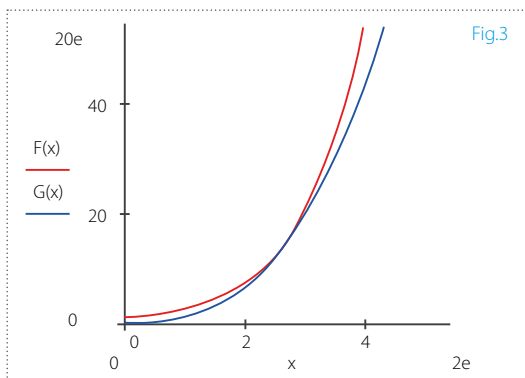
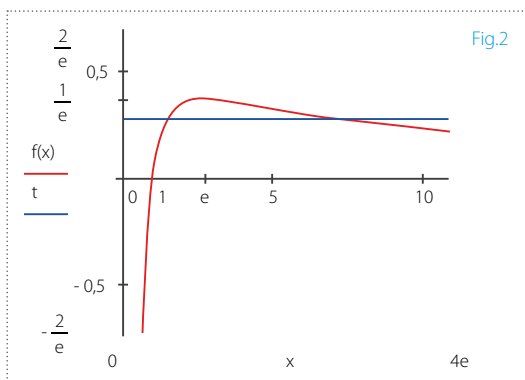
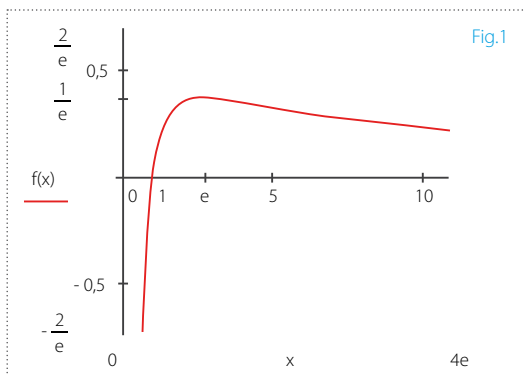




corredo del *Traité d'Algèbre* di Joseph Bertrand. In particolare consideriamo l'esercizio VI a pagina 288 del testo di Bertrand, dove si chiede di cercare le radici dell'equazione  $x^a = a^x$  diverse da  $x = a, a > 0$ . Seguendo la soluzione del prof. Mathieu passiamo ai logaritmi, ottenendo

$$a \ln(x) = x \ln(a) \text{ da cui segue } \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(a)}{a}.$$

Quindi studiamo la funzione  $y = \frac{\ln(x)}{x}$  il cui grafico è rappresentato in Figura 1. La funzione diverge per  $x$  tendente a zero, tende a zero per  $x$  tendente all'infinito, è positiva per  $x > 1$  ed ha un massimo in  $(e; 1/e)$ .



Intersecando la curva con una retta variabile, parallela all'asse delle ascisse, di equazione  $y = t = \ln(a)/a$ , Figura 2, osserviamo che:

- la retta  $y = t$  taglia la curva una sola volta quando  $\frac{\ln(a)}{a} \leq 0 \rightarrow 0 < a \leq 1$ ,
- la retta taglia due volte la curva quando  $0 < \frac{\ln(a)}{a} < \frac{1}{e} \rightarrow 1 < a < e$ ,
- la retta è tangente alla curva quando  $\frac{\ln(a)}{a} = \frac{1}{e} \rightarrow a = e$ .

Come diretta conseguenza di tutto ciò, risulta che l'equazione  $x^a = a^x$  ammette:

- una sola radice  $x_1 = a$  con  $0 < x_1 \leq 1$ , quando  $0 < a \leq 1$ ;
- due radici distinte:  $x_1$  (con  $1 < x_1 < e$ ) e  $x_2$  (con  $x_2 > e$ ) quando  $1 < a < e$ ;
- due radici coincidenti  $x_1 = x_2 = e$  quando  $a = e$ .

Restiamo ancora un po' sull'ultimo risultato. Da  $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{e}$ , si deduce immediatamente che per ogni  $x > 0$  si ha:

$$e \ln(x) \leq x \ln(e) \rightarrow x^e \leq e^x.$$

La disuguaglianza vale anche per  $x = \pi$ :  $\pi^e \leq e^\pi$ .

Questa "curiosa" formula è riportata anche da Martin Gardner in appendice ad un suo articolo dal titolo: *Il numero trascendente e*. L'autore afferma che la disuguaglianza ricompare di tanto in tanto sulle pubblicazioni specializzate e che si può provare in molti modi ma, per vederne alcuni, invia il lettore alla rivista *The Pentagon* dell'autunno del 1963.

Cerchiamo allora un'altra dimostrazione e consideriamo le funzioni  $F(x) = e^x$ ,  $G(x) = x^e, x > 0$ . Dato che:

$$\begin{aligned} F(e) &= G(e) = e^e, \\ F'(e) &= G'(e) = e^e, \\ F''(x) &> 0, G''(x) > 0, \end{aligned}$$

le due curve considerate sono tra loro tangenti nel loro unico punto comune  $(e; e^e)$ , come mostrato in figura 3. Inoltre, poiché è:

$$F(1) = e > G(1) = 1,$$

è possibile concludere che, per ogni  $x$ , risulta  $F(x) \geq G(x)$ ; dunque, anche per  $x = \pi$ :

$$e^\pi \geq \pi^e.$$



**Bibliografia**

- [1] *Nouvelles annales de mathématiques*, Tome dixième, Bachelier, Paris, 1851
- [2] *Nouvelles annales de mathématiques*, Tome onzième, Bachelier, Paris, 1852
- [3] *Nouvelles annales de mathématiques*, Tome dix-septième, Bachelier, Paris, 1858
- [4] J. Bertrand, *Traité d'algèbre*, deuxième édition, Hachette, Paris, 1855
- [5] M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici Vol. 4°*, Sansoni, Firenze, 1979
- [6] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words: Exercices in Visual Thinkings*, MAA, 2000
- [7] Baccalauréat S, *France métropolitaine*, septembre 2004, Exercice 2