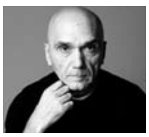
Le magie dei quadrati //

Vanni Gorni
Docente al Liceo scientifico “A. Manzoni” di Suzzara



[VANNI GORNI]
Laureato in Fisica presso l’Università di Bologna, vive e lavora a Suzzara (Mantova).
Appassionato di Storia della matematica dell’Ottocento, ne trae problemi e curiosità che propone anche sul suo sito web.

Lo scopo di questo articolo è quello di delineare un’attività didattica che coinvolga più settori della Matematica insegnata nei Licei. Il problema che ci poniamo è la rappresentazione geometrica delle proprietà del quadrato magico di ordine tre. Questo ci porterà ad utilizzare dell’Aritmetica e della Geometria analitica con la possibilità di effettuare delle verifiche, realizzando delle figure mediante un software di Geometria dinamica.
La scelta è caduta sul quadrato magico di ordine tre (Fig. 1) perché è un oggetto che appartiene ad un tema abbastanza lontano dai tradizionali contenuti scolastici e appartiene anche, ma non solo, alla Matematica ricreativa cioè a quei passatempi talvolta considerati tanto ingegnosi quanto inutili.
Giova però ricordare che i criteri per la valutazione dell’utilità sono mutevoli. Infatti, se da un lato Cornelio Agrippa, in una sua opera pubblicata nel 1551, scriveva che la tavola del quadrato magico di Saturno (Fig. 1) «*incisa su un disco di piombo, favorisce i parti, rende l’uomo sicuro e possente e fa ottenere dai principi quanto si chieda.*», dall’altro sappiamo che l’attuale programmazione statistica degli esperimenti ha origine da due lavori sui quadrati magici scritti da Eulero due secoli dopo. Dunque, come nella favola del leone che va alla guerra di La Fontaine: «*Nulla è inutile a chi sa* » [3].

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 1

Iniziamo con alcune considerazioni di carattere generale. Un quadrato semi-magico di ordine n è una matrice quadrata n x n i cui elementi sono i primi n^2 interi positivi e nella quale la somma degli elementi di ogni riga e di ogni colonna è una costante k detta costante magica:

$$k = \frac{1 + 2 + ... + n^2}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2} \quad .$$

Se anche la somma dei termini posti sulle diagonali vale k, allora il quadrato è magico; per il quadrato magico di Saturno si ha $k = 15$.
Ciò che ci interessa è trovare una figura geometrica che abbia, per quanto possibile, le stesse proprietà di un quadrato magico di ordine tre. Una simile figura però non potrà essere chiamata "quadrato magico geometrico" perché, con questa espressione, si individua una classe di quadrati magici per i quali il termine "geometrico" assume un significato diverso. Per una breve nota su questi quadrati si veda l'appendice.
Osservando la tabella del quadrato di Saturno, viene abbastanza spontaneo immaginare una figura composta da un quadrato grande, avente il lato di lunghezza pari alla costante magica $l = 15$, che contenga nove quadrati più piccoli con i lati di lunghezza: 1, 2, ..., 9.
Questa strada però è difficilmente percorribile perché la somma delle aree dei nove quadrati vale $1 + 2^2 + ... + 9^2 = 285$ ed è maggiore dell'area del quadrato che li contiene: $l^2 = 15^2 = 225$. Quindi i nove quadrati si sovrappongono necessariamente e ciò complica la lettura del modello geometrico. Tuttavia la partizione in due parti uguali degli elementi centrali dei lati del quadrato (Fig. 2 e 3) offre lo spunto per una costruzione geometrica diversa dove sul perimetro di un quadrato ABCD, avente il lato di lunghezza l pari alla costante magica, andremo a disporre otto segmenti le cui lunghezze sono dei numeri reali ordinati da x_1 a x_9 (x_5 escluso). La disposizione è mostrata in Fig. 4. Chiaramente le lunghezze dei segmenti corrispondono ai numeri del quadrato magico e per analogia sono soggette a dei vincoli equivalenti all'invarianza della somma per righe e per colonne.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 2

4	4,5	4,5	2
1,5			3,5
	5		
1,5			3,5
8	0,5	0,5	6

Fig. 3

x_7	x_8	x_9
x_4	x_5	x_6
x_1	x_2	x_3

Fig. 4

Completiamo ora la costruzione aggiungendo altri quattro segmenti aventi rispettivamente un estremo nel punto medio dei segmenti di lunghezza x_2, x_4, x_6, x_8 (Fig. 5), aventi anch'essi lunghezza rispettivamente x_2, x_4, x_6, x_8, perpendicolari ai lati del quadrato ABCD, e con i quattro estremi rimasti liberi che indicheremo con le lettere S, P, R, Q.

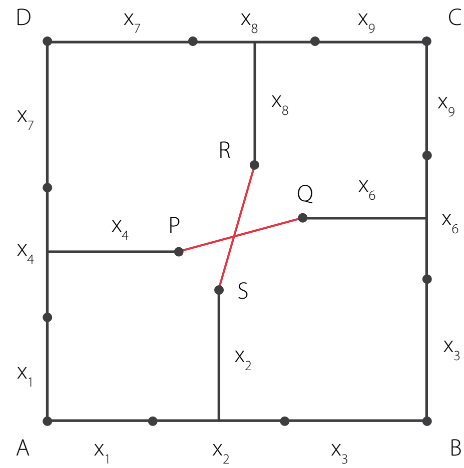


Fig. 5

Dimostriamo che in questa figura si ha sempre PQ = RS. Fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine in A e solidale con i lati del quadrato, possiamo definire le coordinate dei punti P, Q, R, S:

$$P(x_4;\, x_1+x_4/2),\ Q(l - x_6;\, x_3+x_6/2),$$
$$R(x_7+x_8/2;\, l - x_8),\ S(x_1+x_2/2;\, x_2);$$

e di conseguenza determinare le lunghezze dei segmenti PQ ed RS:

$$PQ = \sqrt{(l - x_6 - x_4)^2 + [x_3 - x_1 + (x_6 - x_4)/2]^2}$$

$$RS = \sqrt{[x_7 - x_1 + (x_8 - x_2)/2]^2 + (l - x_2 - x_8)^2}\ .$$

Se in entrambe le formule eliminiamo le lunghezze dei segmenti di ordine pari, tenendo conto che:

$$x_2 = l - x_3 - x_1,\ \ x_4 = l - x_7 - x_1,\ \ x_6 = l - x_9 - x_3,\ \ x_8 = l - x_7 - x_9,$$

otteniamo:

$$PQ = RS = \sqrt{(x_1 + x_3 + x_7 + x_9 - l)^2 + [(-x_1 + x_3 + x_7 - x_9)/2]^2}\ .$$

Quindi, nella nostra costruzione, le lunghezze di quattro segmenti x_1, x_3, x_7, x_9, hanno il ruolo di variabili indipendenti per le quali si ha sempre PQ = RS.
Affinché anche la somma dei segmenti interni al quadrato ABCD sia pari alla lunghezza l del lato, è sufficiente che i segmenti PQ ed RS siano paralleli rispettivamente ai lati AB e AD. Quindi i punti P e Q debbono avere la stessa ordinata, mentre i punti R ed

S debbono avere la stessa ascissa. Queste due condizioni sono espresse nell'ordine dalle due relazioni:

$$x_1 + x_4/2 = x_3 + x_6/2, \quad x_7 + x_8/2 = x_1 + x_2/2 \ .$$

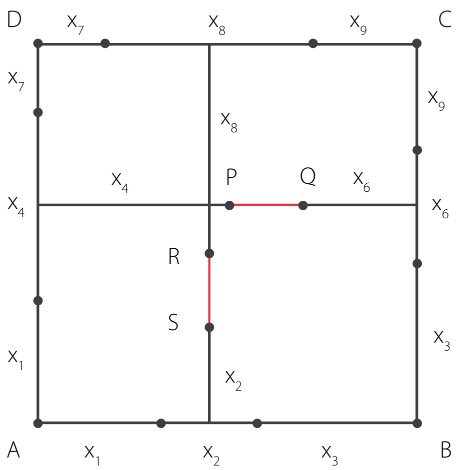


Fig. 6

Mediante le quattro sostituzioni viste in precedenza, è possibile esprimere le condizioni di parallelismo unicamente in funzione delle lunghezze dei segmenti di ordine dispari. Si può osservare che si giunge, in entrambi i casi, al medesimo risultato:

$$x_1 + x_9 = x_3 + x_7 \ .$$

Quindi le due condizioni di parallelismo sono del tutto equivalenti, cioè sono in realtà una soltanto, e nella nostra costruzione geometrica sarà sufficiente imporne una in quanto l'altra risulterà automaticamente soddisfatta. La figura che abbiamo così ottenuto è composta da dieci segmenti con due elementi centrali che però sono sempre uguali tra loro. Al variare della lunghezza di quattro segmenti, si possono ottenere infinite figure come la Fig. 6 che possiamo definire semi-magiche in quanto i vincoli sulle diagonali non hanno un equivalente geometrico. Tutto questo non fa altro che sottolineare le peculiarità del quadrato magico di Saturno.

Infatti, le partizioni dell'intero 15 in tre interi distinti compresi tra 1 e 9 sono otto (Fig.7) e ciò corrisponde esattamente alla somma delle tre righe, delle tre colonne e delle due diagonali. Inoltre soltanto quattro delle otto partizioni contengono l'intero 5 che in effetti appartiene ad una riga, ad una colonna e ad entrambe le diagonali. Tutti gli elementi dispari, eccetto il 5, compaiono in due partizioni, esattamente in una riga ed una colonna, mentre tutti gli elementi pari compaiono in tre partizioni (una riga, una colonna e una diagonale).

1	5	9
1	6	8
2	4	9
2	5	8
2	6	7
3	4	8
3	5	7
4	5	6

Fig. 7

[APPENDICE]

I quadrati magici che si considerano sono di norma aritmetici nel senso che la somma degli elementi di ogni riga, colonna e di ogni diagonale è costante. L'aspetto "aritmetico" emerge in tutta chiarezza se consideriamo gli infiniti quadrati magici di ordine tre formati da nove numeri naturali consecutivi. Quest'insieme di quadrati è mostrato in Fig. 9 dove $a \geq 5$ e $k = 3a$.

Nei quadrati magici geometrici ciò che resta costante è il prodotto degli elementi di ogni riga, di ogni colonna e delle diagonali.

Costruire un quadrato magico geometrico non è difficile in quanto per ogni quadrato magico aritmetico esistono infiniti quadrati magici geometrici. Infatti, fissato un numero naturale a, è sufficiente far corrispondere ad ogni elemento x del quadrato aritmetico (Fig. 8) un elemento a^x del quadrato geometrico (Fig.10). Ovviamente, se k è la costante magica del quadrato aritmetico, la costante del corrispondente quadrato geometrico è $k' = a^k$.

Esistono però anche altri quadrati magici geometrici che non sono costruiti seguendo il criterio illustrato sopra, ad esempio quello in Fig.11 che ha una costante magica K = 216.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 8

a - 1	a + 4	a - 3
a - 2	a	a + 2
a + 3	a - 4	a + 1

Fig. 9

a^4	a^9	a^2
a^3	a^5	a^7
a^8	a^1	a^6

Fig. 10

2	36	3
9	6	4
12	1	18

Fig. 11

[BIBLIOGRAFIA]

[1] Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim, *De occulta philosophia*, 1551; Liber secundus, LXXVII, Saturni tabula.
http://www.digitale-sammlungen.de/index.html?c=suchen&l=de
http://www.ousia.it/SitoOusia/index.htm
[2] Jean de La Fontaine, *Le lion s'en allant en guerre*, Fable, Livre V, fable XIX, 1668.
[3] Jean de La Fontaine, *Favole*, BUR Biblioteca Univ. Rizzoli, Milano, 1980.
[4] L. Euler, *De quadratis magicis*, 1776.
E 795, http://math.dartmouth.edu/~euler/
[5] L. Euler, *Recherche sur une nouvelle espèce de carrés magiques*, 1782.
E 530, http://math.dartmouth.edu/~euler/
[6] B. Violle, *Traité complet des carrés magiques suivi d'un traité des cubes magiques et d'un essai sur les cercles magiques*, Tome I, II, III, Bachelier, Paris, 1837.
[7] Murray R. Spiegel, *Probabilità e statistica*, Etas Libri («Schaum», 40), Milano, 1979.

// :)

Sopra: Heinrich Cornelius Agrippa (1486-1535) / Immagine di pubblico dominio.