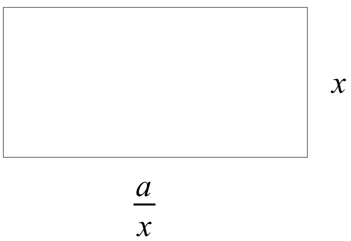
Metodo "generalizzato" di Erone e metodo di Newton per il calcolo della radice n-sima di un numero a.

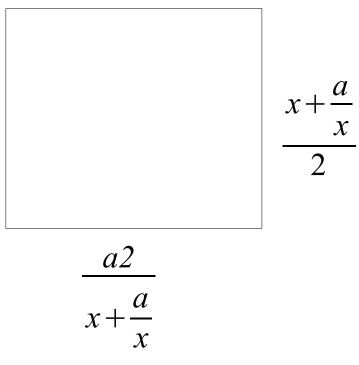
Scopo di questo lavoro è mostrare come, partendo da due punti di vista ed approcci diversi, si può arrivare allo stesso risultato, producendo la medesima formula per il calcolo della radice n-sima di un dato numero.

Infatti, nel metodo "generalizzato" di Erone ("generalizzato" nel senso che si estende il ragionamento di Erone a dimensioni superiori a tre) si sfrutta il concetto di media aritmetica tra le dimensioni di un oggetto geometrico (superficie , solido, solido "ideale"), producendo una certa formula ricorsiva. La stessa formula ricorsiva sarà prodotta d'altra parte sfruttando il metodo di Newton applicato alla funzione $y=x^n-a$.

Metodo generalizzato di Erone.

Volendo calcolare la radice quadrata di un numero, consideriamo un rettangolo di dimensioni x ed $\frac{a}{x}$ di area quindi uguale ad a. Facendo la media aritmetica tra x ed $\frac{a}{x}$ otteniamo un valore che è compreso tra questi stessi valori. Mettendo ora al posto della x tale media aritmetica e iterando lo stesso ragionamento ai successivi rettangoli ottenuti, vedremo che tale media tenderà alla radice quadrata di a; e cioè il generico rettangolo tenderà a diventare il quadrato di lato di misura la radice cercata.. Vediamo questo in maniera schematica.





Avremo quindi la formula ricorsiva: $x_n=\frac{x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}}{2}$

Quando n tenderà all'infinito, il termine della formula tenderà ad un certo numero r che soddisferà l'equazione $r=\frac{r+\frac{a}{r}}{2}$, la cui soluzione sarà appunto la radice quadrata di a.

Passiamo ora alla radice cubica di un dato numero a. Si fa lo stesso ragionamento geometrico, questa volta nello spazio. Si avranno quindi parallelepipedi (a basi quadrate) di dimensioni x , x ed $\frac{a}{x}$ il cui volume sarà uguale ad a. Anche qui tali parallelepipedi li faremo "tendere" al cubo dello stesso volume a, il cui spigolo misurerà appunto radice cubica di a. La formula ricorsiva sarà:

$$x_n=\frac{2\mathrm{x}_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^2}}{3}$$

Ora, operando analogamente come prima avremo l'equazione:

$r=\frac{2\mathrm{r}+\frac{a}{r^2}}{3}$, la cui soluzione sarà la radice cubica di a.

A questo punto, per poter passare a radici di indici superiori a tre, facciamo delle ipotesi un po' suggestive; nel senso che per calcolare la radice n-sima di a faremo la media aritmetica di n-1 numeri uguali ad x ed il numero $\frac{a}{x^{(n-1)}}$.

E' come se considerassimo un "solido" immaginario a n dimensioni il cui volume fosse definito come il prodotto delle misure delle sue dimensioni, considerandone n-1 uguali ad x e la restante uguale ad $\frac{a}{x^{(n-1)}}$. Otterremo quindi la formula ricorsiva:

$$x_k=\frac{(n-1)x_{k-1}+\frac{a}{x_{k-1}^{(n-1)}}}{n} \quad \text{cioè} \quad x_k=\frac{(n-1)x_{k-1}^n+a}{n\,x_{k-1}^{(n-1)}}$$

Operando come fatto sopra, troveremo l'equazione nell'incognita r :

$r=\frac{(n-1)r+\frac{a}{r^{(n-1)}}}{n}$ la cui soluzione sarà la radice n-sima di a.

Metodo di Newton

Consideriamo ora la funzione $y=x^n-a$, il cui grafico taglia l'asse delle x nel punto coincidente con la radice n-sima di a. Applichiamo allora la formula di Newton alla funzione data: $x_k=x_{x-1}-\frac{x_{k-1}^n-a}{D(x_{k-1}^n-a)}$. Calcolando otterremo proprio la stessa formula ottenuta con il metodo di Erone $x_k=\frac{(n-1)x_{k-1}^n+a}{n\,x_{k-1}^{(n-1)}}$.

Conclusioni.

In definitiva abbiamo ottenuto la stessa formula, partendo però da basi ed ipotesi (apparentemente !?) diverse per tipo e genere (geometriche ed aritmetiche in Erone, differenziali in Newton). Ciò può costituire una riflessione di tipo logico-epistemologico.

Lecce settembre 2012 Angelo Toma