Paradosso di Feynman

David Marzocca

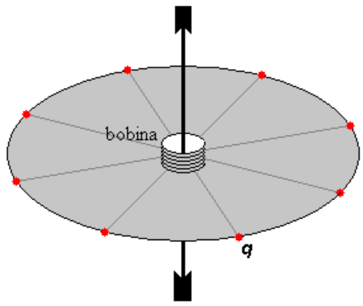
27 luglio 2007

Paradosso di Feynman

[1]

Immaginiamo di avere una bobina fissata coassialmente ad un disco di materiale isolante. Sul bordo di questo disco, a distanza R dall'asse (R molto maggiore delle dimensioni della bobina), è fissata una carica q.

All'inizio il sistema è fermo e nel solenoide scorre una corrente stazionaria I, questa crea un campo magnetico costante B. Il momento angolare meccanico del sistema è nullo.



Immaginiamo che il solenoide sia fatto di un materiale superconduttore: la corrente scorre al suo interno senza bisogno di alcuna forza elettromotrice. Dopo un certo tempo la temperatura del solenoide supera quella di transizione e la corrente si ferma. Dato che c'è una variazione di campo magnetico e quindi di flusso di B all'interno della circonferenza di raggio R, ci dovrà essere un campo elettrico tale che la sua circuitazione sia pari all'opposto della derivata temporale del flusso del campo magnetico. Questo campo elettrico, data la simmetria del sistema, dovrà essere tangente alla circonferenza di raggio R e uniforme su questa; ci sarà quindi una forza $F = qE$ applicata alla carica, quindi un momento M e da questo ci deve essere una variazione del momento angolare, quindi il sistema comincerà a girare. Alla fine, quindi, il momento angolare del sistema è diverso da zero.

ATTENZIONE! Sembra che il momento angolare non si conservi!

Soluzione

[2]

Qualsiasi campo elettromagnetico trasporta energia con densità u, ha una densità di quantità di moto pari al vettore di Poynting$/c^2$ e quindi una densità di momento angolare l.

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{c^2}\vec{r} \times \vec{S}$$

Possiamo quindi ipotizzare che nell'istante iniziale il nostro sistema abbia un momento angolare non nullo localizzato nel campo elettromagnetico.

Verifica

Momento angolare meccanico finale

Calcoliamo per prima cosa qual'é il momento angolare del sistema nell'istante finale, cioè quando la corrente che scorre nella bobina è nulla. Definiamo il momento magnetico della bobina come:

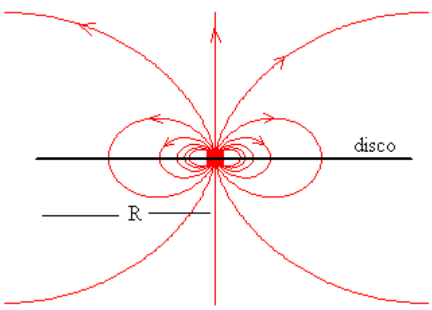
$$\vec{m} = NSI\hat{z}$$

Dove N è il numero di spire, S la superficie di una di queste spire ed I la corrente elettrica che vi scorre. Per distanze molto più grandi delle dimensioni lineari della bobina, possiamo approssimare il campo magnetico che genera la bobina a quello di una spira di momento magnetico $\vec{m}$:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right\}$$

Sul piano del disco $\vec{m}\cdot\vec{r} = 0$ quindi questa espressione si riduce a:

$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r^3}$$



Per calcolare il flusso di B nel disco di raggio R occorre stare attenti; infatti l'espressione che abbiamo dato per il campo è valida per distanze grandi dalla bobina, quindi non è valida in tutti i punti del disco vicini a questa. Si può, a questo punto, utilizzare la seconda equazione di Maxwell ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) che ci dice che il flusso di B attraverso una qualsiasi superficie chiusa è uguale a zero. Prendiamo quindi quindi come superficie chiusa la semisfera di raggio infinito con il piano equatoriale complanare al disco. Questa superficie è fatta di 3 parti: il disco (d), la sua estensione fino all'infinito (e) e la mezza calotta sferica di raggio infinito (∞).

$$\Phi_d + \Phi_e + \Phi_\infty = 0$$

(flusso nel disco + flusso nell'estensione + flusso all'infinito = 0)

Ma il campo B all'infinito è nullo quindi la terza componente è uguale a zero, otteniamo infine:

$$\Phi_d = -\Phi_e$$

Esplicitamente:

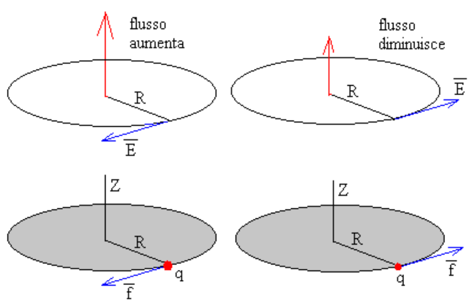
$$\begin{aligned}
\Phi_d &= -\Phi_e = -\int_e B(\vec{r}) \cdot \hat{z} ds \\
&= \int_R^\infty \int_o^{2\pi} \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} r d\theta dr \\
&= \frac{\mu_0 m 2\pi}{4\pi} \left(\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \right) \\
&= \frac{\mu_0 m}{2} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{\mu_0 m}{2R}
\end{aligned}$$

Adesso dalla terza equazione di Maxwell otteniamo il campo elettrico E sulla circonferenza di raggio R:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$E 2\pi R = -\frac{\partial \Phi_d}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} \frac{dm}{dt} \hat{z} \times \hat{r}$$



Cioè il campo elettrico è tangente alla circonferenza di raggio R, il verso dipende dalla derivata del momento magnetico. La forza che questo campo elettrico esercita sulla carica q è $\vec{F} = q\vec{E}$. Il momento associato a questa forza è uguale alla derivata del momento angolare meccanico, per cui:

$$\frac{d\vec{L}_{mecc}}{dt} = \vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} = -\frac{\mu_o q}{4\pi R}\frac{dm}{dt}\hat{z}$$

$$[\text{dato che } \hat{r} \times (\hat{z} \times \hat{r}) = \hat{z}]$$

$$\vec{L}_{mecc} = \int_{L_i}^{L_f} d\vec{L} = -\frac{\mu_o q}{4\pi R}\int_{m_i}^{m_f} d\vec{m}\ \hat{z}$$

Per cui, dato che $m_f = 0$ e $m_i = m$:

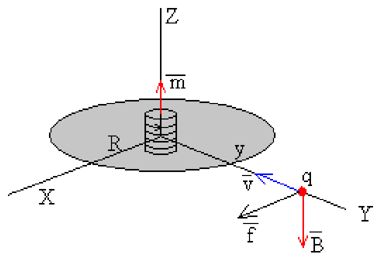
$$\vec{L}_{mecc} = \frac{\mu_o q \vec{m}}{4\pi R}$$

Momento angolare elettromagnetico iniziale

Il momento angolare di un campo elettromagnetico è, in generale:

$$\vec{L}_{em} = \int_{spazio} \vec{r} \times \frac{\vec{S}}{c^2} dV \quad dove \quad \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Dato che la nostra configurazione presenta notevoli difficoltà per il calcolo diretto del momento angolare, non lo calcoliamo direttamente ma immaginiamo che all'inizio la carica elettrica sia a distanza infinita (per cui $S = 0 \to L = 0$) e la avviciniamo lentamente a velocità costante fino alla sua posizione sul disco. Calcolando il momento delle forze esterne necessario per mantenere questa traiettoria, possiamo conoscere la derivata del momento angolare e quindi il suo valore finale.



Per prima cosa calcoliamo le forze interne al sistema quando la carica si trova a distanza r dall'asse, sul piano del disco, diretta con velocità v verso la sua posizione:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \left(-\frac{\mu_o \vec{m}}{4\pi r^3}\right) = \frac{q\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m} \times \vec{v}$$

La forza esterna, affinchè il moto rimanga rettilineo, dovrà essere opposta a questa:

$$\vec{F}_e = -\frac{q\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m} \times \vec{v}$$

Il momento di questa forza sarà:

$$\vec{M}_e = \vec{r} \times \vec{F}_e = \frac{q\mu_0 vm}{4\pi r^2}\hat{z} = -\frac{q\mu_0 m}{4\pi r^2}\frac{dr}{dt}\hat{z} = \frac{dL}{dt}$$

Da cui, integrando, ottengo $\vec{L}$:

$$\vec{L}_{em} = -\int_{\infty}^{R} \frac{q\mu_0 m}{4\pi r^2} dr\hat{z} = \frac{q\mu_0 m}{4\pi R}\hat{z}$$

Per cui otteniamo che il momento angolare iniziale, contenuto nel campo elettromagnetico, è pari a quello meccanico finale ed uguale a:

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q\vec{m}}{4\pi R}$$

Osservazioni

1

Nello stato iniziale del sistema, anche non considerando il momento angolare del campo elettromagnetico, non è vero che quello totale è precisamente nullo, infatti nella bobina circola una corrente I, per cui degli elettroni sono in movimento nel superconduttore in traiettorie circolari, hanno quindi un loro momento angolare. Dato che però la massa di un elettrone è trascurabile rispetto a quella di un protone, la velocità angolare finale del sistema, se l'effetto fosse solo questo (cioè se non ci fosse la carica q), sarebbe sicuramente piccolissima.

Una prima stima può essere questa. Immaginiamo che gli elettroni di conduzione siano 1 per atomo della bobina, e che il materiale abbia numero atomico Z. Trascuriamo inoltre completamente la massa del disco. Se la bobina ha raggio a ed il filo sezione A in cui gli elettroni hanno una densità n e si muovono con una velocità media $\vec{v}_d$, abbiamo:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dS = JA \quad e \quad \vec{J} = ne^- \vec{v}_d = -ne\vec{v}_d$$

Il momento angolare per 1 elettrone è pari a:

$$\vec{l} = \vec{a} \times (m_e \vec{v}_d) = -am_e v_d \hat{z}$$

Il volume del filo è: $V = 2\pi aAN$, quindi in totale ci sono $2\pi aANn$ elettroni. Il momento angolare totale è (assumendo $\sqrt{A} << a$):

$$\vec{L}_0 \;\; = \;\; -2\pi a^2 ANnm_e v_d \hat{z}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\pi a^2 ANJ\frac{m_e}{e}\hat{z} \\
&= -2SNI\frac{m_e}{e}\hat{z} \\
\vec{L}_0 &= \frac{2m_e}{e^-}\vec{m}
\end{aligned}
$$

Possiamo notare che esce fuori anche in questo caso il rapporto giromagnetico. Notiamo inoltre che ha segno opposto rispetto a quello che avevamo calcolato per il campo elettromagnetico. Come dicevamo, poniamo che adesso questo momento angolare venga trasferito ai soli protoni della bobina in numero uguale agli elettroni di conduzione, non considerando il resto della massa del sistema. Il momento angolare finale del sistema, con questa approssimazione, si trova seguendo gli stessi passaggi di prima imponendo una velocità v_f uguale per gli Z protoni, neutroni ed elettroni (assumo il numero di neutroni uguale al numero atomico):

$$\vec{L}_f = -2\pi a^2 ANnZ(m_e + m_p + m_n)v_f\hat{z}$$

Imponendo quindi la conservazione del momento angolare otteniamo:

$$\frac{v_f}{v_d} = \frac{m_e}{Z(m_e + m_p + m_n)} = \frac{1}{Z}2,71 * 10^{-4}$$

$(m_e = 9,10 \times 10^{-31} kg \qquad m_p = 1,673 \times 10^{-27} kg \qquad 1.675 \times 10^{-27} kg)$

Quindi la velocità angolare finale è minore di 1 decimillesimo di quella iniziale degli elettroni (v_d/a), non avendo considerato neanche la massa e l'inerzia del disco. Per un calcolo più precisto basta scrivere il momento finale come $\vec{L}_f = I_n\vec{\omega}$, dove I_n è il momento d'inerzia di tutto il sistema, e, uguagliandolo al momento angolare iniziale, calcolare la velocità angolare ω.

2

Nel calcolo del momento angolare iniziale del campo elettromagnetico, non abbiamo considerato che una carica in movimento produce un campo magnetico. Questo fatto, però, non è un errore in quanto questo campo non agisce sulla carica che lo crea.

3

Quest'ultima affermazione mi ha fatto riflettere invece sul calcolo del momento angolare meccanico finale. La carica q, quando la corrente nella bobina smette di circolare, comincia a ruotare attorno all'asse a distanza R. Quindi, insieme al campo elettrico generato dalla carica, ci deve essere anche un campo magnetico. Entrambi sono variabili in quanto la carica è in movimento. Questo fatto mi ha fatto venire in mente due dubbi:

1- Questo campo elettromagnetico potrebbe avere un suo momento angolare intrinseco e quindi il calcolo che abbiamo fatto non è corretto.

2- Dato che la carica segue una traiettoria circolare, allora è accelerata e quindi irradia energia elettromagnetica. Dopo un po', quindi, mi aspetto che tutto il sistema si fermi di nuovo in una condizione in cui sarà presente solo un campo elettrostatico generato da q. Allora il momento angolare del sistema sarà nullo veramente ($B = 0$) e quello che esisteva all'inizio si starà propagando nello spazio sotto forma di onda elettromagnetica. Questo ragionamento rafforza ancora di più il punto 1, in quanto questa radiazione emessa DEVE possedere un momento angolare e quindi il punto 1 deve essere vero. Sicuramente il momento angolare deve rimanere costante in ogni istante, spostandosi al massimo tra campo elettromagnetico e sistema meccanico. Non vedo, però, dove possa essere sbagliato il conto per il momento angolare finale.

Riferimenti bibliografici

[1] *The Feynman Lectures on Physics* - Robert Leighton ; Matthew Sands ; Richard P. Feynman: Vol.II, 17.4, 27.6

[2] Soluzione ed immagini da:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/induccion/mAngular/mAngular.htm