Esercizio sul piano inclinato

La forza peso è data dalla formula $F_p = mg$.

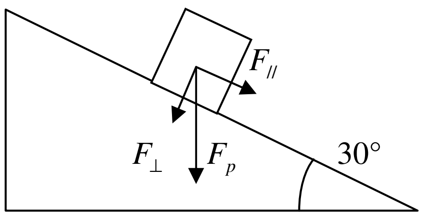
Allora $F_{//}$ e $F_{\perp}$ possono essere scritte utilizzando l'angolo di inclinazione del piano oppure le grandezze geometriche:

	Angolo di inclinazione	Grandezze geometriche
Forza parallela	$F_{//} = F_p \sin(\alpha)$	$F_{//} = \frac{h}{l} F_p$
Forza perpendicolare	$F_{\perp} = F_p \cos(\alpha)$	$F_{\perp} = \frac{b}{l} F_p$

1) Problema

Sia dato un piano inclinato di 30° privo di attrito su cui poggia una massa di 6 kg. Determinare l'accelerazione con cui scende il corpo.

Soluzione



L'equazione che descrive il moto del corpo è la seconda legge della dinamica

$$F = ma$$

Dove:

- F rappresenta la risultante di tutte le forze attive che determinano il moto del corpo;
- m la massa totale dei corpi sottoposti all'azione della forza risultante F;
- a è l'accelerazione dei corpi.

Allora $F = ma$

Diventa considerando la forza attiva $F_{//} = ma$

Calcolo $F_{//} = F_p \sin(\alpha) = mg\sin(\alpha) = 6 \cdot 9{,}8 \cdot \sin(30) = 29{,}4N$

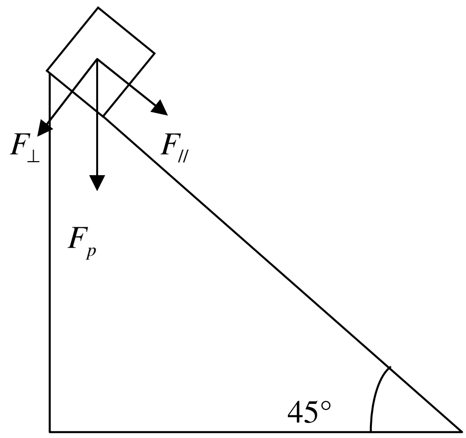
Sostituendo allora

$$29{,}4 = 6a \;\rightarrow\; a = 4{,}9\, m/s^2$$

2) Problema

Sia dato un piano inclinato di 45°, lungo 2 metri e privo di attrito sulla cui sommità poggia una massa di 550g. Determinare l'accelerazione con cui scende il corpo e il tempo che impiega a scendere e la velocità con cui arriva alla fine del piano inclinato.

<u>Soluzione</u>



L'equazione che descrive il moto del corpo è la seconda legge della dinamica

$$F = ma$$

Diventa considerando la forza attiva $F_{//} = ma$

Calcolo $F_{//} = F_p \sin(\alpha) = mg\sin(\alpha) = 0{,}55 \cdot 9{,}8 \cdot \sin(45) = 3{,}8N$

Sostituendo allora

$$3{,}8 = 0{,}55a \;\rightarrow\; a = 6{,}91\, m/s^2$$

Poiché il moto lungo il piano è uniformemente accelerato il tempo che il corpo impiega a cadere è

$$t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2\cdot 2}{6{,}91}}=0{,}76s$$

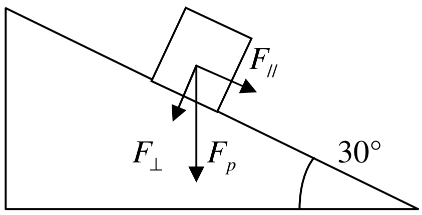
La velocità con cui arriva al termine del piano inclinato è:

$$v=v_0+at=6{,}91\cdot 0{,}76=5{,}25\,{}^{m}\!/_{s}\,.$$

3) Problema

Sia dato un piano inclinato di 30° avente coefficiente di attrito $\mu=0{,}08$ su cui poggia una massa di 8 kg. Determinare l'accelerazione con cui scende il corpo.

<u>Soluzione</u>



L'equazione che descrive il moto del corpo è la seconda legge della dinamica

$$F=ma$$

Poiché c'è attrito dobbiamo tener presente che l'attrito si oppone sempre alla forza attiva e che nel caso del piano inclinato la forza di attrito è data da $F_a=\mu F_{\perp}$.

Allora la formula $F=ma$ diventa

$$F_{//}-F_a=ma$$

$$F_{//}-\mu F_{\perp}=ma$$

$$F_{//}=F_p\sin(\alpha)=mg\sin(30)=8\cdot 9{,}8\cdot\sin(30)=39{,}2N$$

$$F_{\perp}=F_p\cos(\alpha)=mg\cos(30)=8\cdot 9{,}8\cdot\cos(30)=67{,}9N$$

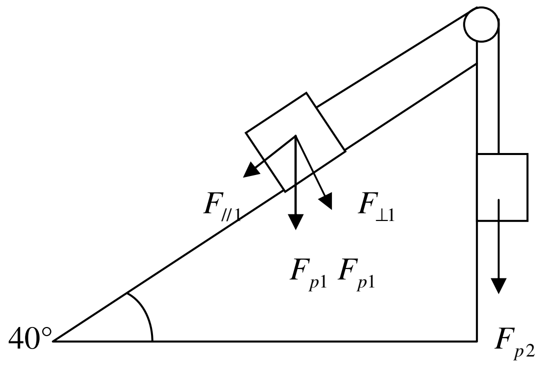
$$F_{//}-\mu F_{\perp}=ma\ \rightarrow\ 39{,}2-0{,}08\cdot 67{,}9=8a$$

$$39{,}2-0{,}08\cdot 67{,}9=8a\ \rightarrow\ 39{,}2-5{,}4=8a\ \rightarrow\ 33{,}8=8a\ \rightarrow\ a=4{,}23\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.$$

4) Problema

Dato un piano senza attrito inclinato di 40° considerare su di esso una massa $m_1 = 5kg$ collegata tramite un filo ed una carrucola, anch'essa senza attrito, ad un'altra massa $m_2 = 3kg$ lasciata libera verticalmente. Determinare l'accelerazione del sistema.

Soluzione



Il filo trasmette l'azione della forza peso della massa m_2 lungo la stessa direzione della componente $F_{//1}$ pertanto esse saranno responsabili del moto del sistema. Prendiamo come positivo il verso di $F_{//1}$, cioè quello che fa scendere il corpo lungo il piano inclinato. Con questa convenzione se l'accelerazione risultante è positiva il sistema si sposterà nel verso di trascinamento della massa 1, viceversa se l'accelerazione risultante è negativa il sistema si sposterà nel verso di trascinamento della massa 2.

L'equazione che determina il moto del sistema è:

$$F = ma$$

che diventa

$$F_{//1} - F_{p2} = (m_1 + m_2)a$$

$F_{//1} = F_{p1}\sin(40) = 31,5N$

$F_2 = m_2 g = 29,4N$

Sostituendo si ottiene

$$31,5 - 29,4 = (5+3)a$$

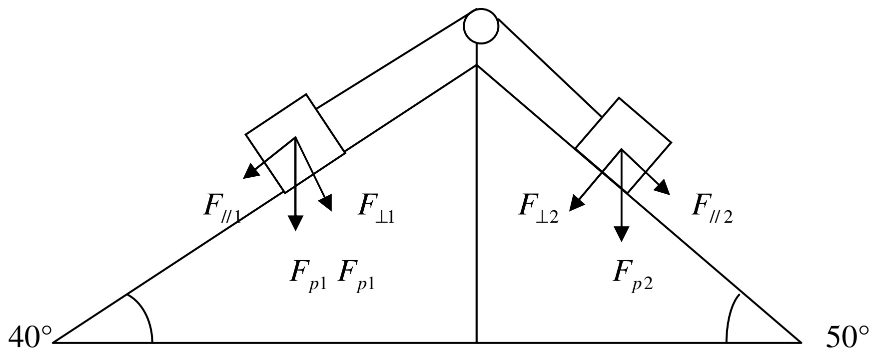
$$2,1 = 8a \;\rightarrow\; a = 0,26 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

Essendo a positiva il sistema si sposta nel verso di trascinamento della massa m_1.

5) Problema

Dato un piano senza attrito inclinato di 40° considerare su di esso una massa $m_1 = 3kg$ collegata tramite un filo ed una carrucola, anch'essa senza attrito, ad un'altra massa $m_2 = 4kg$ disposta su un piano inclinato di 50° e avente stessa altezza del primo piano . Determinare l'accelerazione del sistema.

<u>Soluzione</u>



Il filo trasmette l'azione della forza di trascinamento $F_{//2}$ lungo la stessa direzione della componente attiva $F_{//1}$ pertanto esse saranno responsabili del moto del sistema. Prendiamo come positivo il verso di $F_{//1}$.

Allora 'equazione

$$F = ma$$

diventa

$$F_{//1} - F_{//2} = (m_1 + m_2)a$$

$F_{//1} = F_{p1} \sin(40) = 18{,}9N$

$F_{//2} = F_{p2} \sin(50) = 30{,}1N$

Allora

$$18{,}9 - 30{,}1 = 7a$$

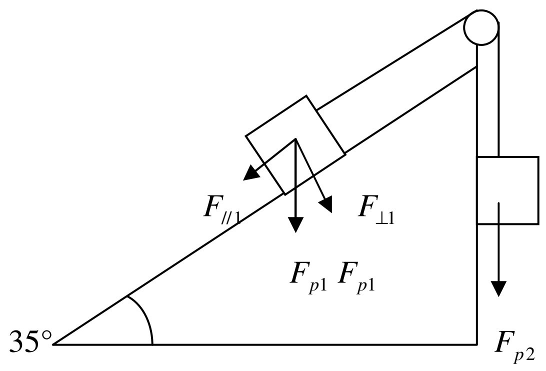
$$-11{,}2 = 7a \rightarrow a = -1{,}6 \, m/s^2$$

Essendo a negativa il sistema si sposta nel verso di trascinamento della massa m_2.

6) Problema

Dato un piano con coefficiente di attrito statico $\mu = 0{,}41$ e inclinato rispetto l'orizzontale di 35° considerare su di esso una massa $m_1 = 11kg$ collegata tramite un filo ed una carrucola priva di attrito, ad un'altra massa m_2 lasciata libera verticalmente. Determinare il valore della massa m_2 affinché il sistema sia in equilibrio.

<u>Soluzione</u>



L'equazione che determina il moto del sistema è:

$$F = ma$$

Poiché il sistema deve essere in equilibrio deve essere $F = 0$

La forza di trascinamento m_2 deve fare da equilibrio sulla forza impressa da m_1. Su m_1 agiscono due forze:

- la forza di trascinamento $F_{//1}$
- la forza di attrito $F_a = \mu F_{\perp 1}$

$F_{//1} = F_{p1}\sin(35) = 61{,}8N$

$F_a = \mu F_{\perp 1} = \mu F_{p1}\cos(35) = 35{,}2N$

Poiché $F_{//1} > F_a$ il corpo m_1 esercita una forza trainante nel verso ascendente del piano inclinato.

Possiamo scrivere allora

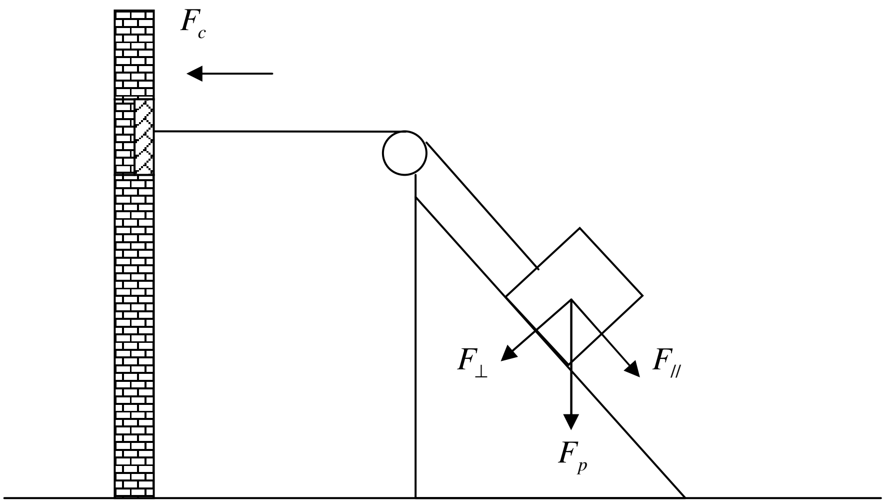
$$(F_{//1} - F_a) - F_{p2} = 0$$

$$26{,}6 = 9{,}8m_2 \quad \rightarrow \quad m_2 = 2{,}71kg$$

7) Problema

Sia dato un piano inclinato di $60°$ avente coefficiente di attrito $\mu = 0{,}12$ su cui poggia una massa m. Determinare il minimo valore della massa affinché riesca a staccare un mattone da un muro vincolato ad esso da una forza di coesione $F_c = 160N$.

Soluzione



L'equazione che descrive il moto del corpo è la seconda legge della dinamica

$$F = ma$$

$$(F_{//} - F_c) - \mu F_\perp = ma$$

Osservazione

Affinché vi sia movimento:

- considero le forze attive $F_{//} - F_c$
- considero le forze passive $\mu F_\perp$
- se le forze attive sono superiori alle forze passive, cioè $|F_{//} - F_c| > \mu F_\perp$ vi è movimento;
- se le forze attive sono inferiori alle forze passive, cioè $|F_{//} - F_c| < \mu F_\perp$ non vi è movimento cioè la le forze che generano movimento non sono in grado di vincere l'attrito, quindi il corpo rimane fermo.

In questo caso la forza attiva è $F_{//}$ deve vincere al forza di coesione F_c tenendo conto che deve anche contrastare la forza di attrito $\mu F_\perp$, quindi:

$F_{//} = F_p \sin(60) = 8{,}5mN$

$F_a = \mu F_\perp = \mu F_p \cos(60) = 0{,}6mN$

Per staccare il mattone dal muro la forza $F_{//}$ deve equilibrare l'azione della forza di coesione F_c tenendo conto anche della resistenza dovuta alla forza di attrito $\mu F_{\perp}$, la condizione minima affinché questo avvenga è che:

$$F_{//} = F_c + \mu F_{\perp}$$

Che ricordando l'equazione

$$(F_{//} - F_c) - \mu F_{\perp} = ma$$

corrisponde ad $a = 0$, che è la condizione minima affinché la massa riesca a staccare il mattone da muro, per valori $a > 0$, il mattone viene comunque tolto.

Quindi:

$$8{,}5m - 160 - 0{,}6m = 0$$

$$8{,}5m - 160 - 0{,}6m = 0$$

$$7{,}9m = 160$$

$$m = \frac{160}{7{,}9} = 20{,}26kg$$