# Il metodo di eliminazione di Gauss

Davide Tambuchi

---

Nella presente dispensa verrá esaminato il *metodo di eliminazione di Gauss* per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Consideriamo un sistema di $n$ equazioni lineari in $n$ incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

a coefficienti costanti (reali o complessi) $a_{ij}$ e $b_i$, $(1 \leq i, j \leq n)$. Questo sistema puó essere scritto in forma matriciale come $A \cdot X = B$, ove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \ldots \\ b_{1n} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se il sistema é di piccole dimensioni (cioé con 2, 3 o al piú 4) incognite, puó essere risolto sia manualmente che con l'ausilio di un calcolatore con il *metodo di Cramer*. Osserviamo che utilizzando questo metodo servono $N = (n+1)n!$ operazioni per risolvere il sistema. Questo numero cresce rapidamente con il numero di equazioni; ad esempio su un elaboratore in grado di eseguire $10^9$ operazioni in virgola mobile (cioé con numeri reali) al secondo, occorrerebbe circa un decimo di secondo per risolvere un sistema di 10 equazioni, circa quindici ore per un sistema di 15 equazioni, e piú di 4000 anni per un sistema di 20 equazioni. E' allora importante utilizzare altri metodi che consentano la risoluzione del sistema in un tempo ragionevole. Uno di questi é il *metodo di eliminazione di Gauss* che sará trattato nella presente dispensa. Il metodo verrá illustrato per mezzo di un semplice esempio.

Consideriamo il seguente sistema di equazioni lineari, di $n = 3$ equazioni in 3 incognite:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Il primo passaggio consiste nel trovare il coefficiente di *massimo modulo*, e con un opportuno scambio di righe e di colonne, nel portarlo nell'angolo in alto a sinistra. Questo coefficiente é detto *elemento cardine*, o *pivot*. Nel nostro caso, tale coefficiente si trova nella terza equazione, come coefficiente di $x_2$, e vale $-4$. Per effettuare tale scambio, riscriviamo innanzitutto il sistema a cominciare da quest'ultima equazione (ad esempio scambiando di posto la prima e la terza equazione):

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

A questo punto, possiamo portare l'elemento pivot in alto a sinistra scrivendo per primo, in ciascuna equazione del sistema, il monomio contenente l'incognita $x_2$:

$$\begin{aligned} -4x_2 + x_1 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_2 + x_1 - x_3 &= 6 \\ 3x_2 + x_1 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Volendo scrivere un programma che calcoli le soluzioni con questo metodo, occorre dunque effettuare un opportuno scambio di righe e di colonne della matrice $A$ e delle colonne della matrice $B$ che contengono rispettivamente i coefficienti $a_{ij}$ e $b_i$ del sistema. La seconda fase consiste nel dividere i coefficienti della prima equazione per l'elemento cardine, in modo da avere il primo coefficiente in alto a sinistra uguale ad 1. Cosí facendo, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \\ 2x_2 + x_1 - x_3 &= 6 \\ 3x_2 + x_1 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

A questo punto, occorre eliminare i termini contenenti $x_2$ (cioé quelli nella prima colonna), relativi alla seconda e terza equazione. Per far ció, basta moltiplicare per 2 la prima equazione e sottrarla termine a termine dalla seconda, e poi ripetere il procedimento moltiplicando per 3 la prima equazione e sottraendola alla terza. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= 5 \\ \frac{7}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_3 &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Ripetiamo il procedimento *lasciando da parte* la prima equazione, e cercando un nuovo l'elemento cardine relativo alla seconda ed alla terza equazione: questo é il numero $\frac{7}{4}$, coefficiente di $x_1$ nella terza equazione. Per far ció, scambiano tra di loro la seconda e la terza equazione:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_3 &= \frac{13}{2} \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Dividiamo ora tutti i termini della seconda equazione per il nuovo pivot, cioé per $\frac{7}{4}$:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \\ x_1 + \frac{5}{7}x_3 &= \frac{26}{7} \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= 5 \end{aligned}$$

In questo modo, anche il termine in alto a sinistra del *sottosistema* formato dalla seconda e dalla terza equazione risulta uguale ad 1. Eliminiamo ora il termine in $x_1$ nella terza equazione; analogamente a quanto fatto in precedenza, basta moltiplicare la seconda equazione per $\frac{3}{2}$ e sottrarla alla terza. Si ottiene:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \\ x_1 + \frac{5}{7}x_3 &= \frac{26}{7} \\ -\frac{4}{7}x_3 &= -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

Riscriviamo il sistema in modo che il coefficiente di $x_3$ nell'ultima equazione sia uguale ad 1; otteniamo allora:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \\ x_1 + \frac{5}{7}x_3 &= \frac{26}{7} \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

In questo modo, abbiamo ottenuto la prima soluzione, cioé $x_3 = 1$. Sostituendo tale valore nella seconda equazione, possiamo ricavare $x_1$, ottenendo $x_1 = 3$ ed una volta nota anche $x_1$, possiamo ricavare $x_2$ dalla prima equazione, ottenendo $x_2 = 2$. Notiamo che il metodo di Gauss puó essere pensato come ad una *trasformazione* della matrice $A$ in *forma triangolare*; infatto se introduciamo tre nuove variabili $z_1 = x_2$, $z_2 = x_1$, $z_3 = x_3$ (cioé se rinominiamo $x_1$, $x_2$ ed $x_3$) il sistema puó essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} z_1 - \frac{1}{4}z_2 - \frac{3}{4}z_3 &= \frac{1}{2} \\ z_2 + \frac{5}{7}z_3 &= \frac{26}{7} \\ z_3 &= 1 \end{aligned}$$

ove i coefficienti della matrice $A$ sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il metodo di Gauss riduce il numero di operazioni necessarie a risolvere un sistema di equazioni a circa $N = \frac{1}{3}n^3$, e diventa giá competitivo con il metodo di Cramer per $n = 7$ equazioni.

## BIBLIOGRAFIA


1. F. Scheid, *Analisi Numerica*, McGraw-Hill, 1994.
2. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica Numerica*, Springer, 1998.
3. A. Quarteroni, *Elementi di Calcolo Numerico*, Progetto Leonardo, 1999.
4. B.P. Demidovič, I. Maran, *Fondamenti di Calcolo Numerico*, Edizioni Mir, 1981.
5. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vettering, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1989.





Per informazioni, o per la segnalazione di errori e bugs, contattare l'autore all'indirizzo e-mail: `davide.tambuchi@tin.it`


---


`Typeset by` TEX `under` *LINUX*.