GARA DI MATEMATICA CON LE TECNOLOGIE

FINALE

TELESE 17 NOVEMBRE 2007

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	B	A	C	61	11	1853	526	0,08146341463

DURATA MINUTI 90

Una sola risposta è esatta fra le 4 proposte per ciascun quesito. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta non data 0 punti, ogni risposta errata comporta una penalità di 1 punto.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Quante coppie di numeri naturali uno almeno dei quali minore o uguale a 2007, soddisfano l'equazione $x^2 - 1620y^2 = 1$?

   A. 0 B. 2 C. 19 D. 23

```
SELECT(INTEGER?(√(1620·y^2 + 1)), y, 1, 2007)
                                              [4, 1288]
```

2. Quanti degli elementi dell'insieme $\{n^2 - n + 1 : n \in \mathbb{N}, 123 \le n \le 345\}$ sono multipli di 13 ma non di 19?

   A. 4 B. 25 C. 30 D. 34

```
DIM(SELECT(MOD(n^2 - n + 1, 13) = 0 ∧ MOD(n^2 - n + 1, 19) ≠ 0, n, 123, 345))
                                      30
```

3. Per quanti valori interi di h, le rette del fascio di equazione $(0.22h + 1.13)\,x + (0.37 + 1.14h)\,y - 1.15h + 2.87 = 0$, formano con gli assi coordinati un triangolo di area minore o uguale a 2?

   A. 5 B. 10 C. 18 D. Infiniti

$$fascio(h) := (0.22\cdot h + 1.13)\cdot x + (0.37 + 1.14\cdot h)\cdot y - 1.15\cdot h + 2.87 = 0$$

$$SOLVE(fascio(h) \wedge x = 0,\ y)$$

$$y = \frac{115\cdot h - 287}{114\cdot h + 37} \wedge x = 0$$

$$SOLVE(fascio(h) \wedge y = 0,\ x)$$

$$x = \frac{115\cdot h - 287}{22\cdot h + 113} \wedge y = 0$$

$$SOLVE\left(\left|\frac{115\cdot h - 287}{22\cdot h + 113}\right| \cdot \left|\frac{115\cdot h - 287}{114\cdot h + 37}\right| \le 2,\ h,\ Real\right)$$

$$0.8568812324 \le h \le 10.52111852$$

4. Dato il triangolo di vertici (0.97, 1.08), (-2.74, -1.42), (3.58, -2.13), costruire il suo simmetrico rispetto al baricentro. Quanto vale il perimetro dell'esagono convesso che ha per vertici quelli dei due triangoli?

A. ≈<u>17.17</u> B. ≈18.24 C. ≈19.34 D. ≈20.45

$$baricentro(xa, ya, xb, yb, xc, yc) := \left[\frac{xa + xb + xc}{3},\ \frac{ya + yb + yc}{3}\right]$$

$$sim\_c(x, y, xc, yc) := [2\cdot xc - x,\ 2\cdot yc - y]$$

$$sim\_c(0.97, 1.08, (baricentro(0.97, 1.08, -2.74, -1.42, 3.58, -2.13))_1, (baricentro(0.97, 1.08, -2.74, -1.42, 3.58, -2.13))_2)$$

$$[0.2366666666, -2.726666666]$$

$$sim\_c(-2.74, -1.42, (baricentro(0.97, 1.08, -2.74, -1.42, 3.58, -2.13))_1, (baricentro(0.97, 1.08, -2.74, -1.42, 3.58, -2.13))_2)$$

$$[3.946666666, -0.2266666666]$$

$$sim\_c(3.58, -2.13, (baricentro(0.97, 1.08, -2.74, -1.42, 3.58, -2.13))_1, (baricentro(0.97, 1.08, -2.74, -1.42, 3.58, -2.13))_2)$$

$$[-2.373333333, 0.4833333333]$$

$$dist\_2\_pti(xa, ya, xb, yb) := \sqrt{(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2}$$

$$dist\_2\_pti(0.97, 1.08, 3.946666666, -0.2266666666) + dist\_2\_pti(3.946666666, -0.2266666666, 3.58, -2.13) + dist\_2\_pti(3.58, -2.13, 0.2366666666, -2.726666666) + dist\_2\_pti(0.2366666666, -2.726666666, -2.74, -1.42) + dist\_2\_pti(-2.74, -1.42, -2.373333333, 0.4833333333) + dist\_2\_pti(-2.373333333, 0.4833333333, 0.97, 1.08)$$

$$17.17064358$$

5. Una coppia di numeri primi come 5 e 7 che differiscono fra loro di due unità si chiamano primi gemelli. Quante sono le coppie di primi gemelli minori o uguali a 2007?

A. Meno di 50 B. 55 C. 61 D. più di 70

```
SELECT(PRIME(n) ∧ PRIME(n + 2), n, 1, 2007, 2)

[3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197, 227, 239, 269, 281, 311, 347, 419,
 431, 461, 521, 569, 599, 617, 641, 659, 809, 821, 827, 857, 881, 1019, 1031, 1049, 1061, 1091, 1151,
 1229, 1277, 1289, 1301, 1319, 1427, 1451, 1481, 1487, 1607, 1619, 1667, 1697, 1721, 1787, 1871,
 1877, 1931, 1949, 1997]

DIM(SELECT(PRIME(n) ∧ PRIME(n + 2), n, 1, 2007, 2))

61
```

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

La risposta è formata da un numero intero o decimale. Ogni risposta esatta o parzialmente esatta è valutata da 0 a 5 punti, ogni risposta non data 0 punti, ogni risposta errata comporta una penalità di 1 punto.

6. Ci sono le seguenti alternative di un gestore di cellulari:
   A. € 0,10 alla risposta e € 0,08 per ogni frazione di 10 secondi di conversazione;
   B. € 0,12 alla risposta e € 0,10 per ogni frazione di 15 secondi di conversazione;
   C. € 0,15 alla risposta e € 0,22 per ogni frazione di 20 secondi di conversazione;
   D. € 0,25 per ogni frazione di 30 secondi di conversazione.

   Quale deve essere il numero medio di secondi di conversazione affinché sia più conveniente il servizio A? **61**

```
ga(x) := 0.1 + 0.08·(FLOOR(x - 1, 10) + 1)
gb(x) := 0.12 + 0.1·(FLOOR(x - 1, 15) + 1)
gc(x) := 0.15 + 0.22·(FLOOR(x - 1, 20) + 1)
gd(x) := 0.25·(FLOOR(x - 1, 30) + 1)
TABLE([ga(x), gb(x), gc(x), gd(x)], x, 0, 100)
```

59	0.58	0.52	0.81	0.5
60	0.58	0.52	0.81	0.5
61	0.66	0.62	1.03	0.75
62	0.66	0.62	1.03	0.75
63	0.66	0.62	1.03	0.75

7. Consideriamo un qualsiasi multiplo di 3 e sommiamo i cubi delle sue cifre, ripetendo il procedimento se il numero ottenuto è diverso da quello di partenza. Si dimostra che in ogni caso questo procedimento condurrà prima o poi al numero 153, che ha la proprietà di essere uguale alla somma dei cubi delle proprie cifre, pertanto il procedimento a quel punto si interrompe. Per esempio per 369 avremo 4 passi: 369 $\rightarrow$ 972 $\rightarrow$ 1080 $\rightarrow$ 513 $\rightarrow$ 153. Dopo quanti passi 369^{2007} arriva a 153? **11**

```
sum_cifre_cubi(n) :=
  Prog
    If ¬ INTEGER?(n) ∨ n < 0
       RETURN "Numero non intero o negativo"
    w := 0
    m := n
    Loop
      If m = 0
         RETURN w
      w := w + MOD(m, 10)^3
      m := FLOOR(m/10)

Ciclo(n) :=
  Prog
    If MOD(n, 3) ≠ 0
       RETURN "Valore non ammesso perché non multiplo di 3"
    h := [n]
    p := n
    Loop
      If p = 153
         RETURN h
      sum_cifre_cubi(p)
      p := w
      h := APPEND(h, [w])
```

$$\text{Ciclo}(369^{2007})$$

$$\text{DIM}(h) - 1$$

$$11$$

8. Quante delle frazioni del tipo $\dfrac{n^3+2n^2+3n-1}{n^2+1}$, per n numero naturale minore o uguale a 2007, sono ridotte ai minimi termini? **1853**

$$\text{DIM}(\text{SELECT}(\text{GCD}(n^3 + 2\cdot n^2 + 3\cdot n - 1,\ n^2 + 1) = 1,\ n,\ 1,\ 2007))$$

$$1853$$

9. Per calcolare l'area delimitata dal semiasse positivo delle ascisse, dalle rette $x = 1$ e $x = 4$ e dalla funzione $(x-5)\cdot\sin\left(\dfrac{x}{2}+3\right)\cdot e^{\frac{x}{5}}$, dividiamo l'intervallo [1, 4] in n parti uguali e consideriamo i rettangoli che hanno per base uno di questi n intervallini e per altezza l'ordinata del punto della funzione calcolato nell'estremo destro dello stesso intervallino. Si vuole sapere il minimo valore intero di n affinché la somma delle aree di detti rettangoli fornisca un valore approssimato dell'area con una precisione al centesimo. **526**

$$f(x) := (x - 5)\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{x}{2} + 3\right)\cdot e^{x/5}$$

$$y < f(x) \wedge x > 1 \wedge x < 4 \wedge y > 0$$

$$\int_1^4 (x - 5)\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{x}{2} + 3\right)\cdot e^{x/5}\, dx$$

9.228811539

$$\mathrm{area\_ret}(a, b, n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{b - a}{n}\cdot f\left(a + \frac{k\cdot(b - a)}{n}\right)$$

area_ret(1, 4, 525)

9.230000999

area_ret(1, 4, 526)

9.22999876

10. Una progressione aritmetica è una successione ordinata di numeri, ognuno dei quali si ottiene aggiungendo al precedente sempre la stessa quantità, detta ragione. Per esempio 1, 3, 5, 7, 9, … è una progressione aritmetica di ragione 2. . Di una progressione aritmetica sappiamo che il suo 37° elemento è 4,78 e il suo 78° è 8,12. Quanto vale la ragione? **0,08146341463**

$$\frac{8.12 - 4.78}{78 - 37}$$

0.08146341463