Equazione del moto di una corda vibrante

David Marzocca

28 settembre 2007

Abbiamo una corda lunga L di densità lineare μ e costante di Young Y. Descriviamo con $\eta(x,t)$ la compressione della corda nel punto di coordinata x al tempo t.

La lagrangiana del sistema è la seguente:

$$\mathcal{L} = \int_0^L \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

Sapendo che, in generale, l'azione è l'integrale nel tempo della lagrangiana, scrivo l'azione del sistema.

$$S = \iint \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx\ dt$$

Adesso vario l'azione facendo variare l'unico grado di libertà del sistema, cioè la funzione $\eta(x,t)$ imponendo che la variazione sia nulla agli estremi di integrazione, cioè a $x = 0, x = L, t = t_1, t = t_2$. Questo corrisponde a conoscere ed imporre come note le condizioni iniziali e finali del sistema. Infatti per poter poi risolvere le eq del moto devo conoscere o queste condizioni o le condizioni iniziali e le derivate iniziali.

$$\delta S = \iint \left[\mu \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \eta - Y \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \eta \right] dx\ dt$$

$$\delta S = \iint \mu \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \eta\ dt\ dx - \iint Y \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \eta\ dx\ dt$$

A questo punto integro separatamente per parti, a sinistra in dt e a destra in dx.

$$\delta S = \int \left[\mu \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta \right]_{t_1}^{t_2} dx - \iint \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta\ dt\ dx - \int \left[Y \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \eta \right]_0^L dt + \iint Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta \eta\ dx\ dt$$

Dato che la variazione di η agli estremi è nulla, il primo ed il terzo termine sono uguali a zero.
Per il principio di minima azione, la variazione dell'azione deve essere nulla

per qualsiasi variazione $\delta\eta$, se il moto è un moto naturale, quindi deve essere $\delta S = 0$.

$$\delta S = -\iint \left[\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right] \delta\eta \; dx \; dt = 0$$

Dato che deve essere nulla per qualsiasi variazione $\delta\eta$ io faccia, per il teorema fondamentale del calcolo variazionale l'integrando sarà identicamente nullo, cioè:

$$\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0$$