

# LE UNITÁ DI MISURA LOGARITMICHE

DAVIDE TAMBUCHI

SOMMARIO. Questo breve articolo vuole introdurre le unitá di misura logaritmiche utilizzate nell'Elettronica e nello studio dei Sistemi di Comunicazione. Può essere considerato come un articolo propedeutico allo studio della risposta in frequenza dei sistemi lineari e/o allo studio dei sistemi di comunicazione elettrica.

## 1. ELEMENTI DI ACUSTICA

La nozione di *decibel* nasce storicamente dagli studi di *acustica*. Ricordiamo innanzitutto che l'intensitá  $I$  di un'onda<sup>1</sup> che incide su una superficie di area  $S$  é data dal rapporto:

$$I = \frac{P}{S}$$

ove  $P$  indica la potenza dell'onda incidente. L'intensitá é di conseguenza misurata in  $\text{W m}^{-2}$ .

**Esempio 1.1.** *Si consideri un altoparlante, che emette un'onda sonora con potenza acustica di 10 W, che incide in modo isotropo<sup>2</sup> su una cupola di forma emisferica di raggio  $r = 10$  m (vedi figura 1). La superficie della cupola<sup>3</sup> é allora:*

$$S = 2\pi r^2 = 628 \text{ m}^2$$

L'intensitá sonora é allora

$$I = \frac{P}{S} = 15,9 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$$

Gli studi sulla sensibilitá dell'orecchio umano hanno portato alla conclusione che, per ogni frequenza  $f$  di un'onda acustica vi é una minima intensitá al di sotto del quale il suono non é udibile (detta *soglia della percezione sonora*), ed una intensitá massima (detta *soglia del dolore*) sopra la quale si avvertono sensazioni di dolore, sovente accompagnate a danni biologici. Si può dunque costruire un grafico, detto *gamma uditiva media*, in cui le soglie di intensitá vengono riportate, su scala logaritmica, in funzione della frequenza del suono, anch'essa espressa in scala logaritmica. Tale grafico é riportato in figura 2. La linea a tratto intero rappresenta la soglia del dolore, mentre quella punteggiata rappresenta la soglia della percezione.

---

Questo documento può essere liberamente distribuito, purché integralmente, gratuitamente, e senza fini di lucro o altri fini commerciali. I marchi citati sono probabilmente registrati, e vengono utilizzati senza la garanzia del libero uso del nome. Ogni cura é stata posta nella realizzazione di questo documento. Tuttavia l'Autore non può assumersi alcuna responsabilitá derivante dal suo utilizzo.

<sup>1</sup>Non necessariamente acustica, lo stesso discorso vale ad esempio per un'onda elettromagnetica.

<sup>2</sup>Ovvero la potenza incidente non dipende dalla direzione.

<sup>3</sup>Ricordiamo che la superficie di una sfera di raggio  $r$  é  $4\pi r^2$ .

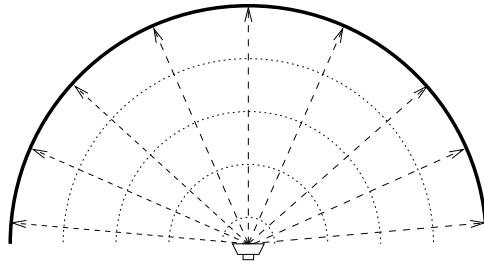


FIGURA 1. Altoparlante che diffonde su una cupola emisferica

Alla frequenza di 400 Hz, la minima intensit  udibile   di  $7,2 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ , mentre

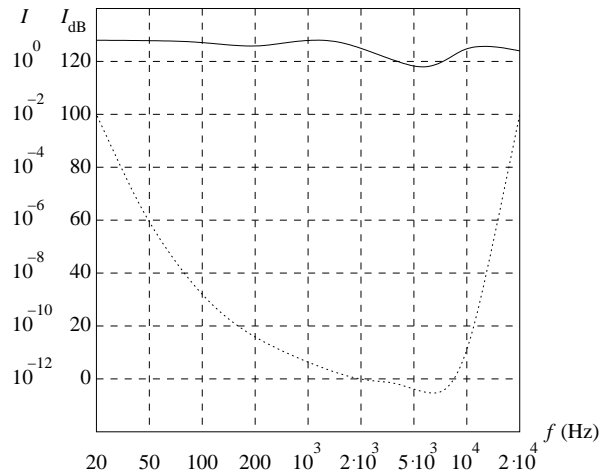


FIGURA 2. Sensibilit  media dell'orecchio umano

alla frequenza di 1000 Hz essa   di circa  $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ . Per questo motivo, si   stabilito di scegliere come *livello di riferimento* dell'intensit  sonora il valore

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

In questo modo   possibile introdurre una nuova unit  di misura dell'intensit  sonora, introducendo l'intensit  misurata in *bel*, definita come:

$$I_{\text{bel}} = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

Pi  comunemente, si utilizza un sottomultiplo, ovvero il *decibel*, abbreviato con il simbolo dB. L'intensit  in *decibel*   allora data da:

$$I_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

Si osservi che nel grafico rappresentato in figura 1 le intensitá sono altresí misurate in decibel. Il valore 0 dB corrisponde dunque ad una intensitá  $I$  uguale al valore di riferimento  $I_0$ <sup>4</sup>.

**Esempio 1.2.** *Calcolando l'intensitá sonora in decibel per il valore di  $I$  trovato nell'esempio 1.1, si ottiene il valore:*

$$I_{\text{dB}} = 102 \text{ dB}$$

## 2. USO DELLE UNITÁ LOGARITMICHE NELLE RETI ELETTRICHE

2.1. **Neper e decibel.** Si consideri un sistema *lineare*<sup>5</sup> Se indichiamo con  $P_i$  la



FIGURA 3. Rappresentazione di un sistema lineare

potenza in ingresso e con  $P_u$  la potenza uscente dal sistema, possiamo definire il guadagno in potenza come:

$$(1) \quad G = \frac{P_u}{P_i}$$

Si ha allora la seguente:

**Definizione 2.1.** *Il guadagno espresso in decibel é:*

$$(2) \quad G_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_u}{P_i}$$

*Il guadagno espresso in neper é:*

$$(3) \quad G_{\text{Np}} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{P_u}{P_i}$$

Osserviamo che la definizione del guadagno in *neper* utilizza il logaritmo in base  $e$ , o logaritmo neperiano<sup>6</sup>. Supponiamo ora che il sistema lineare sia costituito da



FIGURA 4. Rappresentazione di un doppio bipolo lineare

un doppio bipolo lineare funzionante in continua od in regime sinusoidale; in questo caso, indicate con  $I_i, I_u$  le correnti entranti ed uscenti, e con  $V_i, V_u$  le tensioni in

<sup>4</sup>In assenza di suono, ad esempio nel vuoto, si ha  $I = 0$ , e quindi non é possibile definire l'intensitá sonora in decibel. Infatti per  $I \rightarrow 0$  si ha  $I_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$ .

<sup>5</sup>Ricordiamo che un sistema é detto *lineare* se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

<sup>6</sup>L'abbreviazione del neper é Np.

ingresso ed in uscita, possiamo definire il guadagno in corrente  $G_i$  ed il guadagno in tensione  $G_v$  come:

$$G_i = \frac{|I_u|}{|I_i|}$$

$$G_v = \frac{|V_u|}{|V_i|}$$

Supponiamo ora che  $V_i, V_u, I_i, I_u, P_i, P_u$  vengano misurate su resistenze identiche, di valore pari ad  $R$ . Si ha allora:

$$\frac{P_u}{P_i} = \frac{\frac{|V_u|^2}{R}}{\frac{|V_i|^2}{R}} = \frac{|V_u|^2}{|V_i|^2}$$

$$\frac{P_u}{P_i} = \frac{R \cdot |I_u|^2}{R \cdot |I_i|^2} = \frac{|I_u|^2}{|I_i|^2}$$

È allora possibile esprimere il guadagno in decibel in funzione delle tensioni, o delle correnti:

$$G_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|V_u|^2}{|V_i|^2} = 20 \log_{10} \frac{|V_u|}{|V_i|}$$

$$G_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|I_u|^2}{|I_i|^2} = 20 \log_{10} \frac{|I_u|}{|I_i|}$$

ove si è utilizzata la proprietà  $\log_a x^2 = 2 \cdot \log_a x$ . Si ha cioè:

$$(4) \quad \boxed{G_{dB} = 10 \log_{10} G = 20 \log_{10} G_i = 20 \log_{10} G_v}$$

Analogamente, il guadagno in neper può essere espresso come:

$$G_{Np} = \log \frac{|V_u|}{|V_i|} = \log \frac{|I_u|}{|I_i|}$$

$$(5) \quad \boxed{G_{Np} = \frac{1}{2} \cdot \log G = \log G_i = \log G_v}$$

La seguente tabella riporta un quadro riassuntivo di quanto esposto:

	Guadagno in neper (Np)	Guadagno in decibel (dB)
Tra potenze	$\frac{1}{2} \cdot \log \frac{P_u}{P_i}$	$10 \cdot \log_{10} \frac{P_u}{P_i}$
Tra tensioni	$\log \frac{ V_u }{ V_i }$	$20 \cdot \log_{10} \frac{ V_u }{ V_i }$
Tra correnti	$\log \frac{ I_u }{ I_i }$	$20 \cdot \log_{10} \frac{ I_u }{ I_i }$

Con questa definizione, i rapporti (in decibel o in neper) tra potenze coincidono con i rispettivi rapporti tra le tensioni o tra le correnti.

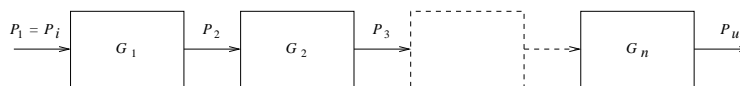


FIGURA 5. Sistemi in cascata

**2.2. Sistemi in cascata.** Nel caso di sistemi in cascata, il guadagno totale é ottenuto dal prodotto dei guadagni dei singoli blocchi costituenti il sistema. Con riferimento alla figura 5, rappresentante  $n$  sistemi in cascata, si ha:

$$P_2 = G_1 \cdot P_1 = G_1 \cdot P_i$$

$$P_3 = G_2 \cdot P_2$$

...

$$P_u = G_n \cdot P_n$$

e di conseguenza, si ha:

$$(6) \quad G = \frac{P_u}{P_i} = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_n$$

Se il guadagno di ciascun blocco é espresso in decibel, ovvero se:

$$G_{i(\text{dB})} = 10 \cdot \log_{10} G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

segue che il *guadagno totale in decibel* é la *somma* dei singoli guadagni, espressi in decibel<sup>7</sup>.

$$(7) \quad \boxed{G_{\text{dB}} = G_{1\text{dB}} + G_{2\text{dB}} + \dots + G_{n\text{dB}}}$$

Analogamente, il guadagno totale in neper é la somma dei singoli guadagni, espressi in neper:

$$(8) \quad \boxed{G_{\text{Np}} = G_{1\text{Np}} + G_{2\text{Np}} + \dots + G_{n\text{Np}}}$$

**2.3. Unitá logaritmiche rispetto ad un livello di riferimento.** Nei precedenti paragrafi, neper e decibel sono stati usati per la misura di rapporti tra grandezze omogenee (potenze, tensioni o correnti), ovvero per la misura di *grandezze relative*. Nelle applicazioni pratiche, risulta assai comodo utilizzarli anche per la rappresentazione di *grandezze assolute*, rispetto ad una grandezza di riferimento. Ció é comune soprattutto per le potenze: una potenza assoluta é detta espressa in *decibel per watt*<sup>8</sup> quando se ne calcola il rapporto (in decibel) rispetto ad 1 watt. Analogamente, se si calcola il rapporto (in decibel) di una potenza rispetto ad una potenza di riferimento di un milliwatt, diremo che tale potenza é espressa in *decibel per milliwatt*<sup>9</sup>. Ad esempio, una potenza assoluta di 30 dBW corrisponde ad una potenza di 1000 watt, mentre una potenza assoluta di -10 dBm corrisponde a 0,1 milliwatt. In modo analogo é possibile definire le potenze in decibel per microwatt, eccetera. Analoghe definizioni possono essere date per potenze espresse in neper; tuttavia questa unitá é raramente utilizzata per indicare potenze assolute (i neper

<sup>7</sup>Se  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  si ha infatti

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$$

<sup>8</sup>Abbreviato in dBW

<sup>9</sup>Abbreviato in dBm

sono assai comodi nelle espressioni analitiche, mentre i decibel, utilizzando il logaritmo in base 10, sono piú utili nei calcoli). La seguente tabella riporta i livelli di potenza in dBW ed in dBm per alcuni valori di potenza.

$P$ (watt)	$P_{\text{dBW}}$	$P_{\text{dBm}}$
$10^{-6}$	-60	-30
$10^{-5}$	-50	-20
$10^{-4}$	-40	-10
$10^{-3}$	-30	0
$10^{-2}$	-20	10
$10^{-1}$	-10	20
1	0	30
10	10	40
$10^2$	20	50
$10^3$	30	60

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. Alonso, E. J. Finn. *Elementi di Fisica per l'Università – Volume secondo, Campi ed Onde*, Masson Italia Editori S.p.A., Milano, (1983).
- [2] F. Carassa. *Comunicazioni Elettriche*, Bollati Boringhieri, Torino, (1989).
- [3] E. Gatti, P. F. Manfredi, A. Rimini. *Elementi di Teoria delle Reti Lineari*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, (1983).

Typeset by  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  under LINUX

---

Como, 8 febbraio 2004

e-mail: [davide.tambuchi@tin.it](mailto:davide.tambuchi@tin.it)