CALCOLO DELLE COSTANTI DI TEMPO IN UN SISTEMA DI ORDINE DUE O SUPERIORE

DAVIDE TAMBUCHI

SOMMARIO. Questa dispensa insegna come utilizzare il programma gratuito `OCTAVE` per il calcolo delle costanti di tempo di un sistema del secondo ordine (cioè con due variabili di stato). Questo procedimento può essere esteso, per analogia, a sistemi di ordine superiore.

1. Un esempio pratico

Consideriamo il circuito di figura 1; e siano:

- $u(t) = V(t)$ il suo ingresso.
- $y(t) = V_{r1}(t)$ la sua uscita.
- $x_1(t) = I_1(t)$ ed $x_2(t) = V_c(t)$ le sue variabili di stato.

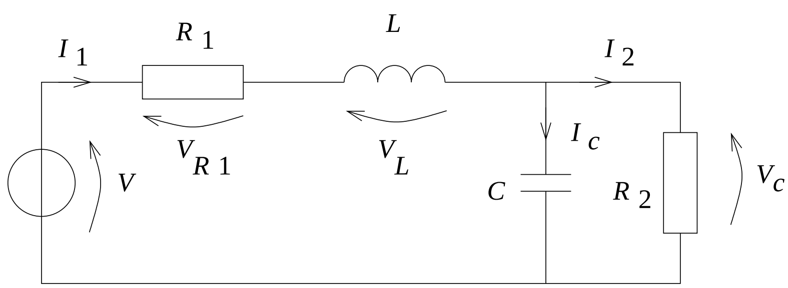

FIGURA 1. Rete elettrica di cui si vogliono calcolare le costanti di tempo

Scriviamo le equazioni di Kirkhoff e le relazioni costitutive dei bipoli:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_c + I_2 \\
V &= V_{r1} + V_l + V_c \\
V_{r1} &= R_1 I_1 \\
V_c &= R_2 I_2 \\
I_c &= C\dot{V}_c \\
V_l &= L\dot{I}_l
\end{aligned}
$$

Eliminiamo tutte le variabili che non rappresentano ingressi, uscite e stati; cioè eliminiamo, per sostituzione, I_c, I_2, V_l. Otteniamo:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{r1} + L\dot{I}_1 + V_c \\
V_{r1} &= R_1 I_1 \\
V_c &= R_2 I_1 - R_2 C\dot{V}_c
\end{aligned}
$$

Effettuando le sostituzioni $x_1 = I_1$, $x_2 = V_c$, $u = V$, $y = V_{r1}$ e riordinando, otteniamo le due equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2C}x_2 \tag{2}$$

e l'equazione di uscita:

$$y = R_1 x_1 \tag{3}$$

Prendiamo ora i coefficienti delle variabili di stato x_1 ed x_2 dalle equazioni di stato e inseriamoli in una matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -R_1/L & -1/L \\ 1/C & -1/(R_2C) \end{bmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A; per far ciò introduciamo la matrice A in `octave`, e calcoliamoli con il comando `eig(A)`. A titolo di esempio, siamo:

$$R_1 = 4700\,\Omega$$
$$R_2 = 8200\,\Omega$$
$$C = 220 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$$
$$L = 100 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}$$

Il corrispondente programma `octave` è il seguente:

```
% file: autoval.m
% calcolo autovalori per il circuito di figura 1

R1 = 4700;
R2 = 8200;
C = 220e-6;
L = 100e-3;
% introduzione valori dei componenti

A = [-R1/L, -1/L; 1/C, -1/(R2 * C)];
% introduzione matrice A

eig(A)
% calcolo degli autovalori della matrice A
```

A questo punto, osserviamo che:

- Gli autovalori sono in generale numeri complessi.
- Ciascun autovalore individua una costante di tempo.
- Il numero di autovalori è uguale al numero di righe (colonne) della matrice A
- Tale numero è uguale al numero di variabili di stato.
- Nel nostro caso ci sono dunque due autovalori, e pertanto ci sono due costanti di tempo.
- Siano $\lambda_1 = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1$ e $\lambda_2 = \alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2$ i due autovalori. Allora le costanti di tempo sono: $\tau_1 = -\frac{1}{\alpha_1}$ e $\tau_2 = -\frac{1}{\alpha_2}$ (cioé si ottengono dall'inverso delle parti reali degli autovalori, cambiati di segno).
- La parte immaginaria, sia che esista che non esista, non serve a determinare le costanti di tempo del sistema.

- L'eventuale presenza della parte immaginaria significa che il sistema presenta un comportamento oscillatorio.

Nel nostro caso, avendosi:

$$\lambda_1 = -4{,}6999 \cdot 10^4$$
$$\lambda_2 = -1{,}5215$$

le costanti di tempo del circuito sono:

$$\tau_1 = \frac{1}{4{,}6999 \cdot 10^4} = 2{,}1277 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$$
$$\tau_2 = \frac{1}{1{,}5215} = 0{,}65726\,\mathrm{s}$$

La costante di tempo piú grande è quella che determina la durata del transitorio del circuito (che si esaurisce in pratica dopo 5 volte tale valore), e pertanto é detta costante di tempo dominante. Nel nostro caso, essa è $\tau_2 = 0{,}65726\,\mathrm{s}$ e pertanto il circuito va a regime in un tempo $T \approx 5\tau_2 = 3{,}863\,\mathrm{s}$.

2. Avvertenza

 Per la segnalazione di errori e *bugs* contattare l'autore all'indirizzo email: `davide.tambuchi@tin.it`. Ultimo aggiornamento: 8 febbraio 2004.

Riferimenti bibliografici

[1] *A Brief Introduction to octave*, manuale del programma, (2000).
[2] S. Rinaldi, C. Piccardi. *I Sistemi Lineari, Teoria, Modelli, Applicazioni*, Cittàstudiedizioni, Milano, (1997).
[3] D. Tambuchi. *Appunti per un Corso di Sistemi ed Automazione*, dispensa, (2001).

Typeset by LaTeX 2_ε *under* LINUX