 1

it(n) :=
  Prog
    i := 1
    m := f(n)
    v := [n]
    Loop
      If m = 1
         RETURN APPEND(v, [1])
         i := i + 1
      v := APPEND(v, [m])
      m := f(m)

it(10000000001)

DIM(v) - 1

185
```

Osserviamo che nessuno ha fornito la risposta esatta, alcuni hanno risposto 186, hanno cioè contato anche il valore iniziale, mentre anche nell'esempio era chiaro che questo valore non era da contare. Si è perciò deciso di valutare 3 punti la risposta 186 e 5 punti la risposta esatta 185.

7. Dato un numero naturale n sommiamone i divisori diversi dallo stesso n, se riotteniamo n ci fermiamo, se no continuiamo la procedura finché non otteniamo n oppure non abbiamo ripetuto il procedimento 2007 volte. Partendo con n = 14316, quante volte ripetiamo il procedimento? **28**

```
sum_div(n) :=
  Prog
    If ¬ INTEGER?(n) v n < 0
       RETURN "Numero non intero o negativo"
    q := [n]
    t := Σ(DIVISORS(n)) - n
    Loop
      If t = n v DIM(q) = 2008
         RETURN q
      q := APPEND(q, [t])
      t := Σ(DIVISORS(t)) - t

sum_div(14316)

[14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556,
  274924, 275444, 243760, 376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744,
  19916, 17716]

DIM(q)

                                                                   28
```

8. Quanto vale la somma, approssimata al terzo decimale, di tutte le soluzioni dell'equazione $2007^x = x^{2007}$? **2008,004**

```
SOLVE(x^2007 = 2007^x, x, Real)

                                                  x = 1.003810617

Una soluzione è ovviamente x=2007. Applichiamo i logaritmi

SOLVE(2007·LN(x) = x·LN(2007), x, Real)

                                                  x = 1.003810617

Studiamo la derivata prima

d
── (2007·LN(x) = x·LN(2007))
dx

                                                  2007
                                                  ──── = LN(2007)
                                                   x

SOLVE( 2007/x = LN(2007), x )

                                                  x = 263.9262747

Non ci sono altre soluzioni

    2007 + 1.003810617

                                                       2008.003810
```

La risposta 2007, pur errata, è stata valutata 1 punto.

9. Una progressione geometrica è una successione ordinata di numeri reali ognuno dei quali si ottiene dal precedente moltiplicando per uno stesso numero q, detto ragione della

progressione. Che posizione occupa il numero 87,108 nella progressione geometrica di ragione 1,12 e il cui 12° elemento è 5,124? **37**

$$\text{num\_el\_pr\_gm}(a\_p,\ a\_t,\ q,\ t) := \frac{\mathrm{LN}\left(\left|\dfrac{a\_p}{a\_t}\right|\right)}{\mathrm{LN}(|q|)} + t$$

$$\text{num\_el\_pr\_gm}(87.108,\ 5.124,\ 1.12,\ 12)$$

$$36.99996656$$

10. Un capitale iniziale di € 10000 è investito in un’obbligazione che paga un interesse annuo del 2.75%, che viene però aggiunto al capitale. Se l’inflazione annua è mediamente del 1.35% annuo, dopo 15 anni quale sarà il valore reale del capitale finale? **12251,35**

$$10000 \cdot 1.0275^{15}$$

$$1.502198964 \cdot 10^{4}$$

Perdita del potere d'acquisto in seguito all'inflazione

$$(1 - 0.0135)^{15}$$

$$0.8155608011$$

Valore reale del capitale finale

$$(1.502198964 \cdot 10^{4}) \cdot 0.8155608011$$

$$1.225134590 \cdot 10^{4}$$

La risposta 12251 è stata valutata 3 punti.