I CIRCUITI RISONANTI

DAVIDE TAMBUCHI

1. Richiami sulle proprietá dei numeri complessi

Prima di addentrarci nello studio della risonanza, passiamo in analisi le principali proprietá dei numeri complessi (in questo capitolo) e degli elementi lineari (resistenza, induttanza, capacitá) in regime sinusoidale (nel prossimo capitolo).

Ricordiamo brevemente che l'*unitá immaginaria* j é definita come:

$$j = \sqrt{-1}$$

Di conseguenza, si ha $j^2 = -1$ e quindi $j^{-1} = -j$.

Un *numero complesso* é una grandezza $z = a + jb$, ove a é detta la sua *parte reale*, e b la sua *parte immaginaria*. Ricordiamo inoltre che é possibile rappresentare un numero complesso sul piano cartesiano con un punto, la cui ascissa coincide con a e l'ordinata con la parte immaginaria b (vedi figura 1).

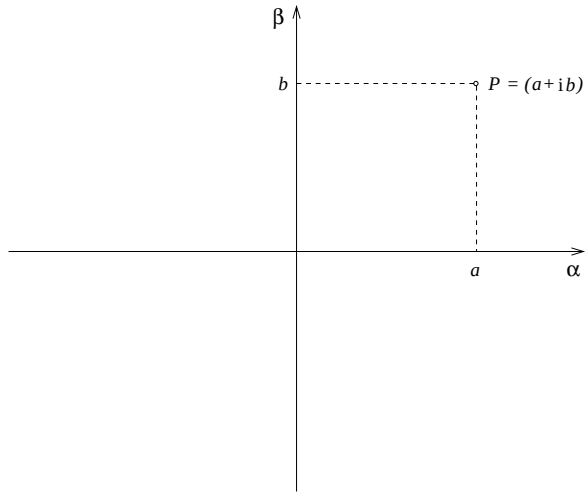

Figura 1. Rappresentazione geometrica di un numero complesso

Possiamo definire la somma (differenza) tra due numeri complessi semplicemente sommando (sottraendo) tra loro le parti reali e le parti immaginarie dei due addendi, ovvero:

$$z = a + jb, \quad w = c + jd, \quad q = z + w = (a + c) + j(b + d)$$
$$z = a + jb, \quad w = c - jd, \quad q = z - w = (a - c) + j(b - d)$$

Analogamente, possiamo definire il prodotto di due numeri complessi come:

$$z = a + jb, \quad w = c + jd, \quad q = z \cdot w = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

Per quanto riguarda il rapporto tra due numeri complessi $z = a + jb$ e $w = c + jd$:

$$q = \frac{a + jb}{c + jd}$$

bisogna innanzitutto rendere reale il denominatore della frazione, moltiplicandone numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore stesso, ottenendo:

$$q = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

2. Richiami sui circuiti in regime sinusoidale

Analizziamo ora brevemente il comportamento di resistori, condensatori ed induttori in regime sinusoidale.

Per quanto riguarda un resistore R, la tensione V ai suoi capi e la corrente I che circola in esso sono sempre in fase, in ogni istante. Si ha infatti:

$$V(t) = V_m \sin(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{V_m}{R}\sin(\omega t)$$

Possiamo dunque scrivere, riferendoci ai valori istantanei:

$$V(t) = RI(t)$$

ed anche in notazione vettoriale, possiamo scrivere

$$\dot{V} = R \cdot \dot{I}$$

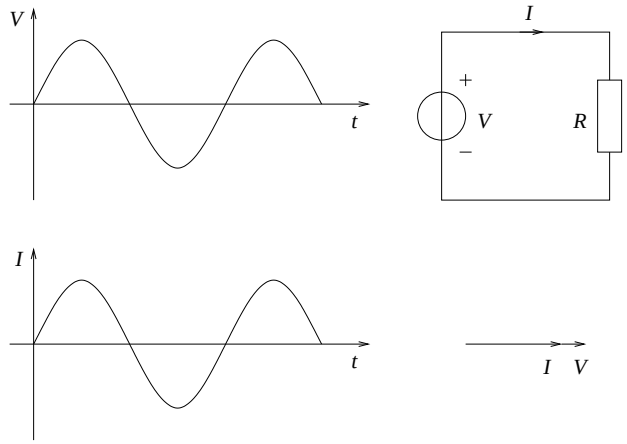

Figura 2. In un resistore ideale, tensione e corrente sono sempre in fase tra loro

Per un condensatore, la corrente $I(t)$ risulta sempre in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ radianti sulla tensione $V(t)$, come risulta dalla figura 3

Si ha infatti:

$$V(t) = V_m \sin(\omega t)$$

e riferendoci ai valori massimi (o ai valori efficaci) possiamo scrivere

$$I = \omega C V \cos(\omega t)$$

Utilizzando la notazione complessa, scriveremo

$$\dot{I} = j\omega C \dot{V} \tag{1}$$

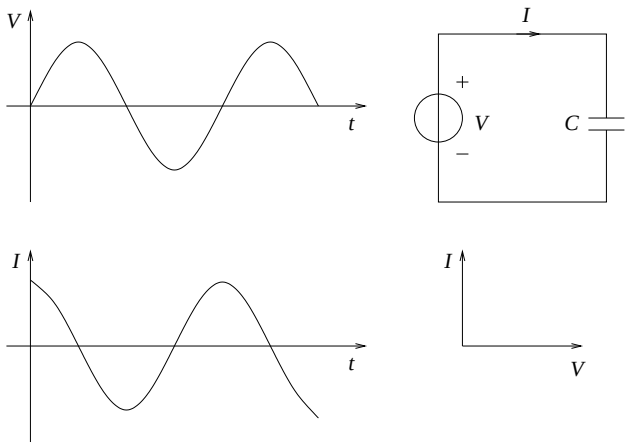

FIGURA 3. Andamento della tensione e della corrente in un condensatore in regime sinusoidale

ove l'unitá immaginaria j tiene conto che il vettore rotante $\dot{I}$ risulta in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ radianti sul vettore $\dot{V}$. Ricavando V dalla 1 otteniamo:

$$\dot{V} = -j \cdot \frac{1}{\omega C} \dot{I}$$

Il termine $X_c = \frac{1}{\omega C}$ é detto *reattanza capacitiva*.

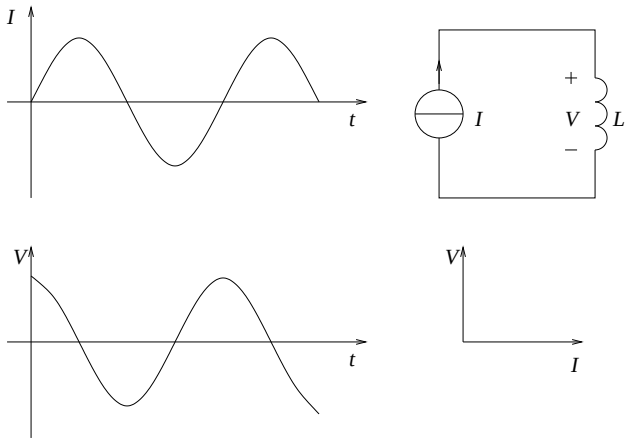

FIGURA 4. Corrente e tensione in un induttore reale

Per un induttore reale, é la corrente ad essere in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ radianti sulla tensione, ovvero:

$$I(t) = I_m \sin(\omega t)$$
$$V(t) = \omega L I_m \cos(\omega t)$$

Riferendoci alla figura 4 ed alla notazione coi numeri complessi, scriveremo

$$\dot{V} = j \cdot \omega L \cdot \dot{I}$$

Il termine $X_l = \omega L$ é detto *reattanza induttiva*.

3. Definizione di risonanza

Consideriamo una rete elettrica lineare, alimentata da un generatore (di tensione o di corrente) sinusoidale. In generale, la corrente erogata dal generatore e la tensione ai capi del generatore stesso *non* sono in fase tra loro.

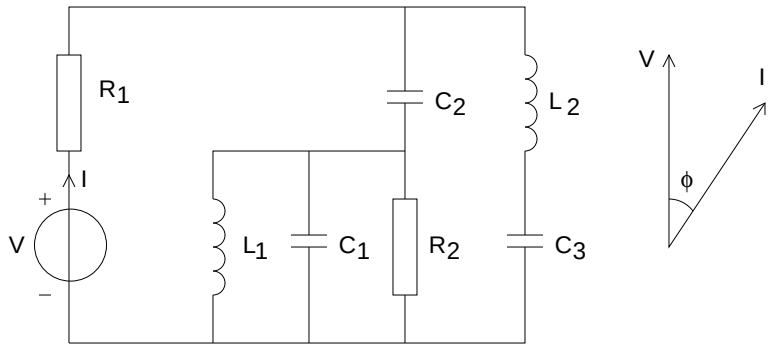

Figura 5. Tensione e corrente ai capi del generatore sono generalmente sfasate di un angolo φ

Puó tuttavia capitare, che per *particolari valori di frequenza* del generatore, o per *particolari valori degli elementi reattivi* che costituiscono la rete elettrica stessa, si verifichi che la corrente erogata dal generatore e la tensione ai suoi capi *risultino in fase*.

risonanza

Questa particolare condizione é detta *risonanza*; quando essa non si verifica diremo che la rete elettrica si trova *fuori risonanza*.

Se indichiamo con $\dot{Z} = R + jX$ l'impedenza della rete vista ai capi del generatore, e se ricordiamo che lo sfasamento tra tensione e corrente risulta essere dato da:

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} \tag{2}$$

condizione di risonanza

possiamo dire che una rete elettrica si trova in *condizione di risonanza* qualora la parte immaginaria X dell'impedenza é nulla.

Deduciamo subito che una rete elettrica passiva, per poter essere in condizione di risonanza, deve essere composta sia da induttori che da condensatori, in modo tale che gli sfasamenti di segno opposto si compensino per particolari valori della frequenza del generatore, dando luogo a sfasamento nullo. La presenza di elementi reattivi induttivi e capacitivi consente che nel circuito l'energia possa essere immagazzinata sia sotto forma elettrica che magnetica; ció é causa di interessanti fenomeni, legati intimamente alla risonanza stessa, e caratterizzati da un continuo scambio di energia tra le due forme citate. Inoltre, tanto *minore* risulterá l'influenza della *parte resistiva* del circuito, tanto *minori* risulteranno gli *effetti dissipativi*, e *tanto piú accentuati* risulteranno i fenomeni legati alla *condizione di risonanza*.

Per meglio comprendere il fenomeno stesso, consideriamo due casi distinti, noti come *circuito risonante serie* e *circuito risonante parallelo*, cosí chiamati in base al modo con cui sono collegati tra di loro gli elementi capacitivi ed induttivi.

4. Risonanza serie

Consideriamo il circuito di figura 6, e determiniamo la condizione di risonanza scrivendo l'equazione di Kirchhoff per le tensioni

Otteniamo:

$$\dot{V} = RI + j\omega LI + \frac{I}{j\omega C}$$

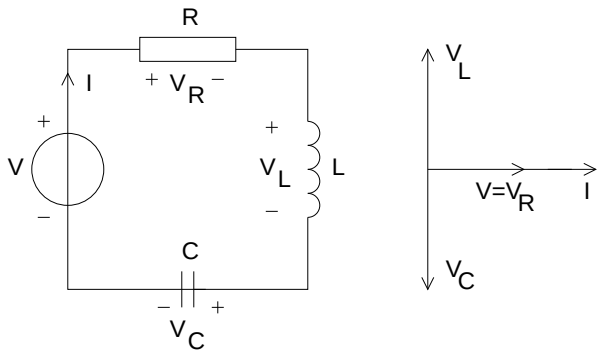

FIGURA 6. Circuito risonante serie

Affinché la corrente risulti in fase con la tensione, occorre e basta che la parte immaginaria dell'impedenza sia nulla, ció si ha se e solo se:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Da quest'ultima relazione é possibile ricavare la *pulsazione di risonanza*:

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}} \tag{3}$$

La rete elettrica in esame possiede allora una ed una sola frequenza di risonanza, ottenibile immediatamente dalla pulsazione di risonanza:

frequenza di risonanza

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}} \tag{4}$$

In queste condizioni, la corrente nel circuito dipende esclusivamente dalla tensione V e dalla resistenza R :

$$I = \frac{V}{R}$$

Questo é altresí il valore massimo assunto dalla corrente: per convincersi di ció é possibile determinare il modulo dell'impedenza Z in funzione della pulsazione ω :

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}$$

ed osservare che esso presenta un minimo per $\omega = \omega_r$. Ció é chiaramente rappresentato in figura 7, ove viene anche riportato l'andamento del modulo della corrente I in funzione della pulsazione ω.

Nel caso in cui il circuito si trovi *fuori risonanza*, dobbiamo distinguere due casi:

(1) $\omega < \omega_r$: in questo caso la reattanza capacitiva $X_c = \frac{1}{\omega C}$ é maggiore della reattanza induttiva $X_l = \frac{1}{\omega L}$; la rete viene vista dal generatore come un carico ohmico-capacitivo e quindi la corrente risulterá in anticipo sulla tensione V.

(2) $\omega > \omega_r$: La reattanza induttiva prevale su quella capacitiva e quindi la corrente risulterá in ritardo sulla tensione V .

Nelle condizioni di *risonanza*, dall'uguaglianza $X_l = X_c$ segue immediatamente $V_c = X_c \cdot I = V_l = X_l \cdot I$ e da ció segue che la *potenza reattiva induttiva eguaglia la potenza reattiva capacitiva* .

Sarebbe molto utile, a questo punto, l'introduzione di un parametro atto ad indicare quanto i fenomeni reattivi siano influenti rispetto ai fenomeni dissipativi

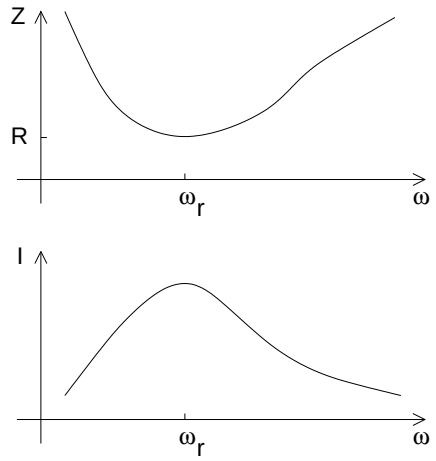

FIGURA 7. Andamento dei moduli dell'impedenza e della corrente in funzione della pulsazione ω

coefficiente di risonanza

della rete elettrica: a tal scopo é possibile introdurre il cosiddetto *coefficiente di risonanza* Q_r, che definiamo come il rapporto tra ls potenza reattiva Q_l induttiva[1] (uguale e opposta, in condizioni di risonanza, alla potenza reattiva capacitiva Q_c), e la potenza attiva P in gioco nella rete:

$$Q_r = \frac{Q_l}{P} \tag{5}$$

Osservando che si ha:

$$P = RI^2$$

e

$$Q_l = \omega_r L I^2 = \frac{I^2}{\omega_r C}$$

si ottiene l'espressione del coefficiente di risonanza:

$$\boxed{Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}} \tag{6}$$

coefficiente di risonanza a carico

Se il generatore di tensione non é ideale, occorre considerare, al fine del calcolo del coefficiente di risonanza, la resistenza totale R_t, somma della resistenza interna R_s del generatore e della resistenza R della rete. Si parla in questo caso di *coefficiente di risonanza a carico* Q_{rc}.

$$\boxed{Q_{rc} = \frac{\omega_r L}{R_s + R} = \frac{1}{\omega_r C (R_s + R)}} \tag{7}$$

fattore di merito

Nel caso in cui il circuito sia composto esclusivamente da un condensatore in serie con un *induttore reale*, ed R rappresenti la resistenza interna di quest'ultimo, e ricordando che il fattore di merito [2] dell'induttore é dato da:

$$Q_m = \frac{\omega \cdot L}{R}$$

possiamo dedurre che *il coefficiente di risonanza a vuoto coincide con il fattore di merito dell'induttore.*

[1] Scegliamo la convenzione di considerare positiva Q_l.

[2] Il fattore di merito di un induttore é definito come il rapporto tra la sua reattanza X e la sua resistenza interna R; $Q_m = \frac{X_l}{R}$.

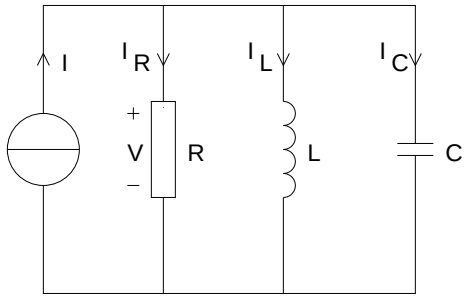

FIGURA 8. Circuito risonante parallelo

Considerando ancora il circuito risonante serie di figura 2, é possibile osservare che, in condizioni di risonanza, la tensione ai capi degli elementi reattivi puó essere superiore alla tensione ai capi del generatore; ció accade ogniqualvolta la reattanza induttiva (o capacitiva) del circuito risulti maggiore della resistenza R; si ha infatti: $V_l = \omega_r \cdot L \cdot I$ e $V = V_r = R \cdot I$.

Questo fenomeno é noto come *sovratensione*. sovratensione

Ad esempio, sia $R = 1\Omega$, $C = 0,5\,\mathrm{F}$, $L = 2\mathrm{H}$. La pulsazione di risonanza risulta allora pari a:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Se alimentiamo il circuito con un generatore sinusoidale di tensione di valore efficace $V = 1\mathrm{V}$, otteniamo una corrente I pari a:

$$I = \frac{V}{R} = 1\,\mathrm{A}$$

La tensione ai capi della resistenza risulta pari a:

$$V_r = RI = 1\,\mathrm{V}$$

mentre le tensioni ai capi dell'induttore e del condensatore risultano pari a:

$$V_c = V_l = X_l I = 2\,\mathrm{V}$$

Vediamo dunque che la tensione ai capi degli elementi reattivi puó essere superiore alla tensione di alimentazione del circuito risonante.

É altresí importante notare come il coefficiente di risonanza coincida con il rapporto tra la tensione ai capi dell'induttore (o del condensatore) e la tensione ai capi della resistenza; si ha pertanto il fenomeno di sovratensione se e soltanto se il coefficiente di risonanza risulta maggiore dell'unitá.

5. Risonanza parallelo

Passiamo ora a considerare la rete elettrica rappresentata in figura 8, e determiniamo la relazione tra la corrente impressa alla rete dal generatore e la tensione ai suoi capi.

A tal scopo calcoliamo innanzitutto l'*ammettenza* Y_t vista ai capi del generatore:

$$\dot{Y}_t = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

La corrente I e la tensione $V = \frac{I}{Y_t}$ risulteranno in fase se e solo se la parte immaginaria dell'ammettenza é nulla, cioé se e solo se:

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}$$

da cui si ritrova la relazione giá ottenuta per la risonanza serie:

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}} \tag{8}$$

Come nel caso della risonanza serie, possiamo tracciare l'andamento dei moduli dell'ammettenza del circuito e della tensione ai capi del generatore, da cui é possibile notare che in condizioni di risonanza il valore della tensione (in modulo) risulta massimo. Anche per il circuito risonante parallelo é possibile parlare di coefficiente

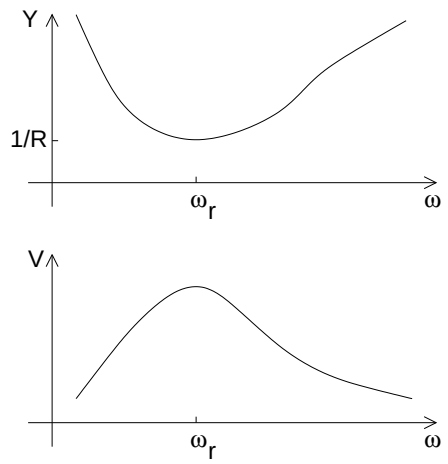

FIGURA 9. Andamento dell'ammettenza e della tensione ai capi del generatore nel caso di risonanza parallelo

coefficiente di risonanza

di risonanza, definito come il rapporto tra la potenza reattiva e la potenza attiva in gioco nella rete; indicata con V la tensione ai capi del generatore, la potenza reattiva vale:

$$Q_l = \frac{V^2}{\omega L} = \omega C V^2$$

mentre la potenza attiva é data da:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

e quindi il coefficiente di risonanza é:

$$\boxed{Q_r = \frac{Q}{P} = \omega \cdot C \cdot R = \frac{R}{\omega \cdot L}} \tag{9}$$

Nel caso in cui il generatore di corrente non sia ideale, occorre considerare la sua resistenza interna R_i, da intendersi in parallelo con la resistenza R del circuito risonante; in questo caso nella formula del coefficiente di risonanza occorre sostituire al valore di R il parallelo $R_t = \frac{R \cdot R_i}{R + R_i}$ delle due resistenze. Si parla in questo caso di coefficiente di risonanza a carico (indicato di solito con Q_{rc}).

coefficiente di risonanza a carico

Analogamente a quanto visto per il circuito serie, si possono avere dei fenomeni di *sovracorrente*[3]; infatti in condizioni di risonanza si ha:

$$V = R \cdot I$$

sovracorrente

ed indicando con I_l e con I_c i moduli delle correnti nell'induttore e nel condensatore,

[3]anziché di *sovratensione*

otteniamo:

$$I_l = \frac{V}{\omega L} = V \cdot \frac{R}{\omega L} = Q_r \cdot V$$
$$I_c = \omega C V = \omega C R \cdot I = Q_r \cdot I$$

da cui possiamo notare che il modulo di tali correnti (uguali ed opposte) risulta maggiore della corrente impressa al circuito dal generatore nel caso in cui il coefficiente di risonanza risulti maggiore dell'unitá.

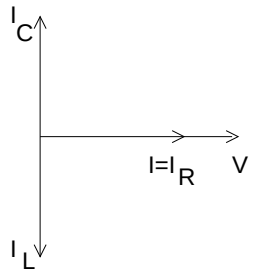

FIGURA 10. Diagramma vettoriale delle correnti per il circuito risonante parallelo

6. Il circuito risonante parallelo nel caso di un induttore reale

In questo paragrafo analizziamo il caso in cui l'induttore sia considerato reale; ció rappresenta un caso assai comune: infatti la trattazione del paragrafo precedente cade in difetto nel caso di induttori con basso fattore di merito ($Q_m < 10$).

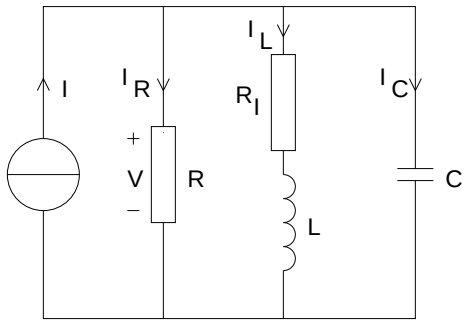

FIGURA 11. Circuito risonante parallelo nel caso di induttore reale

Il circuito di figura 11 si differenzia da quello utilizzato nel caso di induttore ideale, in quanto vi compare la resistenza interna R_l dell'induttore.

Per determinare la condizione di risonanza, scriviamo l'espressione dell'ammettenza vista ai capi del generatore di corrente:

$$\dot{Y}_t = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_l + j\omega L} + j\omega C$$

ed imponiamo che sia nulla la sua parte immaginaria: per far ció occorre innanzitutto determinare il denominatore comune della precedente espressione, e poi moltiplicare numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore

stesso, ottenendo:

$$\dot{Y}_t = \frac{{R_l}^2 + \omega^2 L^2 + RR_l + j(\omega RC({R_l}^2 + \omega^2 L^2) - \omega RL)}{{R_l}^2 + \omega^2 L^2}$$

A questo punto eguagliamo a zero la parte immaginaria dell'ammettenza; otteniamo allora la seguente condizione di risonanza:

$$\frac{\omega L}{{R_l}^2 + \omega^2 L^2} - \omega C = 0$$

da cui si ricava la seguente equazione (di terzo grado):

$$\omega^3 L^2 C - \omega L + \omega C R^2 = 0$$

Essa ammette una soluzione banale per $\omega = 0$, corrispondente al funzionamento in corrente continua, mentre la condizione di risonanza vera e propria la si ottiene dalla risoluzione dell'equazione

$$\omega^2 L^2 C - L + C R^2 = 0$$

coefficiente di risonanza per un circuito con induttore reale

Per quanto riguarda il comportamento dell'ammettenza e della tensione ai capi del generatore, si rimanda a quanto detto nel caso ideale, mentre per quanto riguarda l'espressione del coefficiente di risonanza, occorre tener presente della potenza attiva dissipata sulla resistenza R_l. Si ottiene allora:

$$Q_r = \frac{\omega C}{\frac{1}{R} + \frac{R_l}{{R_l}^2 + \omega^2 L^2}}$$

7. Curva di risonanza normalizzata

curva di risonanza normalizzata

Nello studio dei circuiti risonanti, é comodo far riferimento ad una *curva di risonanza universale* (o *normalizzata*), da cui ricavare le informazioni necessarie al dimensionamento ed allo studio della rete elettrica stessa.

A tal scopo, riprendiamo la curva rappresentante la corrente elettrica in funzione della pulsazione ω esaminata nel caso del circuito risonante serie: una prima normalizzazione puó essere ottenuta rappresentando sulle ordinate non il modulo della corrente I, ma il rapporto tra tale corrente e la corrente massima I_r (ottenuta in condizioni di risonanza).

Otteniamo cosí la curva rappresentata in figura 12:

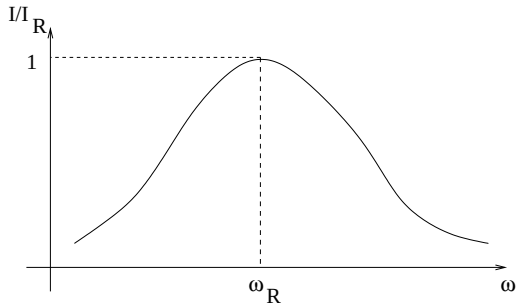

Figura 12. Andamento del rapporto $\frac{I}{I_r}$ in funzione della pulsazione ω

Si deduce immediatamente che l'ordinata massima assume valore uno. Un ulteriore passo avanti nella normalizzazione puó essere ottenuto se svincoliamo il grafico di tale curva dal valore ω_r della pulsazione di risonanza.

Senza entrare in dettaglio nei calcoli, osserviamo che ció puó essere ottenuto introducendo una nuova variabile

$$\delta = \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \tag{10}$$

che rappresenta lo scarto relativo tra la pulsazione ω e la pulsazione di risonanza ω_r Indicando con Q_r il coefficiente di risonanza del circuito, ed introducendo un nuovo parametro α cosí definito:

$$\alpha = Q_r \cdot \delta = Q_r \cdot \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \tag{11}$$

si ottiene la seguente espressione:

$$\boxed{\frac{I}{I_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}}} \tag{12}$$

In questo modo risulta possibile disegnare la curva che rappresenta il rapporto $\frac{I}{I_r}$ in funzione del parametro α; a tal proposito osserviamo che si ha $\alpha = 0$ se e solo se $\omega = \omega_r$; in questo modo otteniamo una curva di risonanza, rappresentata in figura 13, riferita a grandezze adimensionali, e quindi valida per ogni circuito risonante [4].

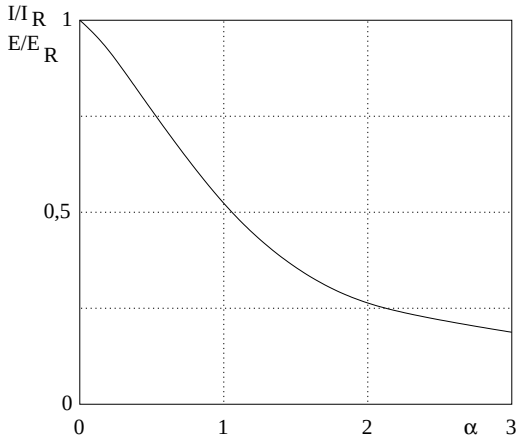

FIGURA 13. Curva di risonanza normalizzata

8. SELETTIVITÁ

Per *selettivitá* di un circuito risonante intendiamo la sua capacitá di comportarsi in modo differente al variare della frequenza della tensione o della corrente applicata.

selettivitá

Consideriamo, ad esempio, il circuito risonante parallelo rappresentato in figura 8, e sia f_r la sua frequenza di risonanza. Tale frequenza non dipende dal valore della resistenza R, ma dai valori dell'induttanza e della capacitá che compongono il circuito. Per questo circuito possiamo tuttavia determinare, al variare del valore della resistenza R, una famiglia di curve di risonanza, ed osservare come tali curve

[4] A rigore, l'espressione normalizzata del rapporto $\frac{I}{I_r}$ viene ricavata mediante delle approssimazioni. Pertanto occorre tener presente che l'andamento di tale curva, allontanandoci dalla condizione di risonanza risulta tanto piú simile al vero tanto maggiore risulta il coefficiente di risonanza del circuito: per $Q_r > 10$ gli errori di approssimazione commessi per $0 \leq \alpha \leq 3$ risultano del tutto trascurabili.

presentino una maggiore piattezza al diminuire del valore della resistenza. Ció é rappresentato nella figura 14, per due valori di resistenza differenti.

Nel primo caso (cioé per $R = R_1$), si puó notare come il valore della tensione ai capi del parallelo RLC dipenda in maniera piú accentuata dalla frequenza del generatore di corrente; possiamo pertanto dire che il circuito risonante con valore di resistenza R_1 é piú selettivo del secondo.

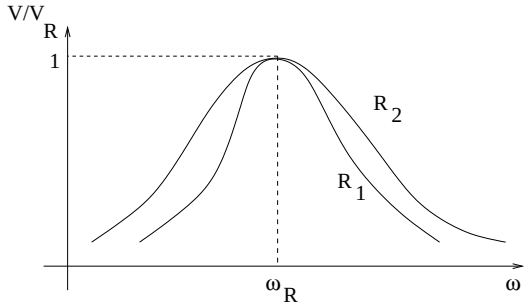

FIGURA 14. Curve di risonanza per un circuito RLC parallelo al variare della resistenza R

banda passante

La proprietá di selettivitá di un circuito risonante puó essere individuata, in modo quantitativo, definendone la sua *banda passante*, definita come l'ampiezza δ_f dell'intervallo di frequenze delimitato dai valori f_{min} ed f_{max} tali che al di fuori di questo intervallo la tensione V ai capi del generatore si riduce di un fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ o superiore[5].

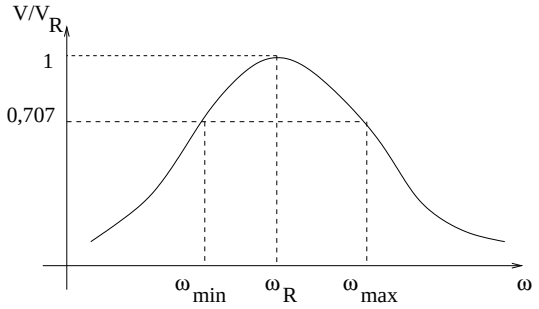

FIGURA 15. Banda passante di un circuito risonante parallelo

Per determinare la relazione tra la banda passante e la frequenza di risonanza di un circuito, possiamo utilizzare la curva di risonanza normalizzata (vedi figura 13), dalla quale ricaviamo che la tensione[6] risulta essere $\sqrt{2}$ volte inferiore al valore massimo per $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

Ricordando l'espressione di α, data dall'equazione 11, possiamo ricavare i valori limiti della banda passante, che indicheremo con ω_{min} ed ω_{max} come:

$$Q_r \cdot \frac{\omega_{min} - \omega_r}{\omega_r} = -\frac{1}{2}$$

[5]Ovviamente, nel caso di risonanza serie, occorre considerare, al posto della tensione, la corrente che attraversa il generatore e che alimenta il circuito risonante.

[6]o la corrente, per un circuito risonante serie.

$$Q_r \cdot \frac{\omega_{max} - \omega_r}{\omega_r} = \frac{1}{2}$$

da cui si ricava

$$\omega_{max} - \omega_{min} = \frac{\omega_r}{Q_r}$$

La banda passante é allora:

$$\boxed{B = f_{max} - f_{min} = \frac{f_r}{Q_r}} \tag{13}$$

relazione tra coefficiente di risonanza e selettivitá

Tale formula é stata ricavata dalla curva di risonanza normalizzata, e risulta pertanto valida anche per il circuito risonante serie. Occorre notare come il coefficiente di risonanza Q_r sia, nel caso di un circuito risonante serie, inversamente proporzionale al valore della resistenza R, mentre nel caso di un circuito risonante parallelo, esso sia tanto piú elevato quanto piú grande risulta il valore della resistenza R.

Di conseguenza, *un circuito risonante serie risulta piú selettivo al diminuire del valore della resistenza serie*, mentre un *circuito risonante parallelo risulta sempre piú selettivo man mano che cresce il valore della resistenza.*

9. Circuiti risonanti accoppiati

In preparazione.

10. Conclusioni

Nel presente lavoro abbiamo esaminato il fenomeno della *risonanza*, che coinvolge le reti elettriche in cui siamo presenti sia elementi reattivi induttivi che capacitivi.

Tale fenomeno fa sí che per particolari valori della frequenza della forma d'onda sinusoidale impressa dal generatore, la tensione e la corrente ai capi del generatore stesso risultino in fase.

Abbiamo successivamente esaminato due casi, relativi al collegamento in serie oppure in parallelo degli elementi reattivi, giungendo a delle espressioni per la frequenza di risonanza e per il coefficiente di risonanza.

Questo coefficiente esprime il grado di bontá di un circuito risonante in termini di selettivitá, che consiste nella proprietá di un circuito risonante di cambiare il suo comportamento in funzione della variazione di frequenza del segnale applicato in ingresso.

Abbiamo inoltre costruito una curva di risonanza, detta *universale* o *normalizzata*, da cui trarre informazioni per qualsiasi circuito risonante, serie o parallelo, in funzione della frequenza di risonanza e del coefficiente di risonanza.

Infine abbiamo esaminato la possibilitá di sfruttare il fenomeno della mutua induzione al fine di accoppiare due circuiti risonanti, potendo cosí variare la forma della curva di risonanza in funzione dei valori degli elementi che compongono il circuito e del coefficiente di accoppiamento.

11. Esercizi svolti

11.1. **Esercizio 1.** Determinare la frequenza di risonanza ed il coefficiente di risonanza di un circuito RLC serie, tale che $R = 20\Omega$; $C = 10$ nF; $L = 20$ mH;

Soluzione:

La frequenza di risonanza vale:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = 11254\,\text{Hz}$$

Il coefficiente di risonanza vale:

$$Q_r = \frac{2\pi f_r L}{R} = 70,71$$

11.2. **Esercizio 2.** Determinare la corrente che attraversa il condensatore in condizioni di risonanza per il circuito di figura 8 con $R = 2\Omega$; $C = 0,4$ F; $L = 0,1$ H[7]. Si supponga $I = 2$ A.

Soluzione:

Si calcola la frequenza di risonanza:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = 1,591\,\text{Hz}$$

In queste condizioni, le correnti I_L ed I_C che attraversano l'induttore ed il condensatore sono uguali e opposte, e quindi la corrente che attraversa la resistenza e la tensione ai suoi capi valgono: $I_R = I = 2$ A, e $V_R = R \cdot I = 4$ V. Avendosi poi:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_r C} = 4\Omega$$

si ottiene

$$I_C = \frac{V_R}{X_C} = 0,5\,\text{A}$$

12. Esercizi da svolgere

12.1. **Esercizio 1.** Determinare le frequenze di risonanza ed il coefficiente di risonanza della rete rappresentata in figura 6, sapendo che $C = 20$ nF; $R = 100\Omega$; $L = 40$ mH.

12.2. **Esercizio 2.** Determinare le tensioni ai capi del resistore e del condensatore (in condizioni di risonanza) per il circuito di figura 6, supponendo che esso sia collegato a un generatore ideale di tensione $V = 12$ volt.

13. Test di autovalutazione

Sono qui presentate dieci domande. Ad ogni risposta esatta viene assegnato un punto. Si raggiunge un livello sufficiente rispondendo esattamente ad almeno sei domande. Di seguito viene presentata la soluzione.

(1) Quando un circuito si trova in *condizione di risonanza* ?
(2) Nota l'espressione dell'impedenza di un circuito, come si determina la sua *frequenza di risonanza* ?
(3) Cos'é il *coefficiente di risonanza* di un circuito RLC serie e come é legato al *fattore di merito* dell'induttore ?
(4) Come si determina la *frequenza di risonanza* di un circuito risonante parallelo ?
(5) Come si costruisce la *curva di risonanza universale* ?
(6) Cosa si intende per *selettivitá* di un circuito risonante ?
(7) Come sono legate la *selettivitá* di un *circuito risonante serie* ed il suo *coefficiente di risonanza* ?
(8) Come si determina la *banda passante* di un circuito risonante ?
(9) Quali sono i vantaggi nell'uso di *circuiti risonanti accoppiati* ?
(10) Cosa é il *coefficiente di accoppiamento* ?

Soluzione

[7] I valori di induttanza e capacitá di questo esercizio, sono irrealistici per un circuito comunemente usato nell'elettrotecnica o nell'elettronica; tali valori sono stati scelti per manterere i calcoli semplici

(1) Un circuito si trova in condizioni di risonanza quando la tensione ai capi del generatore e la corrente che lo attraversa sono in fase tra loro.
(2) Eguagliando a zero la parte immaginaria dell'impedenza
(3) Il coefficiente di risonanza di un circuito RLC serie é il rapporto tra la potenza reattiva e la potenza attiva in gioco, e coincide con il fattore di merito dell'induttore
(4) Eguagliando a zero la parte immaginaria dell'ammettenza totale.
(5) Effettuando due normalizzazioni: la prima riguarda la corrente, ottenuta rappresentando sulle ordinate il rapporto tra la corrente I e la corrente massima, e la seconda rappresentando sulle ascisse non la pulsazione ω, ma lo scarto relativo tra ω e la pulsazione di risonanza ω_r
(6) La selettivitá é la proprietá di comportarsi in modo alquanto differente allo scostarsi della frequenza del generatore dalla frequenza di risonanza
(7) Maggiore é il coefficiente di risonanza, migliore risulta la selettivitá del circuito
(8) Dalla sua curva di risonanza, determinando i valori di frequenza tali che il rapporto $\frac{I}{I_max}$ sia pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(9) Poter variare la forma della curva di risonanza variando il coefficiente di accoppiamento
(10) É il rapporto $\frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$

14. Conoscenze essenziali da ricordare

Un circuito contenente induttori e condensatori ed alimentato in regime sinusoidale, si trova in condizione di risonanza quando la tensione ai capi del generatore e la corrente che lo attraversa sono in fase. Per determinare la frequenza di risonanza, occorre ricordare che in condizione di risonanza, per avere sfasamento nullo, la parte reale dell'impedenza totale deve essere nulla. La frequenza di risonanza puó essere dunque ricavata eguagliando a zero la parte immaginaria dell'impedenza. Un parametro assai importante per caratterizzare i circuiti risonanti é il coefficiente di risonanza; infatti tanto piú esso risulta elevato, tanto migliore risulta essere la selettivitá del circuito. La curva di risonanza rappresenta l'andamento della corrente (per un circuito RLC serie), o della tensione (per un circuito RLC parallelo) al variare della frequenza di risonanza; tale curva puo' essere normalizzata rappresentando sulle ordinate il rapporto tra la corrente e la corrente massima per un circuito serie (o il rapporto tra tensioni per un circuito ed in ascissa lo scarto relativo tra la pulsazione a cui risulta alimentato il circuito e la pulsazione di risonanza. Nel caso di circuiti risonanti accoppiati, la curva di risonanza cambia la sua forma al variare del coefficiente di accoppiamento.

15. Breve riepilogo dei concetti fondamentali da ricordare

(1) Concetto di risonanza.
(2) Tecniche per la determinazione delle frequenze di risonanza e del coefficiente di risonanza.
(3) Utilizzo della curva di risonanza normalizzata.
(4) La selettivitá nei circuiti risonanti.
(5) La risonanza nei circuiti accordati

16. Avvertenza

Questo documento puó essere liberamente distribuito, purché senza modifiche, integralmente, gratuitamente e senza scopo di lucro o altri scopi commerciali. Ogni cura é stata posta nella stesura del documento. Tuttavia l'Autore non puó assumersi

alcuna responsabilitá derivante dall'utilizzo della stessa. Ultimo aggiornamento: 8 febbraio 2004.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Pezzi. *Elettrotecnica Generale*, Zanichelli, Bologna (1978).
[2] E. Cavazzuti, C.A. Nobili. *Corso di Radioelettronica, Elettrotecnica e Misure*, Calderini, Bologna, (1989).
[3] C.A. Desoer. E.S. Kuh. *Fontamenti di Teoria dei Circuiti*, Franco Angeli, Milano (1984).

Typeset by LaTeX 2_ε under `LINUX`

e-mail: davide.tambuchi@tin.it