

# Equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi "multitemporali"

Pierfrancesco Urbani

28 settembre 2007

Supponiamo di avere un sistema descritto dal seguente funzionale Azione:

$$\mathcal{A} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} L(\eta, \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\}_{i=1, \dots, n}, \{x_i\}_{i=1, \dots, n}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

Si cercano le quazioni di Eulero-Lagrange relative a questa lagrangiana, ovvero si cercano le equazioni differenziali che abbiano come soluzione quella particolare traiettoria che minimizza l'azione appena scritta. In particolare si sta assumendo valido il principio di azione stazionaria di Hamilton. Nell'espressione sopra scritta i vettori  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  sono i punti di partenza e arrivo nello spazio dei "tempi". Il problema di determinare le equazioni di Eulero-Lagrange per tale lagrangiana, vista l'assunzione di validità del principio di Hamilton, si riconduce ad un problema di calcolo delle variazioni. Inoltre, voglio sottolineare che la soluzione che cerchiamo è del tipo  $\eta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Supponiamo che la soluzione per cui l'azione è stazionaria sia  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ovviamente tale soluzione appartiene allo spazio di tutte le funzioni delle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Se scegliamo una classe particolare di funzioni che contengono anche la soluzione del moto, possiamo esprimere la variazione dell'azione in termini di una derivata. Possiamo fare ciò in questo modo. Sia

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha q(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

dove  $\alpha \in \mathcal{R}$  è una funzione arbitraria che oltre ad essere sufficientemente regolare soddisfa la condizione che:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_i^1, \dots, x_n) = q(x_1, x_2, \dots, x_i^2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Per questa particolare classe di moti variati, la variazione dell'azione (che adesso dipende solo da  $\alpha$  poichè  $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è una funzione fissata si riduce ad una derivata rispetto ad  $\alpha$ . Il principio di azione stazionaria di Hamilton può quindi essere riformulato in questi termini:

$$\left( \frac{d\mathcal{A}}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad (4)$$

Ovviamente l'espressione dell'azione calcolata sui moti variati scelti come indicato sopra sarà:

$$\mathcal{A} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} L(Q(\vec{x}) + \alpha q(\vec{x}), \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial q}{\partial x_i}(\vec{x}) \right\}, \{x_i\}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (5)$$

Calcolando tale derivata si ottiene:

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\alpha} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \eta} q(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \frac{\partial q}{\partial x_i}(\vec{x}) \right] \right] dx_1 \dots dx_n \quad (6)$$

che può anche essere scritta come:

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\alpha} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \frac{\partial L}{\partial \eta} q(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \frac{\partial q}{\partial x_i}(\vec{x}) \right] dx_1 \dots dx_n \quad (7)$$

Ciascuno degli integrali sotto la sommatoria può essere riscritto nel seguente modo sfruttando le caratteristiche della  $q(\vec{x})$  nelle coordinate iniziali e integrando per parti:

$$I_i = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \frac{\partial q}{\partial x_i}(\vec{x}) \right] dx_1 \dots dx_n = \quad (8)$$

$$= \int_{x_1^1}^{x_1^2} \dots \int_{x_{i-1}^1}^{x_{i-1}^2} \int_{x_{i+1}^1}^{x_{i+1}^2} \dots \int_{x_n^1}^{x_n^2} \left[ \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} q(\vec{x}) \right]_{x_i^1}^{x_i^2} \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n - \quad (9)$$

$$- \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \right) q(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = \quad (10)$$

$$= - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \right) q(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (11)$$

Andando a sostituire l'espressione appena trovata nella derivata dell'azione si trova:

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\alpha} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \eta} - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \right) \right] \right] q(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = 0 \quad (12)$$

Poichè tale equazione è valida per ogni scelta di  $q$  (ovviamente che rispetti la condizione imposta sui punti iniziali del moto) il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni ci assicura che:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{x_i} \eta)} \right) \right] = 0 \quad (13)$$

---

<sup>1</sup> si è usata la notazione per cui  $\partial_{x_i} \eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$

che rappresenta l'equazione di Eulero-Lagrange per l'azione  $\mathcal{A}$ . Ovviamente si può generalizzare l'equazione trovata per sistemi in cui la densità di lagrangiana non dipende da un campo scalare da determinare (nel nostro caso era  $\eta$ ) ma da un campo vettoriale cioè  $\vec{\eta}(\vec{x})$  in questo caso le equazioni di Eulero-Lagrange si riducono a  $n$  equazioni del tipo di quella scritta sopra fatte su ogni componente  $\eta_i$  del campo vettoriale da cercare. Per verificare la validità di tali equazioni le si applica all'azione di una corda vibrante, per ricavare l'equazione del moto della corda. L'equazione dell'azione della corda vibrante è:

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \quad (14)$$

Applicando le equazioni sopra trovate si ricava che:

$$\frac{\mu}{Y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

che rappresenta proprio l'equazione della corda vibrante.