Appunti per *un* corso di Sistemi ed Automazione

Davide Tambuchi

Como, 18 febbraio 2004

Avvertenze

Informazioni Legali e Copyright

Questo manuale é protetto secondo i diritti di proprietá individuale dell'Autore. Questo manuale puó essere riprodotto, duplicato e distribuito liberamente, interamente o in parte, sia come formato elettronico che come carta stampata o con qualsiasi altro mezzo (microfilm, uso di scanner, eccetera), sempre che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

- Questo riferimento al copyright deve apparire in maniera chiara e comprensibile su tutte le copie riprodotte, duplicate e distribuite.
- Devono apparire chiaramente, su tutte le copie riprodotte, duplicate e distribuite, nome e cognome dell'Autore, titolo del manuale, e data dell'ultima revisione, come nella pagina di intestazione.
- Deve essere mantenuta l'integritá del manuale, senza modifiche o alterazioni di sorta.
- Per quanto riguarda la riproduzione e/o distribuzione, queste devono essere effettuate per fini non commerciali, e senza fini di lucro.

Marchi Registrati

`LINUX` é un marchio registrato di *Linus Torvalds*. Tutti i nomi dei prodotti citati sono probabilmente marchi depositati, e vengono usati senza la garanzia del libero uso del nome.

Altre Avvertenze

Ogni cura é stata posta nella raccolta e nella verifica della documentazione contenuta in questo manuale. Tuttavia l'Autore non puó assumersi alcuna responsabilitá derivante dall'utilizzo della stessa.

Introduzione

Queste dispense nascono dall'intenzione di presentare i fondamenti della Teoria dei Sistemi e dell'Automazione utilizzando un linguaggio matematico rigoroso e nello stesso tempo semplice.

A tal proposito, si é scelto di evitare il piú possibile l'uso della *trasformata di Laplace* e della *Trasformata zeta*, e cercando di utilizzare il meno possibile l'operatore di di integrazione.

Nello stesso tempo, si é rinunciato alla separazione tra sistemi a tempo discreto e sistemi a tempo continuo, presentando cosí una teoria unificata dei sistemi lineari.

Sono state puntualizzate alcune inesattezze che si trovano in molti testi elementari di Teoria dei Sistemi, e si é evitato di dare dimostrazioni inesatte di alcuni teoremi fondamentali (ad esempio, si é evitato di introdurre la *Delta di Dirac* come passaggio al limite di funzioni impulsive, in quanto ció non é matemativamente corretto; infatti la trattazione corretta appartiene all'ambito della *Teoria delle Distribuzioni*, e puó essere trattata solo all'interno di corsi universitari). La trattazione elementare è comunque riportata in appendice, insieme alle tecniche di antitrasformazione, al fine di fornire uno strumento pratico per il calcolo del transitorio di un sistema lineare.

Inoltre, vengono presentate alcune applicazioni curiose della Teoria dei Sistemi, relative a problemi di *Analisi non lineare* e di *Teoria dei Numeri*, allo scopo di mettere in luce il fatto che la Teoria dei Sistemi é innanzitutto una teoria matematica, nonché con l'intenzione di stimolare la lettura presentando alcuni risultati della matematica contemporanea, caratterizzata da un intimo legame tra tutte le sue branche (Algebra, Teoria dei Numeri, Geometria, Analisi, eccetera).

Non mancano infine alcuni cenni alla teoria delle *Reti Neurali*, visto il recente interesse verso questa nuova frontiera della tecnica.

Questo volume possiede, per deliberata scelta dell'Autore, un forte carattere *anarchico* rispetto ai testi scolastici tradizionali. Si é scelto di privilegiare fortemente i *contenuti* rispetto agli *schemi*, e pertanto il presente testo non possiede alcuna strutturazione modulare.

Le presenti dispense sono state scritte con LaTeX 2_ε su una macchina `LINUX`; il presente testo é stato compilato nei formati

- *Device Independent* – `DVI`,
- *Postscript* – `PS`,
- *Portable Document Format* – `PDF`.

Per quanto riguarda la distribuzione, si rimanda alle Informazioni Legali.

Chiunque voglia scrivermi, puó farlo all'indirizzo di posta elettronica `davide.tambuchi@tin.it`.

Como, 18 febbraio 2004

Davide Tambuchi

Indice

1 Sistemi e modelli **1**

1.1 I sistemi lineari 1

1.1.1 Come scrivere le equazioni di un sistema lineare 6

1.1.2 Modello preda–predatore 8

1.2 Osservabilitá dello stato di un sistema 9

1.3 Reversibilitá e completa osservabilitá 11

1.4 Raggiungibilitá 12

1.5 Stabilitá ed instabilitá 14

1.6 Rappresentazione matriciale 15

1.6.1 Esempio di descrizione interna 18

1.7 Descrizione esterna di un sistema lineare 20

1.7.1 Esempio di descrizione esterna 21

1.8 Esempio di descrizione ARMA di un sistema lineare 22

1.8.1 Previsioni delle piene di un fiume 22

1.9 Relazione tra descrizione esterna ed f.d.t. 25

1.10 Modello ARMA e funzione di trasferimento 28

1.11 Relazione tra descrizione esterna ed interna 31

1.11.1 Passaggio alla descrizione esterna 31

1.11.2 Caso generale con piú di una variabile di stato 33

1.12 Realizzazione 35

1.12.1 Realizzazione in forma canonica di controllo 37

1.12.2 Realizzazione in forma canonica di controllo: caso generale 40

1.12.3 Realizzazione in forma canonica di ricostruzione 40

1.12.4 Realizzazione in forma canonica di Markoff 42

1.12.5 Significato dei coefficienti di Markoff 44

2 Aggregati di sistemi **47**

2.1 Generalitá 47

2.2 Sistemi in cascata 51

2.2.1 Esempio applicativo 54

2.3 Sistemi in parallelo 57
2.3.1 Sistemi in parallelo con nodo sottrattore 59
2.3.2 Esempio applicativo 60
2.4 La retroazione 62
2.5 Algebra degli schemi a blocchi 66
2.5.1 F.d.T. di sistemi in cascata 66
2.5.2 F.d.T. di sistemi in parallelo 67
2.5.3 F.d.T. di sistemi in retroazione 67
2.5.4 Esempio 69
2.5.5 Esempio riepilogativo 71

3 Equazioni differenziali 73
3.1 Spazio delle fasi 73
3.1.1 Il problema di Kostantinoff 73
3.1.2 Spazio delle fasi e flusso di fase 74
3.1.3 Spazio delle fasi ampliato e curve integrali 78
3.2 Campi vettoriali 80
3.3 Equazione differenziale definita da un campo 84
3.4 Determinazione delle curve integrali 86
3.4.1 Equazione differenziale per un campo costante 87
3.4.2 Campo proporzionale alla distanza 88
3.5 Sistemi di equazioni differenziali 90
3.5.1 Campo vettoriale per un pendolo matematico 92
3.5.2 Significato delle curve di fase per un pendolo matematico 97
3.5.3 Determinazione analitica della curva di fase 98
3.5.4 Sistemi di equazioni differenziali lineari 103
3.5.5 L'esponenziale di una matrice 104
3.5.6 Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari . 105
3.5.7 Teorema di equivalenza 107
3.6 Complementi 111
3.6.1 Definizioni preliminari 111
3.6.2 Equazioni differenziali sul toro 113
3.6.3 Analisi delle curve di fase sul toro 117
3.6.4 Applicazioni alla Teoria dei Numeri 122

4 Sistemi a tempo discreto 126
4.1 Introduzione 126
4.2 Sistema autonomo con una sola variabile di stato 126
4.3 Sistema di equazioni lineari autonomo 127
4.4 I conigli di Fibonacci 128
4.5 Confronto con sistemi autonomi a tempo continuo 130

4.6 Sistemi a tempo discreto non lineari . . . 131
4.6.1 La parabola logistica . . . 132
4.6.2 Simulazioni . . . 134
4.6.3 Definizioni elementari . . . 139
4.6.4 Analisi grafica . . . 142
4.6.5 Iperbolicitá . . . 143
4.6.6 Analisi grafica applicata alla parabola logistica . . . 147
4.6.7 Il teorema di Sarkovsky . . . 151
4.6.8 Conseguenze del Teorema di Sarkovsky . . . 152
4.6.9 Teoria delle Biforcazioni . . . 154
4.6.10 Cascata di raddoppi per sistemi a tempo continuo . . . 157
4.6.11 La parabola logistica per a maggiore di 4 . . . 160
4.6.12 Insiemi frattali . . . 163
4.6.13 Caos . . . 164

5 Il problema della stabilitá 168
5.1 Introduzione . . . 168
5.2 Studio del movimento di un sistema lineare . . . 168
5.2.1 Equilibrio di un sistema a tempo discreto . . . 170
5.2.2 Equilibrio di un sistema a tempo continuo . . . 171
5.3 Definizione di sistema stabile . . . 172
5.4 Stabilitá asintotica . . . 172
5.4.1 Esempio . . . 173
5.5 Legame tra stabilitá asintotica ed autovalori . . . 174
5.6 Autovalori e costanti di tempo . . . 174
5.7 Criteri di asintotica stabilitá per sistemi a tempo continuo . . . 175
5.7.1 Il test di Hurwitz . . . 175
5.7.2 Esempio di applicazione del criterio di Hurwitz . . . 176
5.7.3 Avvertenza . . . 177
5.7.4 Le unitá di misura logaritmiche . . . 177
5.7.5 Elementi di acustica . . . 177
5.7.6 Uso delle unitá logaritmiche nelle reti elettriche . . . 180
5.7.7 Sistemi in cascata . . . 182
5.7.8 Unitá logaritmiche rispetto ad un livello di riferimento 183

6 Sistemi di controllo automatico a tempo continuo 185

A Algebra delle matrici 186
A.1 Definizioni . . . 186
A.2 Operazioni sulle matrici . . . 188
A.3 Determinante di una matrice quadrata . . . 189

A.4 Inversa di una matrice quadrata . . . 192
A.5 Matrice trasposta . . . 193
A.6 Autovalori di una matrice quadrata . . . 194
A.7 Matrici triangolari e diagonali . . . 195
A.8 Matrici triangolari a blocchi . . . 195
A.9 Traccia, determinante ed autovalori . . . 199

B Sviluppo in serie di potenze 200
B.1 Generalitá . . . 200
B.2 Esempio . . . 201
B.3 Serie numeriche . . . 201
B.4 Serie di Taylor e di Mc. Laurin . . . 203
B.5 Alcuni sviluppi in serie di Mc. Laurin . . . 204

C Grafici con `GnuPlot` 205

D Elementi di Topologia 207
D.1 Introduzione . . . 207
D.2 Spazi metrici . . . 207
D.3 Definizioni . . . 209
D.4 L'insieme di Cantor e le sue proprietá . . . 210

E I segnali canonici 212
E.1 Avvertenza . . . 212
E.2 L'impulso di Dirac . . . 212
E.3 Lo scalino unitario . . . 213
E.4 La rampa unitaria . . . 214
E.5 Relazione tra i segnali canonici . . . 214

F Le sinusoidi generalizzate 217
F.1 Introduzione . . . 217
F.1.1 Sinusoidi generalizzate . . . 218

G Regime sinusoidale ed f.d.t. 220
G.1 Introduzione . . . 220
G.2 Studio di una rete in regime sinusoidale . . . 220
G.2.1 Funzione di trasferimento della rete . . . 221
G.2.2 Esempio . . . 222
G.3 Formalizzazione matematica . . . 222

H La trasformata di Laplace 224

I L'antitrasformata di Laplace **225**
I.1 Introduzione 225
I.2 La rappresentazione nel dominio di Laplace dei segnali 225
I.3 Il metodo dell'antitrasformata 226
I.3.1 Antitrasformazione con poli di y distinti 227
I.3.2 Esercizio 3 230
I.4 Antitrasformazione nel caso di poli coincidenti 232
I.4.1 Solo un polo ha molteplicità maggiore di uno 232
I.4.2 Più di un polo ha molteplicità maggiore di uno 233
I.4.3 Dimostrazione della formula di antitrasformazione . . . 235
I.5 Caso di stato iniziale non nullo 236
I.5.1 Esempio applicativo 237
I.6 Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali 238
I.7 I teoremi del valore iniziale e finale 240

Elenco delle figure

1.1 Rappresentazione di un sistema 1
1.2 Esempio di sistema lineare a tempo continuo 3
1.3 Esercizio di ricapitolazione sulle equazioni di un sistema lineare a tempo continuo 8
1.4 Automa 1 10
1.5 Automa 2 10
1.6 Studio della irraggiungibilitá di uno stato 13
1.7 Raggiungibilitá ed irraggiungibilitá per un automa a stati finiti 13
1.8 Circuito per lo studio della raggiungibilitá 14
1.9 Rete per l'esempio di descrizione interna di un sistema a tempo continuo 18
1.10 Circuito per l'esempio di una descrizione esterna di un sistema lineare a tempo continuo 21
1.11 Tratto di fiume tra le due stazioni A e B 23
1.12 Estrapolazione lineare dei dati 24
1.13 Rappresentazione di poli e zeri nel piano complesso 28
1.14 Poli e zeri nel piano complesso per il modello ARMA di previsione delle piene del fiume 32
1.15 Scelta delle variabili di stato in una rete lineare 36
1.16 Impulso elementare 44

2.1 Controllo della temperatura di una stanza 47
2.2 Curve di calibrazione per differenti temperature esterne . . . 48
2.3 Regolazione in cascata 48
2.4 Schema di controllo della temperatura 49
2.5 Controllo automatico della temperatura di una stanza 50
2.6 Schema a blocchi del controllo automatico di temperatura . . 50
2.7 Collegamento in cascata 51
2.8 Rappresentazione semplificata di sistemi in cascata 52
2.9 Riduzione di un sistema in cascata 53
2.10 Schema semplificato dell'aggregato di due sistemi in cascata . 53

2.11 Esempio di sistemi in cascata 54
2.12 Sistemi collegati in parallelo 57
2.13 Sistemi collegati in parallelo 58
2.14 Sistemi collegati in parallelo con nodo sottrattore 59
2.15 Bacino alimentato da due affluenti 61
2.16 Collegamento in retroazione 63
2.17 Sistemi in cascata descritti per mezzo delle loro f.d.t. 66
2.18 Sistemi in parallelo descritti per mezzo delle loro f.d.t. 67
2.19 Sistemi retroazionati posivimanente 68
2.20 Sistema controreazionato 69
2.21 Esercizio riepilogativo 70
2.22 La semplificazione conduce ad uno schema controreazionato . 70
2.23 Sistemi in retroazione annidati 71
2.24 Semplificazione dei sistemi annidati 72

3.1 Il problema di Kostantinoff 73
3.2 Spazio delle fasi per il problema di Kostantinoff 74
3.3 Spazio delle fasi per un sistema con tre variabili di stato che assumono valori compresi tra 0 e 10 75
3.4 Spazio delle fasi per un sistema caratterizzato da una sola variabile di stato reale 75
3.5 Curva di fase per un sistema lineare descritto da due variabili di stato 77
3.6 Curve di fase nello spazio delle fasi 77
3.7 Moto di un punto rappresentativo nello spazio delle fasi per un sistema descritto da due variabili di stato 78
3.8 Lo stato di un sistema é univocamente determinato a partire da uno stato iniziale 79
3.9 Curva integrale nello spazio delle fasi ampliato 80
3.10 Curva integrale per un sistema caratterizzato da due variabili di stato 81
3.11 Per un punto dello spazio delle fasi ampliato non possono passare due curve integrali 82
3.12 Le curve di fase non possono intersecarsi 83
3.13 Esempio di curve integrali per un sistema caratterizzato da una sola variabile di stato 84
3.14 Vettore velocitá di fase 85
3.15 Esempio di campo vettoriale 86
3.16 Dalla conoscenza del campo vettoriale é possibile determinare l'*evoluzione locale* dello stato del sistema 87

3.17 Curva di fase intorno ad un punto fisso per un sistema descritto da due variabili di stato 88
3.18 Curva integrale relativa ad un punto fisso per un sistema descritto da due variabili di stato 89
3.19 Tracciamento delle curve di fase noto il campo vettoriale delle velocitá di fase 90
3.20 Tracciamento delle curve integrali noto il campo di velocitá nello spazio delle fasi ampliato 91
3.21 Campo vettoriale costante su una retta 91
3.22 Curva integrale per un campo costante su una retta 92
3.23 Campo proporzionale alla distanza 92
3.24 Curve integrali nel caso di campo proporzionale alla distanza 93
3.25 Pendolo matematico 94
3.26 Campo vettoriale per un pendolo matematico 95
3.27 Campo vettoriale per un pendolo matematico rappresentato su un cilindro 96
3.28 Campo vettoriale *linearizzato* per un pendolo matematico . . . 96
3.29 Determinazione della curva di fase per un pendolo oscillante . 98
3.30 Curva di fase per il campo ottenuto mediante linearizzazione delle equazioni 99
3.31 Curva di fase per un pendolo che parte dal punto piú alto con velocitá iniziale non nulla 99
3.32 Rappresentazione di un punto in coordinate polari 100
3.33 Campo di velocitá di un pendolo in coordinate polari 101
3.34 Curva integrale per un pendolo matematico per piccole oscillazioni 103
3.35 Corrispondenza tra i punti di una retta e una circonferenza . 112
3.36 Toro bidimensionale 113
3.37 Corrispondenza tra i punti del piano cartesiano ed i punti del toro bidimensionale 114
3.38 Curve di fase ed operatore di avanzamento per i sistemi 3.47 e 3.48 116
3.39 Rappresentazione delle curve di fase sul toro 117
3.40 Immagini di un punto della circonferenza per ripetute rotazioni 119
3.41 Punti della successione 3.58 120
3.42 Rappresentazione della curva di fase nel piano 122
3.43 Rappresentazione della curva di fase nel quadrato 122
3.44 Rappresentazione del logaritmo della successione delle potenze di due sulla circonferenza 124
3.45 Intervalli in cui cadono le cifre 7 ed 8 125

4.1 Soluzioni dell'equazione 4.8 . . . 133
4.2 Andamento della densitá di popolazione per $a = 3{,}5$ . . . 137
4.3 Andamento della densitá di popolazione per $a = 3{,}95$ . . . 137
4.4 Simulazione per $a = 2{,}5$ . . . 138
4.5 Simulazione per $a = 3$ . . . 139
4.6 Simulazione per $a = 3{,}5$ . . . 139
4.7 Simulazione per $a = 3{,}6$ . . . 140
4.8 Simulazione per $a = 3{,}7$ . . . 140
4.9 Simulazione per $a = 3{,}8$ . . . 141
4.10 Simulazione per $a = 4$ . . . 141
4.11 Determinazione dei punti fissi della parabola logistica . . . 142
4.12 Analisi grafica per la determinazione della traiettoria . . . 143
4.13 Esempio di punti di periodo primo 2 . . . 144
4.14 Esempio di punti fissi attrattore e repulsore . . . 145
4.15 Esempio di punti fissi repulsori . . . 146
4.16 Esempio di punto fisso non iperbolico debolmente repulsore . . . 147
4.17 Esempio di punti fisso non iperbolico debolmente attrattore . . . 148
4.18 Esempio di punto fisso non iperbolico attrattore da sinistra e repulsore da destra . . . 149
4.19 Analisi grafica per a compreso tra 0 ed 1 . . . 150
4.20 Analisi grafica per a compreso tra 1 e 2 . . . 150
4.21 Analisi grafica per a uguale a 2 . . . 151
4.22 Analisi grafica per a compreso tra 2 e 3 . . . 151
4.23 Punti fissi per $a = 3{,}6$ . . . 152
4.24 Punti di periodo 2 per $a = 3{,}6$ . . . 152
4.25 Punti di periodo 3 per $a = 3{,}6$ . . . 153
4.26 Punti di periodo 4 per $a = 3{,}6$ . . . 153
4.27 Punti fissi per $a = 3{,}99027$ . . . 154
4.28 Punti di periodo 2 per $a = 3{,}99027$ . . . 154
4.29 Punti di periodo 3 per $a = 3{,}99027$ . . . 155
4.30 Punti di periodo 4 per $a = 3{,}99027$ . . . 155
4.31 Nessun punto fisso . . . 156
4.32 Nascita di un punto fisso . . . 157
4.33 Nascita di un secondo punto fisso . . . 158
4.34 Cambiamento del diagramma di fase in corrispondenza di una biforcazione . . . 158
4.35 Diagramma di biforcazione per la funzione 4.13 . . . 159
4.36 Diagramma di biforcazione per la parabola logistica . . . 159
4.37 Diagramma di biforcazione per un sistema a tempo continuo . . . 160
4.38 Fenomeni di raddoppio del periodo in una macchina volumetrica . . . 160

4.39 Curva di fase relativa ad un ciclo periodico di una macchina volumetrica . . . 161
4.40 Curva di fase relativa ad un raddoppio di periodo . . . 161
4.41 I punti della parabola logistica minori di 0 o maggiori di 1 si trovano su un'orbita divergente. . . . 162
4.42 Alcuni punti della parabola logistica lasciano l'intervallo base dopo una iterazione. . . . 163
4.43 Alcuni punti della parabola logistica lasciano l'intervallo base dopo due iterazioni. . . . 164
4.44 Punti fissi di $f(f(x))$ . . . 164

5.1 Esempio di traiettorie per sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto . . . 169
5.2 Altoparlante che diffonde su una cupola emisferica . . . 178
5.3 Sensibilitá media dell'orecchio umano . . . 179
5.4 Rappresentazione di un sistema lineare . . . 180
5.5 Rappresentazione di un doppio bipolo lineare . . . 180
5.6 Sistemi in cascata . . . 182

D.1 Funzione distanza sulla retta reale . . . 208
D.2 Significato della diseguaglianza triangolare nel piano . . . 208
D.3 Intorni di un punto sulla retta reale e nel piano secondo la distanza euclidea. . . . 209
D.4 Costruzione dell'insieme di Cantor . . . 211

E.1 Funzione impulsiva di area 1 . . . 213
E.2 Rappresentazione della delta di dirac . . . 213
E.3 Scalino unitario . . . 214
E.4 Rampa unitaria . . . 214
E.5 Scalino modificato e sua derivata per diversi valori di T . . . 215

F.1 Sinusoidi generalizzate . . . 219

G.1 Rete RC parallelo . . . 220
G.2 Rete RLC parallelo . . . 222

I.1 Risposta allo scalino per una rete RC . . . 228
I.2 Rete LC parallelo . . . 229
I.3 Rete RLC serie . . . 230
I.4 Transitorio della rete RLC serie . . . 231
I.5 Rete RC parallelo con stato iniziale non nullo . . . 237
I.6 Rete elettrica RLC serie con stato iniziale non nullo . . . 238

I.7 Grafico della tensione sul condensatore in funzione del tempo . 240

Capitolo 1

Sistemi e modelli

1.1 I sistemi lineari

Un *sistema* é un ente astratto caratterizzato da tre grandezze fondamentali, che indicheremo con i termini *ingresso*, *uscita* e *stato*.

Per quanto riguarda il concetto di *stato* di un sistema, lo definiremo come il *minimo insieme di variabili* (che indicheremo con $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\}$) *che contengono una sufficiente informazione sulla storia passata del sistema, tale da permettere la determinazione della storia futura del sistema stesso, noti tutti gli ingressi.*

Possiamo dunque rappresentare un sistema come in figura 1.1 e per meglio chiarire le cose, passiamo immediatamente ad alcuni esempi.

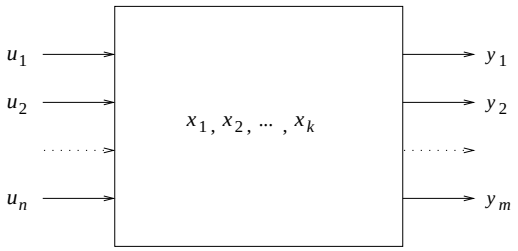

Figura 1.1: Rappresentazione di un sistema

Come primo esempio di sistema, possiamo pensare ad un *automa a stati finiti*, caratterizzato da:

1. una o piú variabili di ingresso $u_1, u_2, \ldots, u_n$

2. una collezione finita di stati, indicati di solito con le lettere $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ che mediante il processo dell'assegnamento, possono essere rappresentati da variabili di stato binarie $x_1, x_2, \ldots, x_k$

3. una o piú uscite $y_1, y_2, \ldots, y_m$

In questo caso, la conoscenza dello stato attuale in cui si trova l'automa, unito alla conoscenza dei suoi ingressi, permette univocamente di determinare l'uscita e lo stato successivo del sistema, cioé la sua evoluzione nel futuro.

All'interno dell'intera classe dei sistemi dinamici, rivestono particolare importanza i cosiddetti *sistemi lineari*; questi possono essere definiti come segue:

Definizione 1.1 *Un sistema é lineare se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti*[1]

Per un qualsiasi sistema lineare, indicheremo con

$$\mathcal{U} = u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$$

l'insieme dei suoi ingressi; con

$$\mathcal{X} = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\}$$

l'insieme delle sue variabili di stato, e con

$$\mathcal{Y} = \{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)\}$$

l'insieme delle sue uscite.

Se il tempo t é individuato da un numero reale, parleremo di un *sistema a tempo continuo*, mentre se il tempo t é caratterizzato da un numero intero, parleremo di *sistema a tempo discreto*.

Ad esempio, un automa a stati finiti é un sistema a tempo discreto.

Come ulteriore esempio di sistema, consideriamo la rete elettrica rappresentata in figura 1.2; sia $u(t) = V(t)$ il suo ingresso, e sia $y(t) = I(t)$ la sua uscita.

[1]La definizione data é sufficiente in una prima lettura del testo. Osserviamo che nella maggior parte dei testi elementari di Teoria dei Sistemi, il principio di sovrapposizione degli effetti viene solitamente (ed erroneamente) enunciato come segue: Se ad un ingresso $u^\bullet(t)$ corrisponde una uscita $y^\bullet(t)$, e se ad un ingresso $u^\star(t)$ corrisponde una uscita $y^\star(t)$, allora all'ingresso $u(t) = k_1 \cdot u^\bullet(t) + k_2 \cdot u^\star(t); \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ corrisponde l'uscita $y(t) = k_1 \cdot y^\bullet(t) + k_2 \cdot y^\bullet(t)$. Tale enunciato é tuttavia errato, dato che *non tiene conto dello stato iniziale del sistema*. Il principio di sovrapposizione degli effetti dovrebbe pertanto essere enunciato come segue: se ad uno stato iniziale $x^\bullet(0)$ ed ad un ingresso $u^\bullet(t)$ corrisponde una uscita $y^\bullet(t)$, e se ad uno stato iniziale $x^\star(t)$ ed ad un ingresso $u^\star(t)$ corrisponde una uscita $y^\star(t)$, allora allo stato iniziale $x(t) = k_1 \cdot x^\bullet(t) + k_2 \cdot x^\star(t); \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ed all'ingresso $u(t) = k_1 \cdot u^\bullet(t) + k_2 \cdot u^\star(t)$ corrisponde l'uscita $y(t) = k_1 \cdot y^\bullet(t) + k_2 \cdot y^\star(t)$.

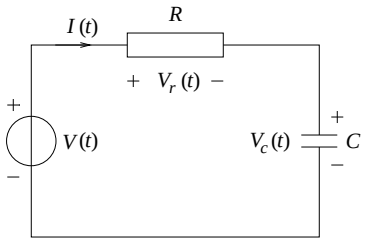

Figura 1.2: Esempio di sistema lineare a tempo continuo

L'andamento della corrente $I(t)$, in funzione del tempo, dipende, oltre che dalla tensione di ingresso $V(t)$, anche dallo stato del condensatore; infatti é ben differente il comportamento del circuito se si pensa di applicargli tensione a condensatore carico oppure a condensatore scarico.

L'evoluzione del sistema, dipende dunque anche dalla carica $Q(t)$ immagazzinata dal condensatore, che a sua volta é legata alla tensione sul condensatore dalla relazione $V_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Come variabile di stato, possiamo dunque prendere o la carica sul condensatore ($x(t) = Q(t)$) oppure la tensione ai suoi capi ($x(t) = V_c(t)$).

Possiamo osservare che l'evoluzione del sistema dipende dall'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, che vale

$$E = \frac{1}{2} \cdot CV_c^2$$

e quindi notare che la tensione sul condensatore individua in maniera univoca l'energia elettrostatica immagazzinata. Ció giustifica la scelta della tensione come variabile di stato[2].

Analogamente, in una rete elettrica contenente un induttore, l'energia immagazzinata in forma magnetica, é data da:

$$E = \frac{1}{2} \cdot LI^2 = \frac{\varphi^2}{2L}$$

e quindi una variabile di stato del sistema puó essere la corrente $I(t)$ che attraversa l'induttore, oppure il suo flusso magnetico $\varphi(t)$, legato alla corrente dalla relazione $\varphi = LI$.

Perveniamo pertanto alla seguente affermazione:

In una rete elettrica lineare, lo stato di un sistema dipende dagli elementi della rete in grado di immagazzinare energia (condensatori ed induttori),

[2]Osservando che l'energia elettrostatica puó essere altresí espressa come $E = \frac{Q^2}{2C}$, possiamo dire altrettanto per la carica $Q(t)$.

e pertanto possiamo generalmente prendere come variabili di stato tutte le correnti negli induttori e tutte le tensioni ai capi dei condensatori[3].

Un sistema lineare deve essere modellizzato mediante delle equazioni che legano tra di loro gli ingressi, le uscite e le variabili di stato del sistema stesso.

Per un sistema a tempo continuo caratterizzato da *una sola variabile di ingresso* $u(t)$, *una sola variabile di stato* $x(t)$ ed *una sola uscita* $y(t)$, le equazioni sono le seguenti:

$$\boxed{\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t)} \tag{1.1}$$

$$\boxed{y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t)} \tag{1.2}$$

La prima é detta *equazione di stato*; infatti essa lega la derivata $\dot{x}$ dello stato del sistema rispetto al tempo allo stato stesso x ed all'ingresso u.

La seconda é detta *equazione di uscita*, dato che esprime l'uscita del sistema y in funzione del suo stato interno x e dell'ingresso u.

Se il sistema é a *tempo discreto*, le due equazioni assumono la forma seguente:

$$\boxed{x(t+1) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t)} \tag{1.3}$$

$$\boxed{y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t)} \tag{1.4}$$

Nell'equazione 1.3 il termine $x(t+1)$ rappresenta lo *stato successivo* in funzione dello *stato attuale* $x(t)$ e dell'*ingresso* $u(t)$[4], mentre nella 1.4 l'uscita y puó essere calcolata se si conoscono lo stato x e l'ingresso del sistema u nell'istante t.

Nel caso in cui abbiamo a che fare con un sistema con

- n ingressi: $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$
- m variabili di stato: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$

[3]Occorre tuttavia osservare che, in alcuni casi, la scelta delle variabili di stato cosí effettuata puó portare ad avere delle variabili in sovrannumero. Ad esempio, se consideriamo due induttori L_1 ed L_2 attraversati rispettivamente dalle correnti $I_1(t)$ ed $I_2(t)$ e collegati in serie non ha senso considerare le due correnti come due variabili di stato distinte.

In altri casi, la conoscenza di tutte le correnti negli induttori e di tutte le tensioni sui condensatori non é sufficiente ad individuare lo stato del sistema: ad esempio se nella rete elettrica sono presenti degli interruttori, é necessario indicarne la posizione. Se poi nella rete sono presenti degli elementi con isteresi (ad esempio dei trasformatori con nucleo ferromagnetico), occorre specificare lo stato di magnetizzazione dei nuclei.

[4]Si noti la corrispondenza con la *Teoria degli Automi*.

- p uscite: $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_p(t)$

avremo m equazioni di stato, del tipo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1m}x_m(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1n}u_n(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2m}x_m(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2n}u_n(t) \\
&\ldots \\
\dot{x}_m(t) &= a_{m1}x_1(t) + a_{m2}x_2(t) + \cdots + a_{mm}x_m(t) + b_{m1}u_1(t) + \cdots + b_{mn}u_n(t)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

e p equazioni di uscita, del tipo:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \cdots + c_{1m}x_m(t) + d_{11}u_1(t) + + \cdots + d_{1n}u_n(t) \\
y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \cdots + c_{2m}x_m(t) + d_{21}u_1(t) + \cdots + d_{2n}u_n(t) \\
&\ldots \\
y_p(t) &= c_{p1}x_1(t) + c_{p2}x_2(t) + \cdots + c_{pm}x_m(t) + d_{p1}u_1(t) + + \cdots + d_{pn}u_n(t)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Osserviamo che la i–esima equazione di stato lega la derivata rispetto al tempo della variabile di stato x_i agli stati del sistema ed ai suoi ingressi. Analogamente, ogni equazione di uscita permette di determinare una uscita in funzione degli stati e degli ingressi.

Nel caso di un *sistema a tempo discreto*, le equazioni di stato e di uscita si modificano come segue:

$$\begin{aligned}
x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1m}x_m(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1n}u_n(t) \\
x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2m}x_m(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2n}u_n(t) \\
&\ldots \\
x_m(t+1) &= a_{m1}x_1(t) + a_{m2}x_2(t) + \cdots + a_{mm}x_m(t) + b_{m1}u_1(t) + \cdots + b_{mn}u_n(t)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

e

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \cdots + c_{1m}x_m(t) + d_{11}u_1(t) + \cdots + d_{1n}u_n(t) \\
y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \cdots + c_{2m}x_m(t) + d_{21}u_1(t) + \cdots + d_{2n}u_n(t) \\
&\ldots \\
y_p(t) &= c_{p1}x_1(t) + c_{p2}x_2(t) + \cdots + c_{pm}x_m(t) + d_{p1}u_1(t) + \cdots + d_{pn}u_n(t)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

come naturale estensione delle equazioni giá scritte per un sistema con un solo ingresso, un solo stato ed una sola uscita.

1.1.1 Come scrivere le equazioni di un sistema lineare

Nel presente paragrafo, daremo alcune indicazioni sulle tecniche da adottare per scrivere rapidamente le equazioni di un sistema lineare a tempo continuo.

Come primo esempio, consideriamo la rete elettrica di figura 1.2; e siano:

- $u(t) = V(t)$ l'ingresso del sistema
- $x(t) = V_c(t)$ la sua variabile di stato[5]
- $y(t) = I(t)$ la sua uscita

Per poter scrivere le equazioni, osserviamo innanzitutto che la corrente $I(t)$ é legata alla tensione $V_c(t)$ ai capi del condensatore dalla relazione:

$$\boxed{I(t) = C\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} = C\dot{V}_c} \tag{1.9}$$

e pertanto, la 1.9 rappresenta una relazione tra la derivata della variabile di stato ($\dot{x}(t) = \dot{V}_c(t)$) e l'uscita $u(t) = I(t)$. Tuttavia, a secondo membro della 1.2, non deve comparire la derivata della variabile di stato, ma solo la variabile di stato stessa e l'ingresso. Scrivendo tuttavia l'equazione di Kirkhoff alla maglia, otteniamo:

$$V(t) = V_c(t) + V_r(t) \tag{1.10}$$

ed applicando la legge di Ohm $V_r(t) = RI(t)$, possiamo eliminare la V_r dalla 1.10, ottenendo una relazione che lega uscita, ingresso e stato:

$$V(t) = V_c(t) + RI(t)$$

che possiamo anche scrivere come:

$$u(t) = x(t) + Ry(t)$$

da cui otteniamo l'*equazione di uscita del sistema*:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{R} \cdot x(t) + \frac{1}{R} \cdot u(t)} \tag{1.11}$$

Questa equazione coincide con la 1.2, con

$$c = -\frac{1}{R}$$

[5] vedi paragrafo 1.1

$$d = \frac{1}{R}$$

Passiamo ora all'equazione di stato 1.1; in essa deve comparire la derivata della variabile di stato, ovvero deve comparire $\dot{V}_c$; per tale motivo utilizziamo la 1.9 ottenendo

$$\dot{V}_c = \frac{1}{C} \cdot I(t) \tag{1.12}$$

L'equazione di stato non deve mai contenere la variabile di uscita (nel nostro caso la $I(t)$); pertanto occorre riutilizzare la legge di Ohm e l'equazione alla maglia per ricavare $I(t)$ in funzione dell'ingresso $V(t)$ e della variabile di stato $V_c(t)$; cioé:

$$I(t) = \frac{V_r(t)}{R} = \frac{V(t) - V_c(t)}{R}$$

che sostituita nella 1.12 permette di ottenere l'equazione di stato:

$$\dot{V}_c(t) = -\frac{1}{RC} \cdot V_c(t) + \frac{1}{RC} \cdot V(t)$$

Ricordando infine il significato di x, y, u, otteniamo

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC} \cdot x(t) + \frac{1}{RC} \cdot u(t)} \tag{1.13}$$

che coincide con la 1.1 per

$$a = -\frac{1}{RC}$$

$$b = \frac{1}{RC}$$

Concludiamo il seguente paragrafo con un esercizio, lasciato al lettore, che consiste nello scrivere le equazioni di stato e di uscita per il circuito di figura 1.3.

Come ingresso si consideri la corrente $I(t)$ e come uscita la corrente $I_r(t)$[6].

Soluzione:

- Ingresso: $u(t) = I(t)$
- Variabile di stato: $x(t) = I_l(t)$
- Uscita: $y(t) = I_r(t)$

[6]Suggerimento: si utilizzi la relazione $V_l = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ e l'equazione di Kirkhoff per le correnti.

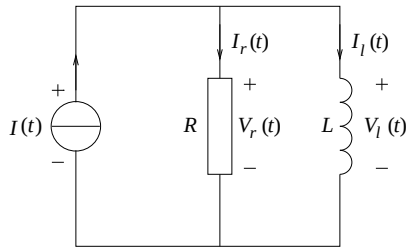

Figura 1.3: Esercizio di ricapitolazione sulle equazioni di un sistema lineare a tempo continuo

$$\boxed{y(t) = -x(t) + u(t)} \tag{1.14}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\frac{R}{L} \cdot x(t) + \frac{R}{L} u(t)} \tag{1.15}$$

1.1.2 Modello preda–predatore

Oltre agli automi a stati finiti, esistono numerosi sistemi che possono essere studiati con le equazioni a tempo discreto 1.7 ed 1.8.

Esamineremo a proposito un semplice modello biologico, utilizzato per stimare, mese per mese, la popolazione di animali di specie diversa conviventi in un parco naturale.

Siano:

- $x_1(t)$ il numero di leoni (predatori) presenti sul territorio nel mese t
- $x_2(t)$ il numero di gazzelle (prede) presenti sul territorio nel mese t
- $x_3(t)$ il numero di ettari di pascolo disponibili come cibo per le gazzelle nel mese t
- $u_1(t)$ i millimetri di pioggia nel mese t (prima variabile di ingresso)
- $u_2(t)$ il numero di gazzelle acquistate da un altro parco nazionale per il ripopolamento (seconda variabile di ingresso)
- $y(t)$ il numero totale di animali presenti sul territorio (variabile di uscita)

Uno studio del parco in esame ha portato le seguenti relazioni:

$$x_1(t+1) = 0,95x_1(t) + 0,12x_2(t) + 0,02u_1(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.98x_2(t) - 0,15x_1(t) + 0,16x_3(t) + 0,03u_1(t) + u_2(t)$$
$$x_3(t+1) = 0,92x_3(t) - 0,21x_2(t) + 0,05u_1(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t)$$

Le prime tre equazioni, che legano gli stati futuri $x_i(t+1), i = 1, 2, 3$ agli stati attuali ed agli ingressi, sono *equazioni di stato*; l'ultima é una *equazione di uscita*, legando l'uscita y agli stati x_i ed agli ingressi u_i.

Commentiamole brevemente, a partire dalla prima equazione: il termine $0,95x_1(t)$ tiene conto della prevalenza del tasso di mortalitá dei leoni rispetto al loro tasso di natalitá in mancanza di cibo; la presenza delle prede si fa sentire con il termine $0,12x_2(t)$; maggiore é il numero di prede, maggiore é la possibilitá di sfamare i leoncini neonati. Il termine $0,02u_1(t)$ tiene conto dell'importanza dell'acqua come elemento vitale. La seconda equazione é analoga; a secondo membro il primo termine tiene conto del fattore riproduttivo delle gazzelle; il secondo termine (con segno negativo) del numero di gazzelle sbranate mensilmente dai famelici leoni, il terzo termine dalla presenza di pascolo come fonte di cibo per le gazzelle, il penultimo tiene conto della presenza di acqua e l'ultimo del ripopolamento effettuato. Infine la terza equazione tiene conto della quantitá di ettari di terreno adibito a pascolo disponibile nel mese $t+1$ in funzione della quantitá di terreno disponibile il mese precedente, dalla quantitá di erba divorata dalle gazzelle (proporzionale al numero di gazzelle $x_2(t)$) e dei millimetri di pioggia caduti nel mese t.

Per quanto riguarda l'uscita $y(t)$, essa é somma del numero totale di animali presenti sul territorio nel mese t e del numero di gazzelle introdotte mediante ripopolamento mensile.

Se si conosce mese per mese lo stato del sistema ed i suoi ingressi é possibile prevedere l'evoluzione della popolazione degli animali nei mesi successivi.

L'abilitá di un buon sistemista consiste nell'osservare per mesi il sistema biologico in questione e ricavare i parametri che lo caratterizzano (i coefficienti numerici delle equazioni).

1.2 Osservabilitá dello stato di un sistema

Per introdurre l'importante concetto di *osservabilitá dello stato di un sistema*, consideriamo l'automa a stati finiti rappresentato nelle figura 1.4.

Applicando uno zero al suo ingresso, si passa dallo stato A allo stato B; applicandogli invece un uno si passa dallo stato A allo stato C. Da questi due

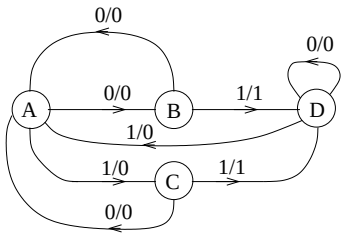

Figura 1.4: Automa 1

stati, si ritorna nello stato A se si applica in ingresso uno zero, oppure allo stato D se si applica in ingresso un uno. Di conseguenza, il comportamento degli stati B e C é identico, e dalla conoscenza delle sole variabili di ingresso ed uscita del sistema non é possibile stabilire in quale di questi due stati si trova il sistema; diremo allora che i due stati sono *indistinguibili*.

É allora possibile semplificare questo automa, sostituendo agli stati B e C un unico stato E, come indicato nella figura 1.5, ed ottenendo cosí un automa avente lo stesso funzionamento del precedente.

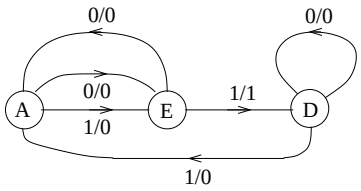

Figura 1.5: Automa 2

Raggruppando tra di loro tutti gli stati indistinguibili di un sistema, si giunge a costruire un sistema equivalente, detto in *forma minima*. Ad esempio l'automa di figura 1.5 é la versione in forma minima dell'automa di figura 1.4.

Il problema dell'indistinguibilitá degli stati é correlato al concetto di osservabilitá dello stato; infatti nel caso dell'automa di figura 1.4 non é possibile sapere se ci troviamo nello stato B o nello stato C; infatti analizzando l'uscita del sistema non é possibile capire in quale di questi due stati ci si trovi.

Diremo pertanto che un sistema é *osservabile* se noti i suoi ingressi e le sue uscite é possibile determinare, istante per istante, lo stato in cui esso si trova, a partire da un dato istante di tempo t.

1.3 Reversibilitá e completa osservabilitá

Come ulteriore esempio, possiamo costruire un modello da utilizzarsi per la previsione del numero di diplomati nel triennio di un Istituto Tecnico. Indichiamo con:

- $x_1(t)$ il numero totale di allievi frequentanti la classe terza nell'anno t
- $x_2(t)$ il numero totale di allievi frequentanti la classe quarta nell'anno t
- $x_2(t)$ il numero totale di allievi frequentanti la classe quinta nell'anno t

Ipotizziamo per semplicitá che nessun alunno abbandoni la scuola prima di averla terminata, che non esistano allievi provenienti da altre scuole ed indichiamo con

- k_1 la percentuale di non promossi alla classe quarta $(0 \leq k_1 \leq 1)$
- k_2 la percentuale di non promossi alla classe quinta $(0 \leq k_2 \leq 1)$
- k_1 la percentuale di non maturi $(0 \leq k_3 \leq 1)$

Supponiamo inoltre che i parametri k_1, k_2, k_3 restino costanti negli anni. Indichiamo inoltre con $u(t)$ il numero di alunni promossi dalla classe seconda (ingresso del sistema) nell'anno t e frequentanti la classe terza nell'anno $t+1$. Possiamo costruire un semplice modello del sistema, mediante le seguenti equazioni di stato:

$$x_1(t+1) = k_1 x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = k_2 x_2(t) + (1-k_1) x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = k_3 x_3(t) + (1-k_2) x_2(t)$$

Nella prima equazione, il numero di alunni frequentanti la classe terza nell'anno successivo dipende dal numero di respinti dell'anno precedente e dal numero di promossi dal biennio. Nella seconda equazione (ed analogamente nella terza), il numero di alunni che frequenteranno la classe quarta nell'anno $t+1$ dipende dal numero di respinti nel precedente anno $(k_2 x_2(t))$ e dal numero di promossi dalla terza alla quarta $((1-k_1)x_1(t))$. Per quanto riguarda l'equazione di uscita, se indichiamo con $y(t)$ il numero di diplomati, possiamo scrivere:

$$y(t) = (1-k_3) x_3(t)$$

Nota la distribuzione degli studenti nell'anno t, e noto anno per anno il numero di alunni $u(t)$ iscritti per la prima volta al triennio, é possibile avere una stima della popolazione studentesca negli anni $t+1, t+2, \ldots$.

Osserviamo infine che le equazioni possono essere usate anche per risolvere problemi piú complessi, ad esempio per il calcolo dei diplomati negli anni precedenti $\{y(t-1), y(t-2), \dots\}$, semplicemente conoscendo lo stato attuale $\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ ed il numero di iscritti $\{u(t-1), u(t-2), \dots\}$ negli anni passati. Infatti possiamo riscrivere l'equazione d'uscita, riferita all'anno $t-1$, come:

$$y(t-1) = (1-k_3)x_3(t-1)$$

e possiamo riscrivere anche le equazioni di stato relative alle previsioni dell'anno t:

$$x_1(t) = k_1 x_1(t-1) + u(t-1)$$
$$x_2(t) = k_2 x_2(t-1) + (1-k_1)x_1(t-1)$$
$$x_3(t) = k_3 x_3(t-1) + (1-k_2)x_2(t-1)$$

Noti infatti $x_1(t)$ ed $u(t-1)$ possiamo ricavare $x_1(t-1)$ dalla prima equazione di stato. A questo punto, dalla seconda equazione, possiamo ricavare $x_2(t-1)$ che puó essere utilizzato nella terza equazione di stato per ricavare $x_3(t-1)$; quest'ultimo dato puó essere utilizzato nell'equazione di uscita per ricavare $y(t-1)$.

La possibilitá di ricavare le uscite del sistema indietro nel tempo é detta proprietá di reversibilitá.

Notiamo che, oltre a poter determinare il numero di laureati negli anni passati, le equazioni permettono di determinare anche la popolazione studentesca x_1, x_2, x_3 indietro nel tempo.

La possibilitá di determinare gli stati passati del sistema é detta proprietá di completa osservabilitá.

Il sistema studiato é quindi sia reversibile che completamente osservabile.

1.4 Raggiungibilitá

Consideriamo la rete elettrica di figura 1.6, costituita da due condensatori identici $C_1 = C_2$, ed inizialmente scarichi $x_1(0) = V_1(0) = 0$, $x_2(0) = V_2(0) = 0$. Ci domandiamo se esiste un particolare ingresso $u(t) = V(t)$ tale che, dopo un certo tempo T, i due condensatori si trovino carici con tensioni

$$V_2(T) = 2 \cdot V_1(T) \tag{1.16}$$

ed eventualmente ci interessa anche conoscere l'intervallo di tempo T necessario a raggiungere tale condizione.

Da conoscenze di Elettrotecnica Generale, sappiamo che i due condensatori, essendo collegati in serie, avranno ai loro capi la stessa quantitá di carica

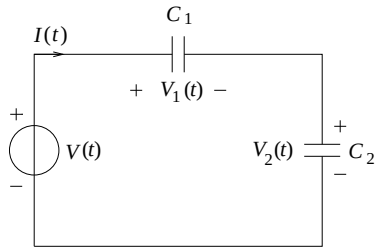

Figura 1.6: Studio della irraggiungibilitá di uno stato

Q, e quindi, essendo uguali tra loro, avranno ai loro capi la stessa tensione, in ogni istante.

Pertanto non esiste alcun ingresso che ci consenta di ottenere la relazione data dalla 1.16.

Diremo in questo caso che lo stato desiderato é irraggiungibile

Come ulteriore esempio, relativo ad un sistema a tempo discreto, consideriamo il diagramma degli stati relativo ad un automa a stati finiti, rappresentato in figura 1.7. Partendo dallo stato A ed applicando in ingres-

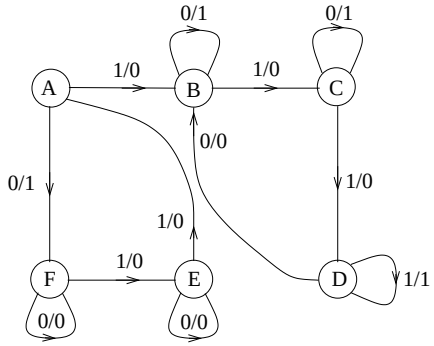

Figura 1.7: Raggiungibilitá ed irraggiungibilitá per un automa a stati finiti

so la sequenza 111 raggiungiamo lo stato D; da qui tuttavia é impossibile raggiungere lo stato E.

Passiamo ora ad esaminare un caso di raggiungibilitá dello stato per un sistema a tempo continuo. Consideriamo la rete di figura, 1.8 costituita da un generatore di tensione *continua* V (che costituisce l'ingresso del sistema), e da una rete RC serie. Siano:

$$C = 1 \text{ farad}$$

$$R = 1 \text{ ohm}$$

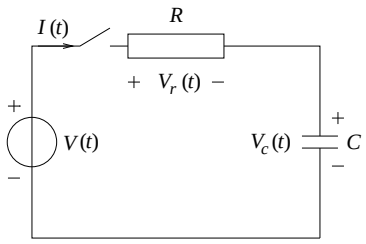

Figura 1.8: Circuito per lo studio della raggiungibilitá

Supponiamo che, prima della chiusura dell'interruttore, il condensatore sia scarico $V_c(0) = 0$. Ci chiediamo se esiste un particolare valore per l'ingresso V tale che, dopo un certo tempo T, il condensatore si trovi carico alla tensione $V_c = 1$ volt.

In questo caso la risposta é affermativa; inoltre ammette infinite soluzioni; basta applicare una tensione continua maggiore di 1 volt. Ad esempio, applicando una tensione $V = 2$ volt il condensatore si caricherá secondo la legge:

$$V_c(t) = V(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$$

sostituendovi tutte le grandezze note, si ottiene:

$$V_c(t) = 2 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-t})$$

Imponendo la condizione $V_c(T) = 1$ volt possiamo ricavare il tempo T necessario a raggiungere lo stato desiderato:

$$\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}$$

da cui

$$T = -\log(\frac{1}{2}) = \log(2)$$

1.5 Stabilitá ed instabilitá

I demografi sono interessati nel comportamento nel lungo periodo di una popolazione. Dall'osservazione delle condizioni ambientali, della disponibilitá di cibo, dallo standard igienico di un ambiente, ecc., é possibile creare dei modelli matematici per descrivere l'evoluzione della popolazione.

Un modello assai semplice é dato indicando con $y(t)$ la popolazione nell'anno t, ed assumendo che la popolazione nell'anno $t+1$ sia direttamente proporzionale alla popolazione presemte l'anno precedente, ovvero:

$$y(t+1) = ky(t)$$

ove k é la costante di proporzionalitá. Si ha allora

$$\begin{aligned} y(1) &= k \cdot y(0) \\ y(2) &= k \cdot y(1) = k^2 \cdot y(0) \\ &\dots \\ y(t) &= k \cdot y(t-1) = k^t \cdot y(0) \end{aligned} \tag{1.17}$$

L'andamento a lungo termine della popolazione é allora dipendente dal parametro k; per $0 \leq k < 1$ la popolazione é destinata all'estinzione (infatti $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$); per $k = 1$ essa rimane costante, mentre per $k > 1$ si ha $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

La convergenza ($0 \leq k \leq 1$) o la divergenza ($k > 1$) della popolazione sono rispettivamente legate ai concetti di *stabilitá* e di *instabilitá* del sistema.

1.6 Rappresentazione matriciale delle equazioni di stato e di uscita

Consideriamo le equazioni di stato e di uscita del modello preda–predatore del paragrafo 1.1.2, che riportiamo qui per una maggiore chiarezza:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 0,95x_1(t) + 0,12x_2(t) + 0,02u_1(t) \\ x_2(t+1) &= 0.98x_2(t) - 0,15x_1(t) + 0,16x_3(t) + 0,03u_1(t) + u_2(t) \\ x_3(t+1) &= 0,92x_3(t) - 0,21x_2(t) + 0,05u_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u_2(t) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Utilizzando la notazione matriciale[7], possiamo scrivere le equazioni in modo piú compatto. Per far ció conviene utilizzare le matrice *vettore di stato* $X(t)$:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

[7]Vedi Appendice A

la matrice *vettore di ingresso* $U(t)$:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

e la matrice *vettore di uscita* $Y(t)$, composta in questo caso da un solo elemento:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix}$$

Utilizzando la regola del prodotto tra matrici, le equazioni del sistema (a tempo discreto) in esame possono essere scritte come:

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t)$$

ove le matrici A, B, C, D sono univocamente determinate dai coefficienti dei termini $x_i(t), u_i(t)$ nelle equazioni 1.18:

$$A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,12 & 0 \\ -0,15 & 0,98 & 0,16 \\ 0 & -0,21 & 0,92 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0,03 & 1 \\ 0,05 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In generale, le equazioni di stato 1.7 e di uscita 1.8 di un sistema lineare a tempo discreto possono essere sempre scritte nella forma

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \tag{1.19}$$

con

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots\cdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots\dots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots\dots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pm} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pn} \end{bmatrix}$$

Le equazioni di stato 1.5 e di uscita 1.6 di un sistema lineare a tempo continuo possono essere anch'esse messe in forma matriciale, introducendo la matrice derivata[8] $\dot{X}(t)$ della matrice del vettore di stato $X(t)$:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots\dots \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix}$$

come:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) &= C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \end{aligned} \tag{1.20}$$

[8] ottenuta derivando rispetto al tempo i singoli elementi di $X(t)$

ove le matrici A, B, C, D hanno lo stesso significato di quelle utilizzate per la descrizione dei sistemi a tempo discreto.

Concludiamo il presente paragrafo osservando che un sistema lineare, a tempo continuo o discreto, puó essere descritto mediante la *quaterna di matrici* (A, B, C, D). Tale descrizione é nota come *descrizione interna di un sistema lineare*.

1.6.1 Esempio di descrizione interna di un sistema lineare a tempo continuo

Consideriamo la rete elettrica lineare rappresentata in figura 1.9; in essa compaiono due elementi reattivi capaci di immagazzinare energia e pertanto lo stato della rete é univocamente determinato dalla conoscenza

- della corrente che attraversa l'induttore; $x_1(t) = I_l(t)$
- della tensione ai capi del condensatore; $x_2(t) = V_c(t)$

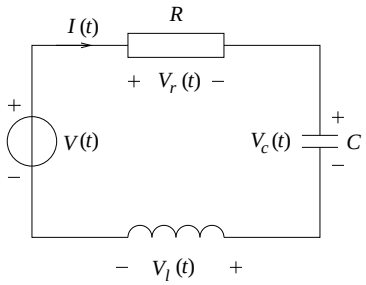

Figura 1.9: Rete per l'esempio di descrizione interna di un sistema a tempo continuo

Come uscite si considerino la tensione $y_1(t) = V_r(t)$ ai capi della resistenza e la tensione $y_2(t) = V_l(t)$ ai capi dell'induttore, e come ingresso si consideri la tensione del generatore $u(t) = V(t)$.

Scriviamo innanzitutto l'equazione di Kirkhoff alla maglia:

$$V(t) = V_r(t) + V_c(t) + V_l(t)$$

ed utilizzando la legge di Ohm e la relazione

$$\boxed{V_l = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L\dot{I}(t)} \tag{1.21}$$

otteniamo:

$$V(t) = RI(t) + V_c(t) + L\dot{I}(t)$$

da cui possiamo ricavare la prima equazione di stato:

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} \cdot I(t) - \frac{1}{L}V_c(t) + \frac{1}{L} \cdot V(t)$$

ovvero:

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L} \cdot x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L} \cdot u(t)} \tag{1.22}$$

La corrente che attraversa il condensatore é data dalla relazione seguente:

$$I(t) = C\dot{V}_c(t)$$

dalla quale possiamo ricavare la seconda equazione di stato:

$$\dot{V}_c(t) = \frac{1}{C} \cdot I(t)$$

ovvero:

$$\boxed{\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} \cdot x_1(t)} \tag{1.23}$$

Le equazioni 1.22 e 1.23 possono essere messe in forma matriciale ($\dot{X} = A \cdot X + BU$) introducendo i vettori di stato e di ingresso:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

e con

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esprimiamo ora le uscite in funzione dello stato e dell'ingresso; si ha innanzitutto:

$$V_r(t) = RI(t)$$

ovvero:

$$\boxed{y_1(t) = Rx_1(t)} \tag{1.24}$$

nonché:

$$V_l(t) = V(t) - RI(t) - V_c(t)$$

ovvero:

$$\boxed{y_2(t) = -Rx_1(t) - x_2(t) + u(t)} \tag{1.25}$$

Introducendo il vettore di uscita

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

é allora possibile scrivere le equazioni di uscita 1.24 e 1.25 in forma matriciale ($Y = C \cdot X + D \cdot U$), con

$$C = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.7 Descrizione esterna di un sistema lineare

Passiamo ora ad una metodologia che ci consenta di descrivere un sistema lineare *in funzione delle sole variabili di ingresso e di uscita*, eliminando cioé l'utilizzo delle variabili di stato. Questa descrizione, interessando esclusivamente le variabili osservabile dall'esterno del sistema, é detta descrizione esterna.

Definizione 1.2 *Dato un sistema lineare a tempo continuo con un solo ingresso ed una sola uscita, la sua descrizione esterna é data da una equazione differenziale del tipo:*

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + h_n y(t) = k_0 u^{(n)}(t) + k_1 u^{(n-1)}(t) + k_n u(t) \tag{1.26}$$

ove $y^{(i)}(t)$ indica la derivata i–esima dell'uscita $y(t)$ rispetto al tempo, ed $u^{(i)}(t)$ la derivata i–esima dell'ingresso rispetto a t, con $k_i, h_i \in \mathbb{R}$

Nel caso in cui il sistema é a tempo discreto, la sua descrizione esterna é data da una equazione del tipo:

$$y(t) + h_1 y(t-1) + \cdots + h_n y(t-n) = k_0 u(t) + k_1 u(t-1) + \cdots + k_n u(t-n) \tag{1.27}$$

Nel caso discreto, ció equivale a dire che l'uscita $y(t)$ all'istante t dipende da una combinazione lineare delle ultime n uscite e degli ultimi n ingressi. Poiché la prima combinazione rappresenta, nel linguaggio utilizzato dalla

Statistica Matematica, una *autoregressione*, e la seconda combinazione rappresenta una *media mobile*, la descrizione esterna di un sistema a tempo discreto é anche nota come modello $ARMA$[9], o *modello autoregressivo a medie mobili*[10]. Sia nel caso a tempo continuo che in quello a tempo discreto, il numero n é detto *ordine del modello*.

1.7.1 Esempio di descrizione esterna di un sistema lineare

Consideriamo la rete elettrica rappresentata in figura 1.10; sia $u(t) = V(t)$ il suo ingresso, mentre come uscita prendiamo la tensione ai capi del condensatore $y(t) = V_u(t)$.

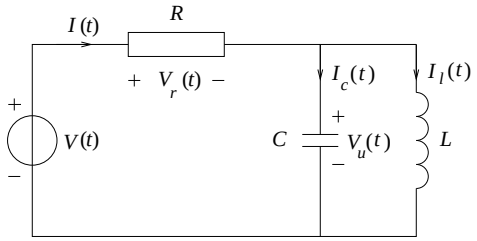

Figura 1.10: Circuito per l'esempio di una descrizione esterna di un sistema lineare a tempo continuo

Determiniamo innanzitutto la tensione di uscita in funzione della tensione di ingresso e della corrente $I(t)$ scrivendo l'equazione di Kirkhoff per le tensioni:

$$V_u(t) = V(t) - RI(t) \tag{1.28}$$

La corrente $I(t)$ puó essere determinata mediante l'equazione di Kirkhoff per le correnti:

$$I(t) = I_l(t) + I_c(t) = I_l(t) + C\dot{V}_u(t) \tag{1.29}$$

Sostituendo la $I(t)$ data dalla 1.29 nella 1.28 otteniamo:

$$V_u(t) = V(t) - RI_l(t) - RC\dot{V}_u(T) \tag{1.30}$$

[9]dall'Inglese: Auto–Regressive Moving Average

[10]Con abuso di linguaggio, in alcuni testi di Teoria dei Sistemi, anche il modello a tempo continuo é erroneamente detto di tipo ARMA.

Da questa equazione dobbiamo eliminare la variabile di stato $I_l(t)$; per far ció utilizziamo la relazione:

$$V_u(t) = L\dot{I}_l(t)$$

da cui possiamo ricavare la *derivata prima* della $I(t)$ rispetto al tempo:

$$\dot{I}_l(t) = \frac{V_u(t)}{L} \tag{1.31}$$

Tuttavia non possiamo utilizzare $\dot{I}_l$ per eliminare la I_l dalla 1.30; ricorriamo pertanto all'artificio di derivare ancora una volta primo e secondo membro della 1.30, ottenendo:

$$\dot{V}_u(t) = \dot{V}(t) - R\dot{I}_l(t) - RC\ddot{V}_u(t) \tag{1.32}$$

ove i due puntini sopra la funzione $V_u(t)$ indicano la derivata seconda[11] della funzione stessa. Sostituendo ora la 1.31 nella 1.32 otteniamo:

$$\dot{V}_u(t) = \dot{V}(t) - \frac{R}{L}V_u(t) - RC\ddot{V}_u(t) \tag{1.33}$$

da cui otteniamo:

$$\ddot{V}_u(t) + \frac{1}{RC}\dot{V}_u(t) + \frac{1}{LC}V_u(t) = \frac{1}{RC}\dot{V}(t)$$

ricordando che $u(t) = V(t)$ e che $y(t) = V_u(t)$ otteniamo infine l'equazione che descrive esternamente il sistema in esame:

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \frac{1}{RC}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{RC}\dot{u}(t)} \tag{1.34}$$

1.8 Esempio di descrizione ARMA di un sistema lineare

1.8.1 Previsioni delle piene di un fiume

Consideriamo la figura 1.11, in cui viene schematicamente rappresentato un fiume e due stazioni di misura della portata d'acqua A e B. Consideriamo trascurabile la portata d'acqua degli affluenti.

[11] cioé la derivata rispetto al tempo di $\dot{V}_u(t)$.

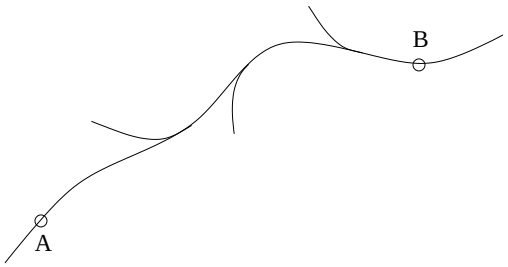

Figura 1.11: Tratto di fiume tra le due stazioni A e B

Si desidera creare un modello matematico in grado di stimare la portata d'acqua[12] nel punto B nell'ora t in funzione delle osservazioni effettuate nelle stazioni A e B nelle ore precedenti. Indichiamo a tal proposito con $y(t)$ la portata d'acqua nel punto B[13], e con $u(t)$ la portata d'acqua nel punto A[14]. Un primo modello, assai rudimentale, nasce facendo l'ipotesi che l'acqua impieghi ad esempio 3 ore per percorrere il tratto AB; in questo caso la portata $y(t)$ dipende esclusivamente dall'apporto d'acqua nel punto A tre ore prima, ovvero:

$$y(t) = u(t-3)$$

Questo puó essere considerato un modello a medie mobili[15] di ordine tre. Questo modello é tuttavia assai rudimentale, e puó essere migliorato tenendo conto della *dispersione dell'acqua*, ovvero del fatto che una frazione α_1 di acqua raggiungerá il punto B in un'ora, una frazione α_2 impiegherá due ore, e una frazione α_3 impiegherá tre ore[16]. Ovviamente, i parametri α_i dovranno soddisfare la condizione

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3$$

e trascurando l'apporto degli affluenti, dovrá aversi:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Possiamo pertanto utilizzare il seguente modello MA, sempre di ordine 3, che tenga conto della dispersione:

$$y(t) = \alpha_1 u(t-1) + \alpha_2 u(t-2) + \alpha_3 u(t-3) \tag{1.35}$$

[12] ad esempio misurata in $\frac{m^3}{h}$

[13] considerata quindi come variabile di uscita

[14] considerata quindi come variabile di ingresso

[15] o modello MA

[16] La determinazione dei parametri α_i viene normalmente effettuata per via sperimentale utilizzando dei coloranti, tecnicamente chiamati *traccianti*, da aggiungere all'acqua.

In caso di mancata disponibilitá delle misurazioni relative al punto A, dobbiamo disporre di un modello matematico capace di prevedere la portata d'acqua nel punto B esclusivamente in funzione delle osservazioni effettuare nel punto B stesso; ad esempio potremmo supporre che la differenza tra le portate d'acqua relative agli istanti t e $t-1$ sia la stessa che si ottiene tra le portate relative agli istanti $t-1$ e $t-2$. Possiamo allora scrivere:

$$y(t) - y(t-1) = y(t-1) - y(t-2)$$

da cui otteniamo il seguente modello autoregressivo[17] di ordine 2:

$$y(t) = 2y(t-1) - y(t-2) \tag{1.36}$$

Questo modello é noto come *estrapolazione lineare dei dati*; una interpretazione grafica é data dalla figura 1.12 ove si nota che il punto di coordinate $F = (t, y(t))$ viene ottenuto prolungando il segmento di retta congiungente i punti $D = (t-2, y(t-2))$ e $E = (t-1, y(t-1))$. Dal modello MA 1.35 e

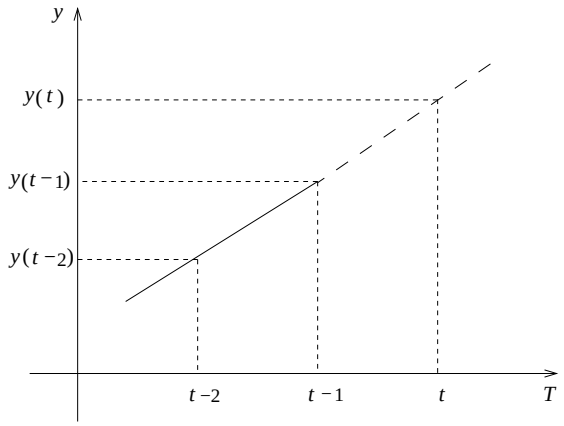

Figura 1.12: Estrapolazione lineare dei dati

dal modello AR 1.36 possiamo ricavare un modello che tenga conto sia delle osservazioni e delle misurazioni effettuate in A, che di quelle effettuate nel solo punto B. Noto il peso k[18] dato dal sistemista al modello MA, e noto di conseguenza $1-k$ il peso dato al modello AR, possiamo esprimere $y(t)$ con un modello ARMA di ordine tre dato dalla seguente equazione:

$$y(t) = k\alpha_1 u(t-1) + k\alpha_2 u(t-2) + k\alpha_3 u(t-3) + 2(1-k)y(t-1) - (1-k)y(t-2) \tag{1.37}$$

Se il sistemista ritiene entrambi i modelli ugualmente affidabili, puó assegnare a k il valore 0,5; in caso contrario assegnerá a k un valore tanto piú

[17] o modello AR

[18] ovviamente $0 \leq k \leq 1$

prossimo ad uno tanto piú riterrá opportuno privilegiare la descrizione a medie mobili su quella autoregressiva.

1.9 Descrizione esterna di un sistema a tempo continuo e funzione di trasferimento

Riprendiamo l'equazione esterna relativa ad un generico sistema lineare a tempo continuo:

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + h_n y(t) = k_0 u^{(n)}(t) + k_1 u^{(n-1)}(t) + k_n u(t) \quad (1.38)$$

ed introduciamo l'*operatore di derivazione*[19] s definito come segue: *l'applicazione dell'operatore s ad una funzione corrisponde all'operazione di derivazione della funzione stessa rispetto al tempo*[20].

Supponendo che il sistema si trovi inizialmente nello *stato nullo*[21], cioé tale che tutte le variabili di stato siano nulle per $t = 0$, scriveremo sy al posto di $\dot{y}$, $s^2 y$ al posto di $\ddot{y}$, $s^n y$ al posto di $y^{(n)}$ e cosí via[22].

Ad esempio, l'equazione 1.38 puó essere scritta come:

$$s^n y + h_1 s^{n-1} y + \cdots + h_n y = k_0 s^n u + k_1 s^{n-1} u + \cdots + k_n u \quad (1.39)$$

Raccogliendo a primo membro il termine comune y, e raccogliendo a secondo membro il termine comune u, possiamo scrivere:

$$D(s) \cdot y = N(s) \cdot u \quad (1.40)$$

ove $D(s)$ ed $N(s)$ sono due polinomi[23] in s:

$$D(s) = s^n + h_1 s^{n-1} + h_2 s^{n-2} + \cdots + h_n \quad (1.41)$$

$$N(s) = k_0 s^n + k_1 s^{n-1} + k_2 s^{n-2} + \cdots + k_n \quad (1.42)$$

Introduciamo ora la seguente, ed importantissima

[19] Il significato esatto di questo operatore verrá illustrato nei capitoli riguardanti la trasformata di Laplace e le sue proprietá

[20] Analogamente, introdurremo in seguito *l'operatore di integrazione* $\frac{1}{s}$, reciproco dell'operatore di derivazione.

[21] il caso di stato non nullo è trattato nelle appendici sulla trasformata di Laplace

[22] Quanto utilizzeremo l'operatore s non indicheremo *mai* la dipendenza della funzione dal tempo, ovvero non scriveremo mai termini del tipo $s^n y(t)$.

[23] Il grado di D(s) é sempre uguale all'ordine n del sistema, mentre il grado di $N(s)$ é sempre minore o uguale ad n.

Definizione 1.3 *La funzione di trasferimento di un sistema lineare é il rapporto*

$$\boxed{G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}} \tag{1.43}$$

Come vedremo in seguito, l'importanza della *funzione di trasferimento* risiede nel fatto che dalla conoscenza dei polinomi $N(s)$ e $D(s)$ é possibile conoscere l'evoluzione del segnale di uscita del sistema in funzione del segnale di ingresso. In alcuni casi, puó capitare che i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ non siano primi tra loro[24]. In questo caso si ha $N(s) = n(s)a(s)$ e $D(s) = d(s)a(s)$, e la funzione di trasferimento $G(s)$ risulta essere il rapporto di due polinomi *coprimi*[25]:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n(s)a(s)}{d(s)a(s)} = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Effettuata questa eventuale semplificazione[26], occorre notare che gli zeri[27] dei polinomi $n(s)$ e $d(s)$ rivestono un ruolo molto importante nella determinazione della relazione tra ingresso ed uscita di un sistema. A tal scopo, introduciamo la seguente

Definizione 1.4 *Le radici, reali o complesse, del polinomio $n(s)$ sono dette zeri della funzione di trasferimento $G(s)$.*

Le radice, reali o complesse, del polinomio $d(s)$ sono dette poli della funzione di trasferimento $G(s)$.

Come esempio, riprendiamo l'equazione esterna della rete di figura 1.10:

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \frac{1}{RC}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{RC}\dot{u}(t)} \tag{1.44}$$

e riscriviamola utilizzando l'operatore s;

$$s^2 y + \frac{1}{RC}sy + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{RC}su$$

Raccogliendo i termini noti, otteniamo:

$$(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC})y = \frac{1}{RC}su$$

[24]ovvero abbiano delle radici, reali o complesse, in comune

[25]ovvero primi tra loro, cioé privi di radici comuni

[26]se $N(s)$ e $D(s)$ sono coprimi, risulta ovviamente $a(s) = 1$, da cui $N(s) = n(s)$ e $D(s) = d(s)$.

[27]cioé le radici

da cui:

$$D(s) = s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$$

$$N(s) = \frac{1}{RC}s$$

La funzione di trasferimento é allora la seguente:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

moltiplicando numeratore e denominatore per RLC, otteniamo:

$$G(s) = \frac{s \cdot L}{RLC \cdot s^2 + L \cdot s + R}$$

Gli *zeri* della funzione di trasferimento si ottengono ponendo a zero il numeratore di $G(s)$:

$$s \cdot L = 0$$

da cui otteniamo la soluzione

$$s = 0$$

I poli della f.d.t. $G(s)$ si ottengono ponendo a zero il suo denominatore, ovvero:

$$RLC \cdot s^2 + L \cdot s + R = 0$$

da cui si ottengono due soluzioni:

$$s = \frac{-L - \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}$$

$$s = \frac{-L + \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}$$

Il sistema in esame presenta dunque due poli ed uno zero. Siano ad esempio:

$$R = 2\,\text{ohm}, \quad C = 1\,\text{F} \quad L = 1\,\text{H}$$

Allora la f.d.t. é:

$$G(s) = \frac{s}{2 \cdot s^2 + s + 2}$$

e si ha uno zero per

$$s = 0$$

e due poli per

$$s = \frac{-1 - \text{i} \cdot \sqrt{15}}{4}$$

$$s = \frac{-1 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{15}}{4}$$

I poli e gli zeri di una funzione di trasferimento possono essere reali o complessi e coniugati, e si presentano pertanto nella forma generale

$$s = \alpha + \mathrm{i} \cdot \omega$$

Poli e zeri vengono di solito rappresentati nel piano complesso, in cui l'ascissa α rappresenta la parte reale della variabile complessa s, ed in cui l'ordinata ω ne rappresenta invece la parte immaginaria.

I *poli* vengono rappresentati con delle *crocette*, mentre gli zeri con dei *circoletti*. In figura 1.13 sono rappresentati poli e zeri dell'esempio appena trattato.

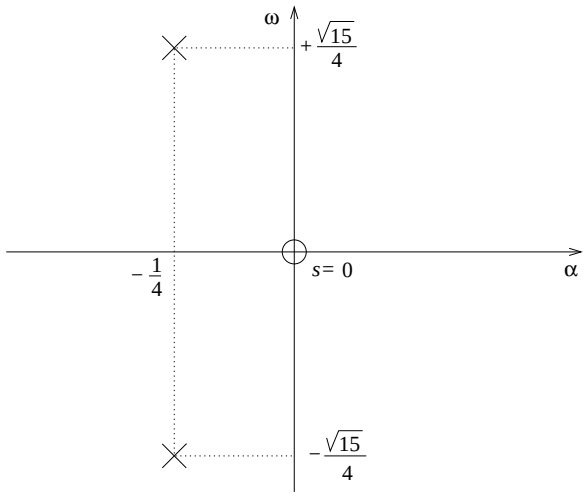

Figura 1.13: Rappresentazione di poli e zeri nel piano complesso

1.10 Modello ARMA e funzione di trasferimento

Consideriamo ora la descrizione esterna di un sistema a tempo discreto; nel capitolo 1.7 abbiamo ottenuto la seguente equazione:

$$y(t) + h_1 y(t-1) + \cdots + h_n y(t-n) = k_0 u(t) + k_1 u(t-1) + \cdots + k_n u(t-n) \quad (1.45)$$

Analogamente al caso a tempo continuo, possiamo anche in questo caso introdurre il concetto di *funzione di trasferimento*; a tal scopo introduciamo innanzitutto l'operatore z di anticipazione[28] nel tempo di una funzione $f(t)$, ovvero l'operatore definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} z \cdot f(t) &= f(t+1) \\ z^2 \cdot f(t) &= f(t+2) \\ &\dots \\ z^n \cdot f(t) &= f(t+n) \end{aligned} \tag{1.46}$$

Nel seguito, eviteremo *sempre* di indicare la variabile t, come nel caso a tempo continuo[29].

Per poter utilizzare correttamente l'operatore z, conviene riscrivere l'equazione 1.45 effettuando la sostituzione

$$T = t - n$$

da cui si ottiene $t = T + n$, e quindi:

$$y(T+n) + h_1 y(T+n-1) + \cdots + h_n y(T) = k_0 u(T+n) + k_1 u(T+n-1) + \cdots + k_n u(T) \tag{1.47}$$

Utilizzando l'operatore di anticipazione z, otteniamo allora:

$$z^n \cdot y + h_1 z^{n-1} \cdot y + \cdots + h_n z^n \cdot y = k_0 z^n \cdot u + k_1 \cdot z^{n-1} u + \cdots + k_n u \tag{1.48}$$

Raccogliendo i termini y ed u arriviamo ad una equazione del tipo:

$$D(z)y = N(z)u \tag{1.49}$$

ove $D(z)$ ed $N(z)$ possono essere considerati come polinomi in z:

$$D(z) = z^n + h_1 \cdot z^{n-1} + \cdots + h_n$$

$$N(z) = k_0 \cdot z^n + k_1 \cdot z^{n-1} + \cdots + k_n$$

A questo punto, possiamo definire la *funzione di trasferimento per un sistema lineare a tempo discreto* $G(z)$ come il rapporto tra i due polinomi:

$$\boxed{G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}} \tag{1.50}$$

[28] Introdurremo analogamente l'operatore di ritardo $\frac{1}{z}$ definito dalla relazione $\frac{1}{z} \cdot f(t) = f(t-1)$.

[29] Il significato preciso dell'operatore z verrá definito quando parleremo della *trasformata zeta* e delle sue proprietá

Come nel caso a tempo continuo, se i due polinomi non sono coprimi, si ha $N(z) = n(z)a(z)$ e $D(z) = d(z)a(z)$[30], da cui segue

$$G(z) = \frac{n(z)}{d(z)} \tag{1.51}$$

Le radici[31] del polinomio $n(z)$ sono ancora dette *zeri* della f.d.t. , cosí come le radici di $d(z)$ sono dette i *poli* della funzione di trasferimento.

Come esempio, consideriamo l'equazione del modello ARMA utilizzato per le previsioni delle piene di un fiume, analizzata nel paragrafo 1.8.1:

$$y(t) = k\alpha_1 u(t-1) + k\alpha_2 u(t-2) + k\alpha_3 u(t-3) + 2(1-k)y(t-1) - (1-k)y(t-2) \tag{1.52}$$

Siano, ad esempio:

$$k = 0,5 \quad \alpha_1 = 0,5 \quad \alpha_2 = 0,3 \quad \alpha_3 = 0,2$$

si ha allora:

$$y(t) = 0,25 \cdot u(t-1) + 0,15 \cdot u(t-2) + 0,1 \cdot u(t-3) + y(t-1) - 0,5 \cdot y(t-2)$$

L'ordine del sistema é $n = 3$, e di conseguenza effettuiamo la sostituzione

$$T = t - 3$$

e portando a primo membro tutti i termini contenenti la y, otteniamo:

$$y(T+3) - y(T+2) + 0,5 \cdot y(T+1) = 0,25 \cdot u(T+2) + 0,15 \cdot u(T+1) + 0,1 \cdot u(T)$$

Applicando l'operatore z, otteniamo allora:

$$(z^3 - z^2 + 0,5 \cdot z) \cdot y = (0,25 \cdot z^2 + 0,15 \cdot z + 0,1) \cdot u$$

Si ha allora:

$$D(s) = z^3 - z^2 + 0,5 \cdot z$$

$$N(s) = 0,25 \cdot z^2 + 0,15 \cdot z + 0,1$$

la funzione di trasferimento del sistema é allora:

$$G(s) = \frac{0,25 \cdot z^2 + 0,15 \cdot z + 0,1}{z^3 - z^2 + 0,5 \cdot z}$$

[30]ed ovviamente se lo sono, si ha $a(z) = 1$, da cui $N(z) = n(z)$ e $D(z) = d(z)$

[31]reali o complesse coniugate

I *poli* possono essere ricavati eguagliandone a zero il denominatore:

$$z^3 - z^2 + 0,5 \cdot z = 0$$

che ammette la soluzione $z = 0$, oltre alle soluzioni ricavabili dall'equazione di secondo grado:

$$z^2 - z + 0,5 = 0$$

che sono

$$z = 0,5 - 0,5 \cdot \mathrm{i}$$

e

$$z = 0,5 + 0,5 \cdot \mathrm{i}$$

Gli zeri della f.d.t. vengono ricavati dall'equazione

$$0,25 \cdot z^2 + 0,15 \cdot z + 0,1 = 0$$

che ammette le radici

$$z = \frac{-3 - \mathrm{i} \cdot \sqrt{31}}{10} \approx 0,3 - \mathrm{i} \cdot 0,556\ldots$$

e

$$z = \frac{-3 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{31}}{10} \approx 0,3 + \mathrm{i} \cdot 0,556\ldots$$

Poli e zeri sono rappresentati in figura 1.14, in cui la variabile complessa $z = \alpha + \mathrm{i} \cdot \omega$ viene rappresentata nel piano di Gauss.

1.11 Relazione tra descrizione esterna ed interna

1.11.1 Passaggio dalla descrizione interna alla descrizione esterna

Consideriamo un sistema lineare a tempo continuo descrivibile per mezzo di una sola variabile di ingresso $u(t)$, una sola variabile di stato $x(t)$ ed una sola variabile di uscita[32] $y(t)$; la sua descrizione interna é allora data dalle equazioni:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t) \tag{1.53}$$

$$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \tag{1.54}$$

[32]Il caso di sistemi costituiti da un solo ingresso, una sola uscita, ma descritti da piú di una variabile di stato sará considerato successivamente.

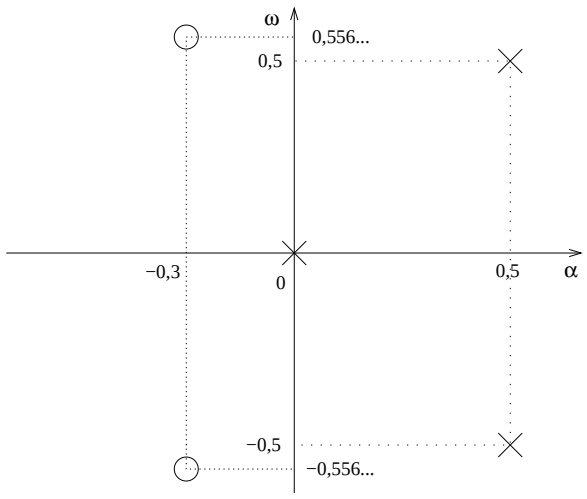

Figura 1.14: Poli e zeri nel piano complesso per il modello ARMA di previsione delle piene del fiume

Per passare alla descrizione esterna del sistema, deriviamo la 1.54 rispetto al tempo, ottenendo:

$$\dot{y}(t) = c \cdot \dot{x}(t) + d \cdot \dot{u}(t)$$

Utilizzando la 1.53, eliminiamo $\dot{x}(t)$ dall'ultima equazione, ottenendo:

$$\dot{y}(t) = c \cdot [a \cdot x(t) + b \cdot u(t)] + d \cdot \dot{u}(t)$$

ovvero:

$$\dot{y}(t) = ac \cdot x(t) + bc \cdot u(t) + d \cdot \dot{u}(t) \tag{1.55}$$

L'ultimo passo consiste nel ricavare $x(t)$ dalla 1.54:

$$x(t) = c^{-1} \cdot y(t) - c^{-1} d \cdot u(t)$$

e sostituirlo nella 1.55:

$$\dot{y}(t) = a \cdot y(t) - ad \cdot u(t) + bc \cdot u(t) + d \cdot \dot{u}(t)$$

riordinando i termini, otteniamo l'equazione che fornisce la descrizione esterna del sistema:

$$\boxed{\dot{y}(t) - a \cdot y(t) = d \cdot \dot{u}(t) + (bc - ad) \cdot u(t)} \tag{1.56}$$

Passiamo ora a considerare un sistema a tempo discreto, sempre costituito da un solo ingresso, una sola uscita, e descrivibile per mezzo di una sola variabile di stato; la sua descrizione interna é la seguente:

$$x(t+1) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t) \tag{1.57}$$

$$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \tag{1.58}$$

La 1.58 puó essere scritta come:

$$y(t+1) = c \cdot x(t+1) + d \cdot u(t+1) \tag{1.59}$$

Utilizzando la 1.57, eliminiamo dalla 1.59 il termine $x(t+1)$:

$$y(t+1) = ac \cdot x(t) + bc \cdot u(t) + d \cdot u(t+1) \tag{1.60}$$

Ricaviamo ora $x(t)$ dalla 1.58:

$$x(t) = c^{-1} \cdot y(t) - c^{-1}d \cdot u(t)$$

e sostituiamolo nella 1.60:

$$y(t+1) = a \cdot y(t) - ad \cdot u(t) + bc \cdot u(t) + d \cdot u(t+1)$$

Riordinando i termini, ed effettuando la sostituzione $T = t + 1$ si ottiene l'equazione che descrive esternamente il sistema:

$$\boxed{y(T) - a \cdot y(T-1) = d \cdot u(T) + (bc - ad) \cdot u(T-1)} \tag{1.61}$$

1.11.2 Caso generale con piú di una variabile di stato

Questo paragrafo puó essere considerato come un approfondimento, e puó essere tralasciato in una prima lettura del testo.

Consideriamo innanzitutto un sistema a tempo continuo, con un solo ingresso ed una sola uscita, rappresentato in forma matriciale dalle equazioni:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \tag{1.62}$$

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \tag{1.63}$$

con

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \big[y(t)\big]$$
$$U(t) = \big[u(t)\big]$$

Ricordando il significato dell'operatore s di derivazione ($s \cdot x_i = \dot{x}_i$, ed indicando con $s \cdot X$ la matrice $\dot{X}$, possiamo scrivere la 1.62 come:

$$s \cdot X = A \cdot X + B \cdot U \tag{1.64}$$

e lasciare invariata l'equazione di uscita:

$$Y = C \cdot X + D \cdot U \tag{1.65}$$

Introducendo la matrice unitá I, e ricordando che $I \cdot X = X$, possiamo riscrivere la 1.64 come:

$$s \cdot I \cdot X = A \cdot X + B \cdot U$$

ovvero:

$$(s \cdot I - A) \cdot X = B \cdot U$$

Consideriamo la matrice $M = s \cdot I - A$; possiamo allora scrivere:

$$M \cdot X = B \cdot U$$

e moltiplicare ambo i membri per la matrice inversa di M, otteniamo:

$$M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot B \cdot U$$

da cui, ricordando che $M^{-1} \cdot M = I$, si ottiene:

$$X = M^{-1} \cdot BU$$

sostituendo quest'ultima espressione nella 1.65 otteniamo:

$$Y = C \cdot M^{-1}B \cdot U + D \cdot U$$

ovvero:

$$\boxed{Y = [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B - D] \cdot U} \tag{1.66}$$

Questa espressione esprime il legame tra l'uscita Y e l'ingresso U in termini dell'operatore s di derivazione; da essa é inoltre possibile risalire alla funzione di trasferimento del sistema $G(s) = \frac{Y}{U}$:

$$\boxed{G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B - D} \tag{1.67}$$

Se si considera un sistema a tempo discreto, le cui equazioni di stato e di uscita sono ancora espresse in forma matriciale come:

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t)$$

e si introduce l'operatore di anticipazione z si puó procedere in modo analogo, ottenento:

$$\boxed{Y = [C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B - D] \cdot U} \tag{1.68}$$

che esprime il legame desiderato tra ingresso e uscita del sistema. La funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y}{U}$ é in questo caso la seguente:

$$\boxed{G(z) = C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B - D} \tag{1.69}$$

La verifica é lasciata come esercizio al lettore.

1.12 Realizzazione

Per *realizzazione* intendiamo il passaggio dalla descrizione esterna alla descrizione interna. Mentre il passaggio inverso non crea in genere alcun problema, il passaggio alla descrizione interna risulta in genere piú difficoltoso, essendo legato, come vedremo, ai concetti di raggiungibilitá ed osservabilitá, e non é, in generale univoco.

Per rendersi conto della non univocitá, possiamo pensare al fatto che nella scelta delle variabili di stato esiste una certa arbitrarietá; ad esempio in una rete elettrica contenente un condensatore, é possibile prendere come variabile di stato sia la tensione ai suoi capi che la carica elettrica[33].

Inoltre, se consideriamo la rete elettrica di figura 1.15, possiamo renderci conto che come variabili di stato possiamo prendere ad esempio sia le tensioni $x_1 = V_1$ ed $x_2 = V_2$, oppure la tensione $\tilde{x}_1 = V_1 + V_2$ e la tensione $\tilde{x}_2 = V_2$; infatti note le variabili di stato $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ risultano univocamente determinate anche x_1 ed x_2.

[33]Per completezza, occorre osservare che l'arbitrarietá della scelta delle variabili di stato é solo una causa della non univocitá della descrizione interna di un sistema lineare. La non univocitá della descrizione é tuttavia dovuta al teorema fondamentale della decomposizione canonica di un sistema lineare in quattro sottosistemi, ciascuno dei quali ha caratteristiche particolari, e tale che uno solo di essi identifica in modo univoco i polinomi coprimi $n(p)$ e $d(p)$, con $p = s$ per sistemi a tempo continuo e $p = z$ per sistemi a tempo discreto. Tale trattazione é di solito riservata ai corsi universitari di Teoria dei Sistemi.

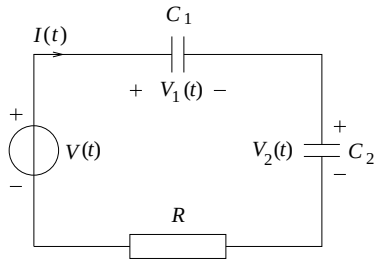

Figura 1.15: Scelta delle variabili di stato in una rete lineare

Piú in generale, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono variabili di stato di un sistema lineare, lo é anche una qualsiasi loro combinazione lineare

$$\tilde{x} = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n$$

Nel presente capitolo, forniremo dunque le tecniche per passare dalla descrizione esterna di un sistema lineare alla sua descrizione interna; si tratta in pratica di partire dall'equazione

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + h_n y(t) = k_0 u^{(n)}(t) + k_1 u^{(n-1)}(t) + k_n u(t) \quad (1.70)$$

per sistemi a tempo continuo, o dall'equazione

$$y(t) + h_1 y(t-1) + \cdots + h_n y(t-n) = k_0 u(t) + k_1 u(t-1) + \cdots + k_n u(t-n) \quad (1.71)$$

per sistemi a tempo discreto, e di ottenere una quaterna di matrici A, B, C , D che permettono la descrizione interna del sistema lineare.

Possiamo dunque passare alla seguente

Definizione 1.5 *Per realizzazione di un sistema lineare si intende la determinazione, in genere non univoca, di una quaterna di matrici A, B, C, D che costituiscono la descrizione interna del sistema stesso, partendo dall'equazione 1.70 per sistemi a tempo continuo, o dall'equazione 1.71 per sistemi a tempo discreto.*

Esamineremo tre possibili realizzazioni, descritte nei prossimi paragrafi.

1.12.1 Realizzazione in forma canonica di controllo

Supponiamo di conoscere l'equazione esterna di un sistema lineare di ordine n, e di voler passare ad una descrizione interna. Ci occorrono tante variabili di stato quanti sono gli stati, e pertanto ci servono n variabili di stato $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

Il seguente Teorema ci fornisce una possibile realizzazione di un sistema lineare, detta *forma canonica di controllo* determinando di conseguenza anche la scelta delle variabili di stato.

Teorema 1.1 *Sia dato un sistema lineare di ordine n, descritto da una equazione esterna del tipo*

$$y(t) + h_1 y(t-1) + \cdots + h_n y(t-n) = k_0 u(t) + k_1 u(t-1) + \cdots + k_n u(t-n) \quad (1.72)$$

se esso é a tempo discreto, oppure da una equazione esterna del tipo:

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + h_n y(t) = k_0 u^{(n)}(t) + k_1 u^{(n-1)}(t) + k_n u(t) \quad (1.73)$$

se esso é a tempo continuo. Per semplicitá[34]*, supponiamo nullo il coefficiente* k_0*, ovvero:*

$$\boxed{k_0 = 0} \quad (1.74)$$

Allora il sistema descritto dalla quaterna di matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -h_n & -h_{n-1} & -h_{n-2} & \ldots & -h_2 & -h_1 \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

$$C = \begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & k_{n-2} & \ldots & k_2 & k_1 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

costituisce una realizzazione del sistema in forma canonica di controllo.

[34] il caso generale verrá analizzato nel prossimo paragrafo

Osserviamo che, se il sistema é a tempo continuo, le matrici A, B, C, D permettono di scrivere le equazioni di stato e di uscita come:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t)$$

mentre se esso é a tempo discreto, le equazioni sono:

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t)$$

ove

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \big[y(t)\big]$$

$$U(t) = \big[u(t)\big]$$

Il teorema 1.1 puó essere dimostrato scrivendo la relazione $Y = CX + DU$ sotto forma di una equazione[35], e sostituendovi i valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ricavabili dalle equazioni di stato[36]. Si ritrova cosí l'equazione esterna del sistema.

Come esercizio, determiniamo le matrici A, B, C, D per l'equazione esterna relativa al modello di previsione delle piene del fiume, trattata nel paragrafo 1.8.1

$$y(t) = k\alpha_1 u(t-1) + k\alpha_2 u(t-2) + k\alpha_3 u(t-3) + 2(1-k)y(t-1) - (1-k)y(t-2) \quad (1.79)$$

Supponiamo di ritenere egualmente validi i modelli AR ed MA, e scegliamo di conseguenza un peso $k = 0,5$. Per tener conto della dispersione dell'acqua, scegliamo inoltre i valori

$$\alpha_1 = \frac{5}{10}$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{10}$$

[35] ovvero

$$y(t) = k_n x_1 + k_{n_1} x_2 + \cdots + k_0 u$$

[36] Ovvero $\dot{X} = AX + BU$ per sistemi a tempo continuo e $X(t+1) = AX(t) + BU(t)$ per quelli a tempo discreto

$$\alpha_3 = \frac{2}{10}$$

L'equazione diventa allora:

$$y(t) = \frac{1}{4}u(t-1) + \frac{3}{20}u(t-2) + \frac{1}{10}u(t-3) + y(t-1) - \frac{1}{2}y(t-2) \quad (1.80)$$

Ovvero:

$$y(t) - y(t-1) + \frac{1}{2}y(t-2) + 0y(t-3) = 0u(t) + \frac{1}{4}u(t-1) + \frac{3}{20}u(t-2) + \frac{1}{10}u(t-3) \quad (1.81)$$

I coefficienti k_i ed h_i sono allora:

$$h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$h_3 = 0$$

$$k_0 = 0$$

$$k_1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$k_2 = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$k_3 = \frac{1}{10} = 0,1$$

Le matrici A, B, C, D sono allora le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

1.12.2 Realizzazione in forma canonica di controllo: caso generale

Se nell'equazione esterna del sistema il coefficiente k_0 é diverso da zero, le matrici A e B restano identiche, mentre per scrivere la matrice C occorre determinare i coefficienti seguenti:

$$v_1 = k_1 - k_0 \cdot h_1$$
$$v_2 = k_2 - k_0 \cdot h_2$$
$$\dots$$
$$v_n = k_n - k_0 \cdot h_n$$

La matrice C risulta allora la seguente:

$$C = \begin{bmatrix} v_n & v_{n-1} & v_{n-2} & \dots & v_2 & v_1 \end{bmatrix} \tag{1.86}$$

La matrice D é costituita, in questo caso, dal solo elemento k_0:

$$D = \begin{bmatrix} k_0 \end{bmatrix} \tag{1.87}$$

1.12.3 Realizzazione in forma canonica di ricostruzione

La non univocitá della realizzazione di un sistema puó essere messa in evidenza dal seguente Teorema, che consente una differente realizzazione, detta *forma canonica di ricostruzione*:

Teorema 1.2 *Sia dato un sistema di ordine n, e sia*

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + h_n y(t) = k_0 u^{(n)}(t) + k_1 u^{(n-1)}(t) + k_n u(t) \tag{1.88}$$

la sua descrizione esterna, qualora esso sia a tempo continuo.

Sia invece

$$y(t) + h_1 y(t-1) + \dots + h_n y(t-n) = k_0 u(t) + k_1 u(t-1) + \dots + k_n u(t-n) \tag{1.89}$$

la sua descrizione esterna, qualora esso sia a tempo discreto.

Supponiamo ancora $k_0 = 0$.

Allora il sistema descritto dalla quaterna di matrici A, B, C, D con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -h_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -h_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -h_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -h_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -h_1 \end{bmatrix} \tag{1.90}$$

$$B = \begin{bmatrix} k_n \\ k_{n-1} \\ k_{n-2} \\ \dots \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} \tag{1.91}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.92}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

é una sua realizzazione , detta forma canonica di ricostruzione.

La dimostrazione del teorema é analoga alla precedente. Con riferimento all'equazione 1.81, si ha:

$$h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$h_3 = 0$$

$$k_0 = 0$$

$$k_1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$k_2 = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$k_3 = \frac{1}{10} = 0,1$$

Le matrici A, B, C, D che ne esprimono la realizzazione in forma canonica di ricostruzione sono allora le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

1.12.4 Realizzazione in forma canonica di Markoff

Consideriamo infine la cosiddetta realizzazione in *forma canonica di Markoff*:

Teorema 1.3 *Sia dato un sistema di ordine n, e sia*

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + h_n y(t) = k_0 u^{(n)}(t) + k_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n u(t) \quad (1.94)$$

la sua descrizione esterna, qualora esso sia a tempo continuo.
Sia invece

$$y(t) + h_1 y(t-1) + \cdots + h_n y(t-n) = k_0 u(t) + k_1 u(t-1) + \cdots + k_n u(t-n) \quad (1.95)$$

la sua descrizione esterna, qualora esso sia a tempo discreto.
Sia ancora $k_0 = 0$.
Si definiscano ricorsivamente gli n coefficienti:

$$\begin{aligned} m_1 &= k_1 \\ m_2 &= -h_1 \cdot m_1 + k_2 \\ m_3 &= -h_1 \cdot m_2 - h_2 \cdot m_1 + k_3 \\ &\cdots \\ m_n &= -h_1 \cdot m_{n-1} - \cdots - h_{n-1} \cdot m_1 + k_n \end{aligned} \quad (1.96)$$

(detti coefficienti di Markoff).
Allora la quaterna di matrici A, B, C, D con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -h_n & -h_{n-1} & -h_{n-2} & \dots & -h_2 & -h_1 \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

$$B = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

definisce la realizzazione del sistema in forma canonica di Markoff.

Riprendendo ancora l'equazione 1.81, i coefficienti di Markoff possono essere ricavati dagli h_i e dai k_i; si ha infatti:

$$h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$h_3 = 0$$

$$k_0 = 0$$

$$k_1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$k_2 = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$k_3 = \frac{1}{10} = 0,1$$

da cui:

$$m_1 = k_1 = 0,25$$

$$m_2 = -h_1 \cdot m_1 + k_2 = 0,4$$

$$m_3 = -h_1 \cdot m_2 - h_2 \cdot m_1 + k_3 = 0,375$$

Le matrici che esprimono la realizzazione del sistema in forma canonica di Markoff sono allora le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,4 \\ 0,375 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

1.12.5 Significato della realizzazione in forma canonica di Markoff

Nel caso di un sistema a *tempo discreto*, i coefficienti di Markoff hanno una notevole importanza fisica, legata al concetto di *risposta all'impulso* del sistema stesso.

Consideriamo un ingresso $u(t)$ particolare, definito per tutti gli istanti di tempo discreti $t \geq 0$ come:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t > 0, \end{cases} \tag{1.101}$$

Questo segnale, rappresentato in figura 1.16, é detto *impulso elementare*.

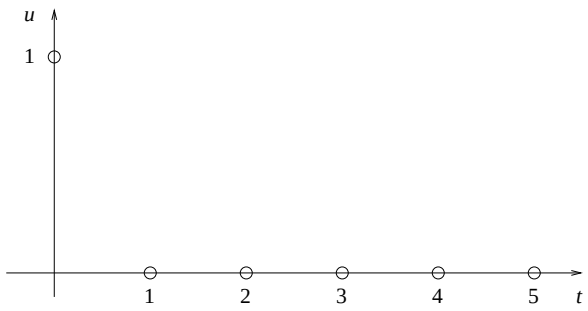

Figura 1.16: Impulso elementare

Supponiamo inoltre che il sistema *si trovi inizialmente a riposo*, ovvero che il suo stato iniziale sia lo stato nullo:

$$x_1(0) = x_2(0) = \cdots = x_n(0) = 0$$

Allora i coefficienti di Markoff rappresentano la *risposta all'impulso* del sistema, cioé l'andamento dell'uscita $y(t)$. Si ha cioé:

$$y(1) = m_1$$

$$y(2) = m_2$$

$$\cdots$$

$$y(n) = m_n$$

Ad esempio, consideriamo ancora il modello di previsione delle piene di un fiume utilizzato nel precedente paragrafo:

$$y(t)-y(t-1)+\frac{1}{2}y(t-2)+0y(t-3)=0u(t)+\frac{1}{4}u(t-1)+\frac{3}{20}u(t-2)+\frac{1}{10}u(t-3) \quad (1.102)$$

I coefficienti di Markoff, calcolati nel precedente paragrafo, sono:

$$m_1 = k_1 = 0,25$$
$$m_2 = -h_1 \cdot m_1 + k_2 = 0,4$$
$$m_3 = -h_1 \cdot m_2 - h_2 \cdot m_1 + k_3 = 0,375$$

Se supponiamo il fiume inizialmente in secca, e consideriamo un temporale estivo che immetta nel punto A del fiume (vedi figura 1.11) la quantitá d'acqua

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t > 0, \end{cases} \quad (1.103)$$

Allora le quantitá d'acqua che raggiungeranno B nelle tre ore successive saranno date dai coefficienti di Markoff:

$$y(1) = m_1 = 0,25$$
$$y(2) = m_2 = 0,4$$
$$y(3) = m_3 = 0,375$$

Se nell'istante $t = 0$ la quantitá d'acqua in ingresso non é $u(0) = 1$ ma é q volte maggiore ($u(t) = q$), allora le uscite $y(t)\,(t = 1, 2, 3)$ si ottengono dalle precedenti moltiplicandole per il fattore q. Ció e' dovuto alla linearitá del sistema ed alla conseguente possibile applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.

Esercizio

Nell'esempio del paragrafo precedente (1.12.5), sono state calcolate le quantitá d'acqua giunte a valle, immettendo in ingresso nell'istante $t = 0$ la quantitá $u(0) = 1$, e non immettendo piú acqua negli istanti successivi. Tuttavia, la somma delle quantitá d'acqua giunte a valle nel punto B risulta maggiore della quantitá d'acqua immessa a monte nel punto A. Si ha infatti:

$$y(1) + y(2) + y(3) = 1,025 > 1$$

Come é possibile ció ?

Soluzione

Il modello utilizzato non tiene conto solo delle medie mobili sulle quantitá d'acqua immesse, ma anche di termini autoregressivi che si riferiscono a misure effettuate esclusivamente nel punto a valle. Ció per tener conto, ad esempio, delle precipitazioni atmosferiche e del contributo di eventuali affluenti.

Capitolo 2

Aggregati di sistemi

2.1 Generalitá

Uno degli obiettivi della Teoria dei Sistemi e della Teoria del Controllo Automatico consiste nella progettazione di dispositivi adatti a controllare l'andamento di una o piú grandezze fisiche.

Consideriamo, ad esempio, il sistema di regolazione della temperatura di una stanza, rappresentato schematicamente in figura 2.1.

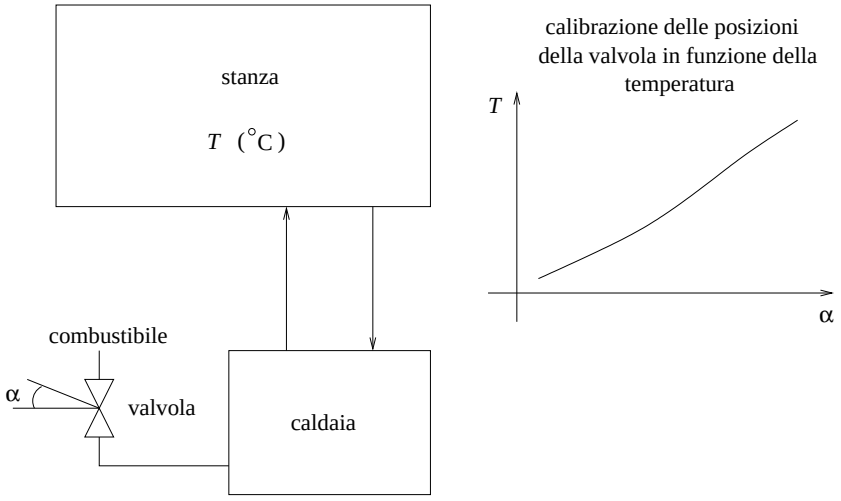

Figura 2.1: Controllo della temperatura di una stanza

Supponiamo di voler mantenere costante la temperatura T della stanza; abbiamo a che fare con un problema di regolazione, in cui dobbiamo fare in modo che la quantitá di calore ceduta dalla stanza al mondo esterno sia

compensata, istante per istante, da una uguale quantitá di calore generata dalla caldaia.

La temperatura della stanza puó essere regolata manualmente agendo sulla posizione α del rubinetto della valvola di ingresso del combustibile; é inoltre possibile calibrare le posizioni del rubinetto in funzione della temperatura della stanza, come appare nel grafico di figura 2.1. L'operazione di calibrazione deve essere effettuata in condizioni prestabilite, ad esempio per una determinata temperatura esterna, e per una determinata configurazione della stanza (ad esempio, a finestre chiuse). Si puó pensare di effettuare piú di una calibrazione, ad esempio per differenti valori della temperatura esterna T_e. Le curve di calibrazione permettono all'operatore una regolazione ma-

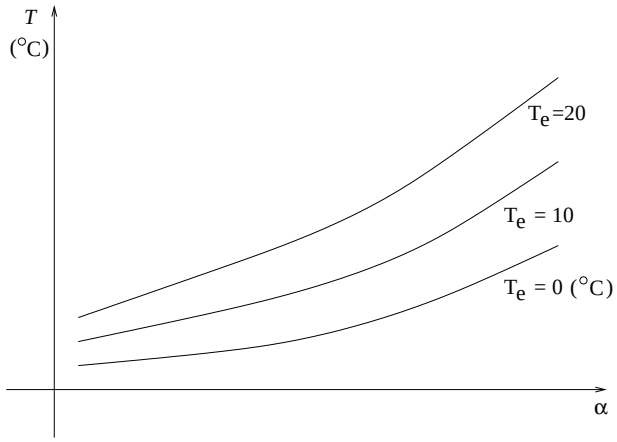

Figura 2.2: Curve di calibrazione per differenti temperature esterne

nuale della temperatura della stanza; possiamo rappresentare questo tipo di regolazione con lo schema a blocchi di figura 2.3: Questo tipo di regolazione é detto *in cascata* in quanto i blocchi rappresentanti i sistemi valvola, caldaia e stanza sono collegati in cascata, ovvero l'uscita di un blocco coincide con l'ingresso del blocco successivo.

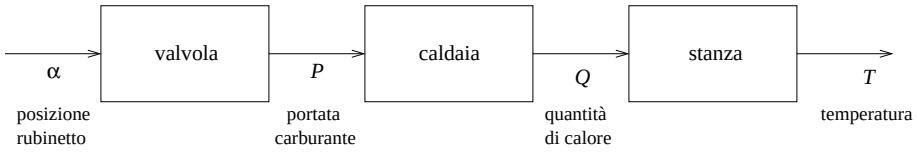

Figura 2.3: Regolazione in cascata

Occorre tuttavia osservare che a causa delle variazioni della temperatura esterna, e della possibile apertura di porte e finestre, la temperatura della stanza puó subire delle variazioni rispetto al valore desiderato. Per mantenere costante la temperatura, possiamo pensare all'assunzione di un operatore che leggendo periodicamente la temperatura della stanza, agisca di conseguenza sulla valvola del combustibile al fine di mantenerne la temperatura della stanza al valore desiderato. Lo schema a blocchi di un tale sistema di controllo é rappresentato in figura 2.4. Tuttavia, questo schema di rego-

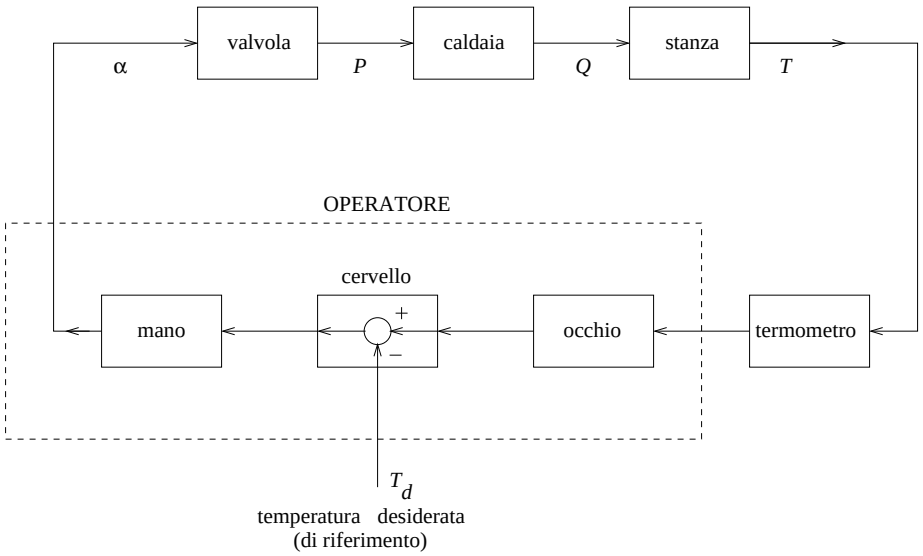

Figura 2.4: Schema di controllo della temperatura

lazione risulta antieconomico e fragile, essendo soggetto a possibili errori e distrazioni dell'operatore; inoltre qualora la precisione richiesta risulti stringente (come ad esempio nella regolazione della temperatura di un forno di una industria farmaceutica) l'operazione di regolazione risulta impossibile per un essere umano. Si puó allora pensare alla sostituzione dell'operatore con una elettrovalvola comandata da un segnale in tensione proveniente da un trasduttore di temperatura. Lo schema di massima di questo *controllo automatico* é rappresentato in figura 2.5. Lo schema di controllo deve comprendere un dispositivo di confronto, capace di effettuare la differenza tra la tensione di riferimento V_r e la tensione di retroazione V_f fornita dal trasduttore di temperatura. La differenza tra queste due tensioni V_e é detta *tensione errore*. Un opportuno dispositivo regolatore avrá in ingresso la tensione errore e fornirá in uscita un valore di tensione opportuno V_a per il comando dell'elettrovalvola. Come vedremo in seguito, variando la tensione

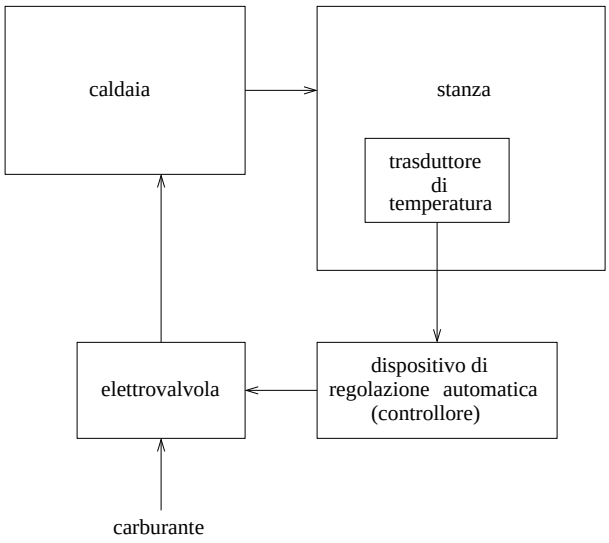

Figura 2.5: Controllo automatico della temperatura di una stanza

di riferimento V_r é possibile determinare il valore desiderato di temperatura della stanza.

Il sistema di controllo della temperatura della stanza, automatico o manuale, é rappresentabile come un aggregato di blocchi, ciascuno costituente un sottosistema con un ingresso ed una uscita.

Ci proponiamo, nel presente paragrafo, di introdurre alcune regole per semplificare lo schema a blocchi di un sistema mediante alcune leggi di composizione di blocchi collegati tra loro, al fine di rappresentare il sistema con un solo blocco.

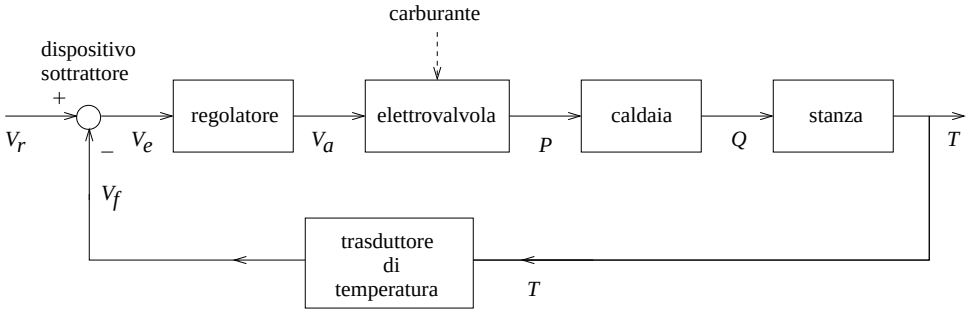

Figura 2.6: Schema a blocchi del controllo automatico di temperatura

2.2 Sistemi in cascata

Definizione 2.1 *Due sistemi S_1 ed S_2 sono collegati in cascata quando le uscite del primo sistema coincidono con gli ingressi del secondo.*

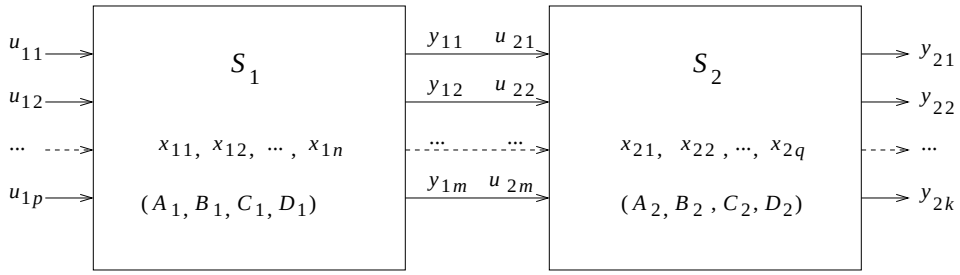

Figura 2.7: Collegamento in cascata

Indichiamo con $U(t) = U_1(t)$ la matrice degli ingressi del sistema S_1, con $Y_1(t)$ la sua matrice delle uscite, con $X_1(t)$ la matrice delle sue variabili di stato:

$$U(t) = U_1(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \\ \cdots \\ u_{1p}(t) \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ \cdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}$$

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \\ \cdots \\ y_{1m}(t) \end{bmatrix}$$

Analogamente, possiamo indicare con $U_2(t)$, $Y(t) = Y_2(t)$, $X_2(t)$ le corrispondenti matrici, relative al sistema S_2:

$$U_2(t) = \begin{bmatrix} u_{21}(t) \\ u_{22}(t) \\ \cdots \\ u_{2m}(t) \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{2q}(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = Y_1(t) = \begin{bmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \\ \dots \\ y_{2k}(t) \end{bmatrix}$$

Osserviamo che lo schema a blocchi di figura 2.7 puó essere ridisegnato in modo piú semplice (vedi figura 2.8) se si indicano ingressi, stati ed uscite in notazione matriciale. Siano A_1, B_1, C_1, D_1 e A_2, B_2, C_2, D_2 le due quaterne

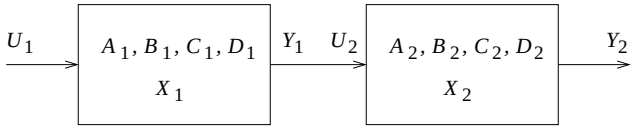

Figura 2.8: Rappresentazione semplificata di sistemi in cascata

di matrici che individuano la descrizione interna dei due sistemi; le equazioni di stato relative ai due sistemi sono allora:

$$\dot{X}_1(t) = A_1 \cdot X_1(t) + B_1 \cdot U_1(t) \tag{2.1}$$

$$\dot{X}_2(t) = A_2 \cdot X_2(t) + B_2 \cdot U_2(t) \tag{2.2}$$

Le equazioni di uscita sono invece le seguenti:

$$Y_1(t) = U_2(t) = C_1 \cdot X_1(t) + D_1 \cdot U_1(t) \tag{2.3}$$

$$Y_2(t) = C_2 \cdot X_2(t) + D_2 \cdot U_2(t) = C_2 \cdot X_2(t) + D_2 \cdot Y_1(t) \tag{2.4}$$

ove l'uguaglianza $Y_1 = U_2$ é immediata conseguenza del collegamento in cascata. Osserviamo ancora che lo schema di figura 2.9 puó essere disegnato, in modo piú semplice, come in figura 2.10: Utilizzando la 2.3 possiamo eliminare Y_1 dalla 2.4, ottenendo l'equazione di uscita del *sistema complessivo*

$$\boxed{Y_2(t) = C_2 \cdot X_2(t) + D_2 \cdot C_1 \cdot X_1(t) + D_2 \cdot D_1 \cdot U_1(t)} \tag{2.5}$$

Per quanto riguarda le equazioni di stato, se il sistema S_1 é caratterizzato da n variabili di stato ed il sistema S_2 é caratterizzato da q variabili di stato, segue che il sistema complessivo é caratterizzato da $s = n + q$ variabili di

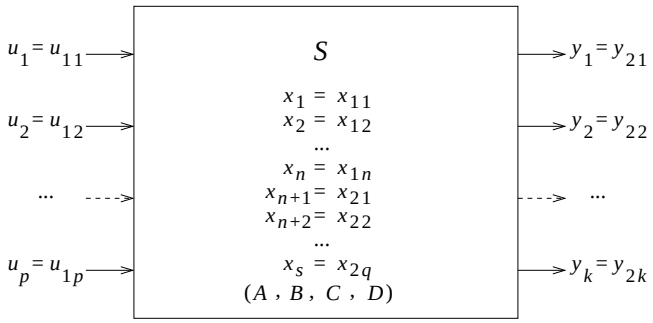

Figura 2.9: Riduzione di un sistema in cascata

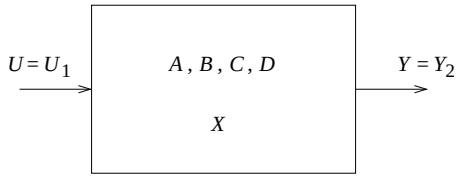

Figura 2.10: Schema semplificato dell'aggregato di due sistemi in cascata

stato $x_1 = x_{11}, x_2 = x_{12}, \ldots, x_n = x_{1n}, x_{n+1} = x_{21}, x_{n+2} = x_{22}, \ldots, x_s = x_{2q}$. Utilizzando ancora la 2.3, possiamo eliminare U_2 dalla seconda equazione di stato 2.2, ottenendo dunque:

$$\boxed{\dot{X}_1(t) = A_1 \cdot X_1(t) + B_1 \cdot U_1(t)} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\dot{X}_2(t) = (A_2 + B_2 \cdot C_1) \cdot X_1(t) + D_1 \cdot U_1(t)} \tag{2.7}$$

Introducendo una matrice $X(t)$ rappresentante gli $s = n+q$ stati del sistema complessivo:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_s(t) \end{bmatrix}$$

il sistema complessivo é rappresentato dalla quaterna di matrici:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ B_2 \cdot C_1 & A_2 \end{bmatrix}} \tag{2.8}$$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \cdot D_1 \end{bmatrix}} \tag{2.9}$$

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} D_2 \cdot C_1 & C_2 \end{bmatrix}} \tag{2.10}$$

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} D_2 \cdot D_1 \end{bmatrix}} \tag{2.11}$$

ove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla[1].

Osserviamo che la matrice A é triangolare a blocchi, e quindi gli autovalori di A coincidono con gli autovalori delle matrici A_1 ed A_2. Gli autovalori della matrice ci saranno utili in seguito quando analizzeremo il problema della stabilitá di un sistema lineare.

2.2.1 Esempio applicativo

Consideriamo un sistema costituito da un bacino di una centrale idroelettrica alimentato da un fiume (figura 2.11). Supponiamo che il modello del

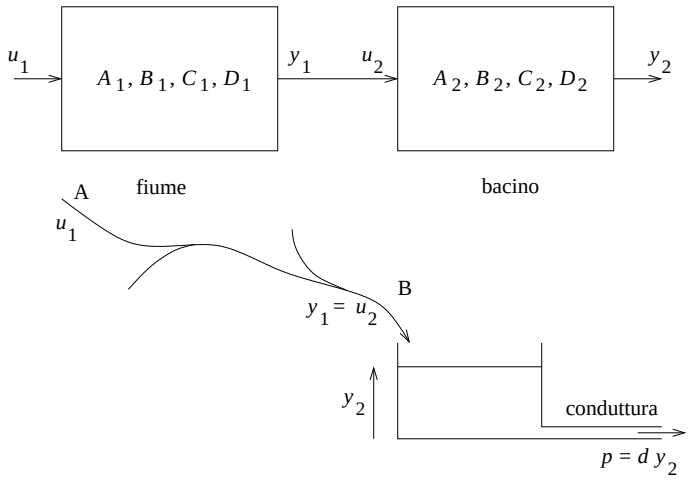

Figura 2.11: Esempio di sistemi in cascata

fiume sia ancora una volta dato dall'equazione a tempo discreto utilizzata nel precedente capitolo:

$$\boxed{y(t) = k\alpha_1 u(t-1) + k\alpha_2 u(t-2) + k\alpha_3 u(t-3) + 2(1-k)y(t-1) - (1-k)y(t-2)} \tag{2.12}$$

[1] ovvero una matrice con tutti i coefficienti uguali a zero

e passiamo alla determinazione del modello a tempo discreto del bacino; a tal scopo indichiamo con $u_2(t) = y_1(t)$ la portata d'acqua che entra nel bacino all'istante t e con $y_2(t)$ l'altezza del livello d'acqua nel bacino. Supponiamo inoltre che il bacino sia di forma cilindrica, con superficie di base S. Facciamo inoltre l'ipotesi che la centrale elettrica sia alimentata dal bacino mediante una lunga conduttura; in questo caso si dimostra che la portata d'acqua $p(t)$ in uscita dal bacino risulta direttamente proporzionale all'altezza dell'acqua nel bacino:

$$p(t) = d \cdot y_2(t) \tag{2.13}$$

oce d é una opportuna costante dipendente dalla geometria della conduttura. Indichiamo inoltre con $q(t)$ il volume d'acqua presente nel bacino all'istante t. Nell'intervallo di tempo $[t, t+1]$ la quantitá d'acqua presente nel bacino é aumentata della quantitá

$$q(t+1) - q(t) = u_2(t) - p(t) = u_2(t) - d \cdot y_2(t) \tag{2.14}$$

Ricordando che il volume d'acqua puó essere legato all'altezza $y(t)$ dalla relazione

$$q(t) = S \cdot y(t)$$

possiamo riscrivere la 2.14 come:

$$S \cdot y_2(t+1) - S \cdot y_2(t) = u_2(t) - d \cdot y_2(t)$$

ovvero:

$$y_2(t+1) + \frac{d-S}{S} y_2(t) = \frac{1}{S} \cdot u_2(t)$$

Osservando il sistema all'istante t, anziché all'istante $t+1$ possiamo scrivere:

$$\boxed{y_2(t) + \frac{d-S}{S} y_2(t-1) = \frac{1}{S} \cdot u_2(t-1)} \tag{2.15}$$

Dobbiamo ora passare alla *realizzazione* di entrambi i sistemi; scegliamo ad esempio la *forma canonica di controllo* per entrambi, cominciando dall'equazione 2.12. La quaterna di matrici viene determinata come nel capitolo precedente, ovvero osservando i coefficienti dell'equazione stessa. Si ottiene:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-k & -2(1-k) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} k \cdot \alpha_3 & k \cdot \alpha_2 & k \cdot \alpha_1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Procedento in modo analogo, é possibile determinare la quaterna di matrici per il bacino. Osservando che il sistema ha ordine uno, segue che le matrici sono anch'esse costituite da una sola riga, ovvero

$$A_2 = \begin{bmatrix} -h_1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} k_1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene allora:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{S-d}{S} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Per ottenere la quaterna di matrici *relativa ai sistemi in cascata* utilizziamo le 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, ottenendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & -2(1-k) & 0 \\ k \cdot \alpha_3 & k \cdot \alpha_2 & k \cdot \alpha_1 & \frac{S-d}{S} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{S} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

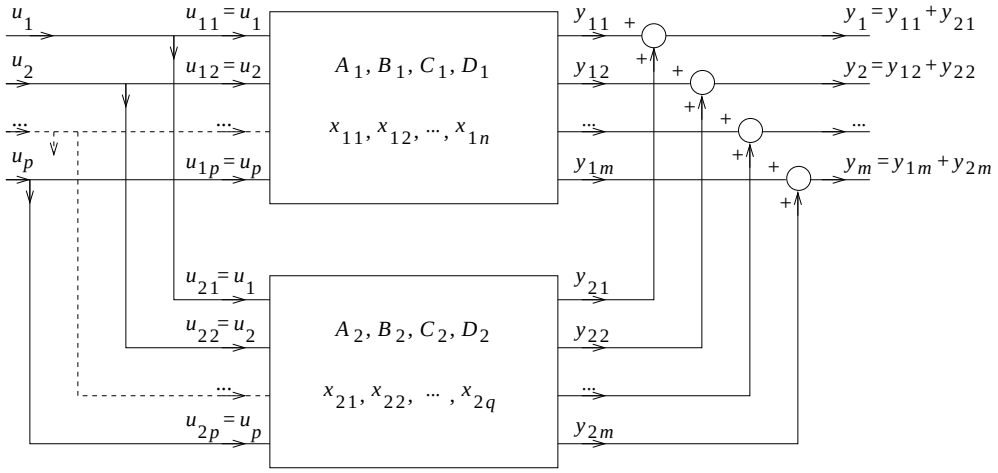

Figura 2.12: Sistemi collegati in parallelo

2.3 Sistemi in parallelo

Consideriamo ora un sistema costituito da due sottosistemi collegati come in figura 2.12: Il sistema rappresentato in figura 2.12 puó essere rappresentato in modo semplificato (vedi figura 2.13), utilizzando la notazione matriciale per rappresentarne ingressi, uscite e stati. Osserviamo che il numero di uscite del primo sottosistema coincide con il numero di uscite del secondo. Si ha cioé:

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \\ \dots \\ y_{1m}(t) \end{bmatrix}$$

$$Y_2(t) = \begin{bmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \\ \dots \\ y_{2m}(t) \end{bmatrix}$$

L'uscita $Y(t)$ é allora costituita dalla somma delle due uscite dei due sottosistemi:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$$

Indichiamo con

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ \dots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}$$

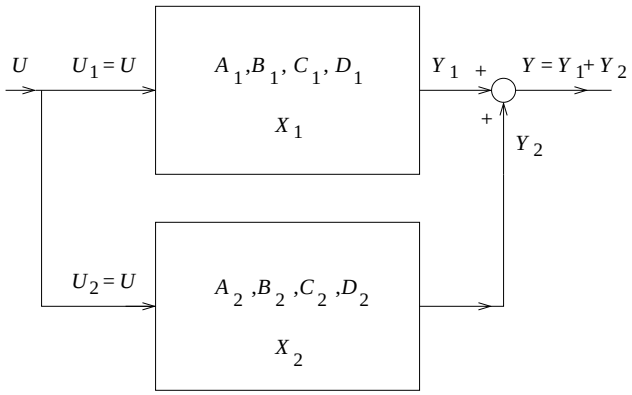

Figura 2.13: Sistemi collegati in parallelo

$$X_2(t) \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{2q}(t) \end{bmatrix}$$

le matrici di stato dei due sistemi, e con

$$U(t) = U_1(t) = U_2(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

la matrice degli ingressi (comuni ai due sottosistemi). Sia inoltre

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ \dots \\ x_{2q}(t) \end{bmatrix}$$

la matrice rappresentante gli $s = n + q$ stati del sistema complessivo. Se indichiamo con (A_1, B_1, C_1, D_1) ed $A_2, B_2, C_2, D_2)$ le quaterne di matrici che descrivono internamente i due sottosistemi, possiamo con un semplice calcolo dimostrare che il sistema descritto dalla quaterna di matrici:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}} \tag{2.28}$$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}} \tag{2.29}$$

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}} \tag{2.30}$$

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix}} \tag{2.31}$$

é equivalente a quello costituito dai due sistemi in parallelo. La verifica é lasciata al lettore per esercizio.

La matrice A é ancora diagonale a blocchi, e quindi i suoi autovalori coincidono con quelli delle matrici A_1 ed A_2.

2.3.1 Sistemi in parallelo con nodo sottrattore

Come esercizio, consideriamo il caso di figura 2.14, ove il nodo sommatore é stato sostituito dal nodo sottrattore. In questo caso, l'uscita $Y(t)$ é la

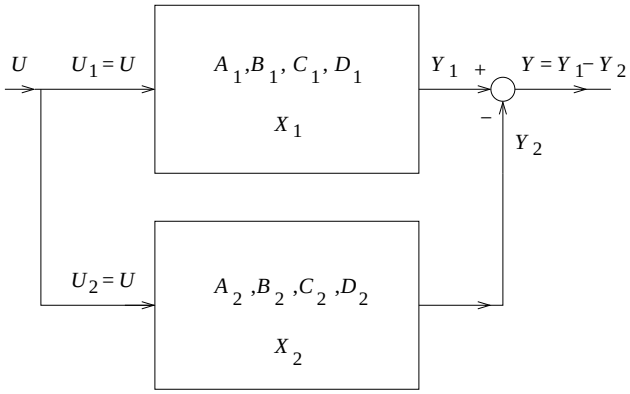

Figura 2.14: Sistemi collegati in parallelo con nodo sottrattore

differenza delle uscite $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$:

$$Y(t) = Y_1(t) - Y_2(t) \tag{2.32}$$

Supponiamo di avere a che fare con sistemi a tempo discreto[2], e scriviamo le equazioni di stato e di uscita, in forma matriciale, per i due sottosistemi.

$$X_1(t+1) = A_1 \cdot X_1(t) + B_1 \cdot U(t) \tag{2.33}$$

$$Y_1(t) = C_1 \cdot X_1(t) + D_1 \cdot U(t) \tag{2.34}$$

$$X_2(t+1) = A_2 \cdot X_2(t) + B_2 \cdot U(t) \tag{2.35}$$

[2]Il procedimento é analogo per sistemi a tempo continuo

$$Y_2(t) = C_2 \cdot X_2(t) + D_2 \cdot U(t) \tag{2.36}$$

Sostituendo le 2.34 e 2.36 nella 2.32, otteniamo:

$$Y(t) = C_1 \cdot X_1(t) - C_2 \cdot X_2(t) + (D_1 - D_2) \cdot U(t) \tag{2.37}$$

Introducento la matrice

$$X = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

contenente tutte le variabili di stato del sistema complessivo possiamo riscrivere la 2.37 come:

$$Y(t) = C \cdot X_2(t) + D \cdot U(t) \tag{2.39}$$

con

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix}} \tag{2.40}$$

e:

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} D_1 - D_2 \end{bmatrix}} \tag{2.41}$$

Analogamente, possiamo scrivere una sola equazione di stato per il sistem complessivo:

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \tag{2.42}$$

con

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}} \tag{2.43}$$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}} \tag{2.44}$$

Osserviamo che ancora una volta gli autovalori di A coincidono con gli autovalori delle matrici A_1 ed A_2.

2.3.2 Esempio applicativo

Passiamo ora ad un esempio di sistemi in parallelo: Consideriamo due canali artificiali affluenti in un bacino, (vedi figura 2.15), e rappresentati dai seguenti modelli ARMA:

$$y_1(t) - y_1(t-1) + 0,5y_1(t-2) = 0,1u_1(t-1) + 0,1u_1(t-2) + 0,3u_1(t-3) \tag{2.45}$$

$$y_2(t) - y_2(t-1) + 0,5y_2(t-2) = 0,2u_2(t-1) + 0,1u_2(t-2) + 0,2u_2(t-3) \tag{2.46}$$

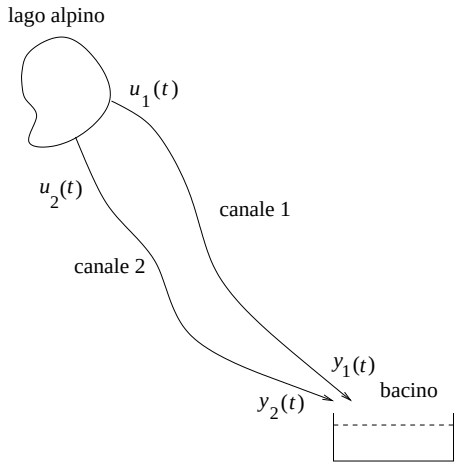

Figura 2.15: Bacino alimentato da due affluenti

Determiniamone le rispettive realizzazioni A_1, B_1, C_1, D_1 ed A_2, B_2, C_2, D_2 in forma canonica di controllo; per il primo affluente si ha:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente, per il secondo affluente, si ha la seguente realizzazione:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che i due affluenti siano alimentati, istante per istante, dalla stessa quantitá d'acqua:

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t)$$

Consideriamo cone uscita $y(t)$ del sistema la quantitá d'acqua totale che affluisce nel bacino; si ha ovviamente:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Possiamo allora parlare di un sistema costituito da due blocchi in parallelo, simile a quello rappresentato in figura 2.13. Le matrici A, B, C, D che forniscono la realizzazione del sistema aggregato sono allora:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

2.4 La retroazione

Prima di iniziare a trattare questo caso, introduciamo un paio di definizioni:

Definizione 2.2 *Un sistema descritto da una quaterna di matrici A, B, C, D é proprio se $D = \mathbf{0}$, improprio se $D \neq \mathbf{0}$.*

Definizione 2.3 *Due sistemi sono collegati in retroazione quando sono collegati come in figura 2.16.*

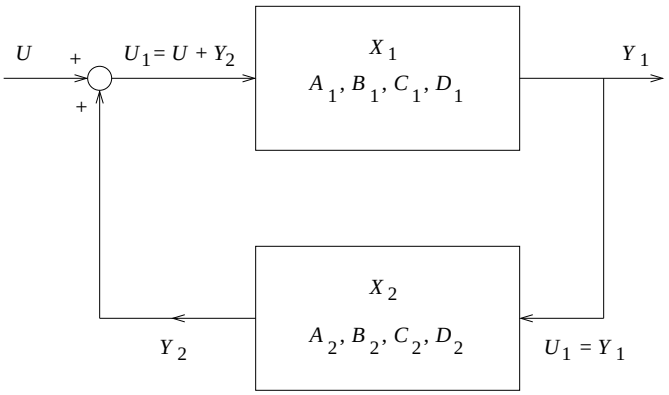

Figura 2.16: Collegamento in retroazione

Con riferimento alla figure 2.16 si ha:

$$U_1 = U + Y_2 = U + C_2 \cdot X_2 + D_2 \cdot U_2 = U + C_2 \cdot X_2 + D_2 \cdot Y_1$$

(ove é stata utilizzata l'equazione di uscita del secondo sistema $Y_2 = C_2 \cdot X_2 + D_2 \cdot U_2$ ed il fatto che $U_2 = Y_1$). Osservando che $Y_1 = C_1 \cdot X_1 + D_1 \cdot U_1$ otteniamo:

$$U_1 = U + C_2 \cdot X_2 + D_2 \cdot C_1 \cdot X_1 + D_2 \cdot D_1 \cdot U_1$$

Portando tutti i termini contenenti U_1 a primo membro e raccogliendo otteniamo:

$$(I - D_2 \cdot D_1) \cdot U_1 = U + C_2 \cdot X_2 + D_2 \cdot C_1 \cdot X_1 \tag{2.47}$$

ove I é la matrice unitá. A questo punto, osserviamo che é possibile determinare U_1 se e solo se la matrice $I - D_2 \cdot D_1$ é invertibile; in questo caso si ha:

$$U_1 = M \cdot (U + C_2 \cdot X_2 + D_2 \cdot C_1 \cdot X_1) \tag{2.48}$$

ove

$$M = (I - D_2 \cdot D_1)^{-1}$$

Nel caso in cui ció non avvenga, l'aggregato dei due sistemi non puó essere considerato un sistema dinamico; infatti se la matrice $I - D_2 \cdot D_1$ non é invertibile, il segnale U_1 in ingresso al primo blocco non é univocamente determinato. Pertanto, affinché l'aggregato in retroazione positiva dei due sistemi risulti un sistema dinamico, deve essere:

$$\det(I - D_2 \cdot D_1) \neq 0 \tag{2.49}$$

Questa condizione é sicuramente verificata se almeno una tra le matrici D_1 e D_2 é nulla, ovvero se almeno uno dei due sistemi é *proprio*. Per determinare la quaterna di matrici, scriviamo le equazioni di stato e di uscita dei due sistemi, supposti a tempo continuo[3]:

$$\dot{X}_1 = A_1 \cdot X_1 + B_1 \cdot U_1$$

$$\dot{X}_2 = A_2 \cdot X_2 + B_2 \cdot U_2 = A_2 \cdot X_2 + B_2 \cdot Y_1$$

$$Y_1 = C_1 \cdot X_1 + D_1 \cdot U_1$$

Sostituendo in esse l'espressione di U_1 data dalla 2.48 e raccogliendo i termini comuni, si ottiene:

$$\dot{X}_1 = E_1 \cdot X_1 + F_1 \cdot X_2 + G_1 \cdot U$$

$$\dot{X}_2 = E_2 \cdot X_2 + F_2 \cdot X_2 + G_2 \cdot U$$

$$Y_1 = H \cdot X_1 + K \cdot X_2 + L \cdot U$$

ove:

$$E_1 = A_1 + B_1 \cdot M \cdot D_2 \cdot C_1$$

$$F_1 = B_1 \cdot M \cdot C_2$$

$$G_1 = B_1 \cdot M$$

$$E_2 = B_2 \cdot C_1 + B_2 \cdot D_1 \cdot M \cdot D_2 \cdot C_1$$

$$F_2 = B_2 \cdot D_1 \cdot M \cdot C_2 + A_2$$

$$G_2 = B_2 \cdot D_1 \cdot M$$

$$H = C_1 + D_1 \cdot M \cdot D_2 \cdot C_1$$

$$K = D_1 \cdot M \cdot C_2$$

$$L = D_1 \cdot M$$

Indicando con

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema semplificato come:

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U$$

$$Y = C \cdot X + D \cdot U$$

[3]il caso a tempo discreto é analogo ed é lasciato al lettore per esercizio

ove

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 M D_2 C_1 & B_1 M C_2 \\ B_2 C_1 + B_2 D_1 M D_2 C_1 & B_2 D_1 M C_2 + A_2 \end{bmatrix}} \tag{2.50}$$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} B_1 M & B_2 D_1 M \end{bmatrix}} \tag{2.51}$$

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} C_1 + D_1 M D_2 C_1 & D_1 M C_2 \end{bmatrix}} \tag{2.52}$$

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} D_1 M \end{bmatrix}} \tag{2.53}$$

Nel caso in cui il primo sistema sia proprio, si ha $D_1 = \mathbf{0}$, da cui $M = I$ e quindi la quaterna di matrici del sistema retroazionato si semplifica notevolmente:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 D_2 C_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Analogamente, se il secondo sistema é proprio, si ha $D_2 = \mathbf{0}$, da cui $M = I$, e quindi:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & B_2 D_1 C_2 + A_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 C_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}$$

Infine, se entrambi i sistemi sono propri, si ha $D_1 = D_2 = 0$, da cui ancora $M = I$, e:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

2.5 Algebra degli schemi a blocchi

Nel caso in cui abbiamo a che fare con sistemi in cui ogni singolo sottosistema possiede *un solo ingresso ed una sola uscita*, é possibile utilizzare la descrizione per mezzo delle funzioni di trasferimento. Nel presente paragrafo, analizzeremo i casi di blocchi in cascata, parallelo o retroazione utilizzando le funzioni di trasferimento. Senza ledere la generalitá, dimostreremo i risultati per sistemi a tempo continuo; i risultati per quelli a tempo discreto sono identici, a patto di sostituire la variabile s con la variabile z.

2.5.1 F.d.T. di sistemi in cascata

Consideriamo l'aggregato rappresentato in figura 2.17, costituito da due sistemi in cascata, descritti per mezzo delle loro funzioni di trasferimento G_1 e G_2. Ricordando la definizione di funzione di trasferimento, si ha:

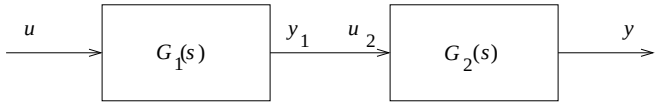

Figura 2.17: Sistemi in cascata descritti per mezzo delle loro f.d.t.

$$y_1 = G_1(s) \cdot u$$

$$y = G_2(s) \cdot u_2$$

Osservando che $y_1 = u_2$, segue immediatamente:

$$y = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot u$$

da cui otteniamo la funzione di trasferimento dell'aggregato:

$$\boxed{G(s) = \frac{y}{u} = G_2(s) \cdot G_1(s)} \tag{2.54}$$

Abbiamo pertanto dimostrato il seguente

Teorema 2.1 *La funzione di trasferimento di due sistemi in cascata é il prodotto delle loro funzioni di trasferimento*

Osserviamo che i poli di $G(s)$ coincidono con i poli di $G_1(s)$ e di $G_2(s)$. In modo analogo, per sistemi a tempo discreto si ottiene:

$$\boxed{G(z) = \frac{y}{u} = G_2(z) \cdot G_1(z)} \tag{2.55}$$

2.5.2 F.d.T. di sistemi in parallelo

In figura 2.18 sono rappresentati due sistemi in parallelo. Siccome l'uscita y

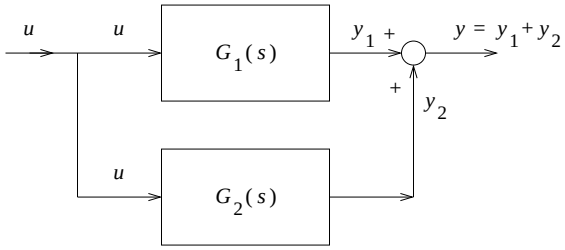

Figura 2.18: Sistemi in parallelo descritti per mezzo delle loro f.d.t.

é la somma delle uscite dei due sottosistemi, si ha:

$$y = y_1 + y_2 = G_1(s) \cdot u + G_2(s) \cdot u$$

da cui si ricava immediatamente la f.d.t. del sistema aggregato:

$$\boxed{G(s) = \frac{y}{u} = G_1(s) + G_2(s)} \tag{2.56}$$

Nel caso in cui in uscita compaia un nodo sottrattore, tale che $y = y_1 - y_2$ si ottiene $G(s) = G_1(s) - G_2(s)$. Si ha pertanto il seguente:

Teorema 2.2 *La f.d.t. di un sistema in parallelo in presenza di un nodo sommatore (sottrattore) é la somma (differenza) delle funzioni di trasferimento.*

Analogamente, per sistemi a tempo discreto, si ha

$$G(z) = G_1(z) \pm G_2(z)$$

Ancora una volta, osserviamo che i poli di G coincidono con i poli di G_1 e di G_2.

2.5.3 F.d.T. di sistemi in retroazione

Consideriamo ora il caso di due sistemi retroazionati, aventi ciascuno un solo ingresso ed una sola uscita, e rappresentato in figura 2.19. Dato che il nodo in ingresso effettua la somma dei segnali $u(t)$ e $y_2(t)$, diremo che il sistema é *retroazionato positivamente*. Ancora una volta, senza ledere la generalitá,

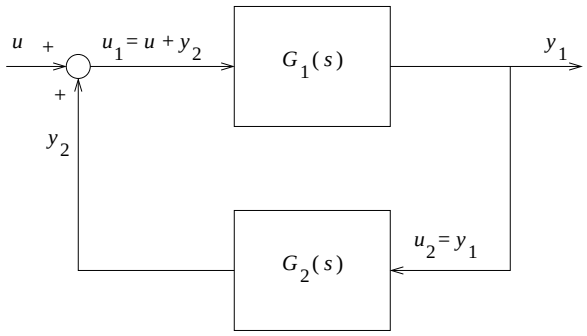

Figura 2.19: Sistemi retroazionati posivimanente

supponiamo che i due sottosistemi siano a tempo continuo. Indicando con $G_1(s)$ e $G_2(s)$ le loro funzioni di trasferimento, si ha:

$$y = G_1(s) \cdot u_1 \tag{2.57}$$

$$y_2 = G_2(s) \cdot u_2 = G_2(s) \cdot y \tag{2.58}$$

$$u_1 = u + y_2 \tag{2.59}$$

Sostituendo la 2.58 nella 2.59 otteniamo:

$$u_1 = u + G_2(s) \cdot y$$

che sostituita nella 2.57 fornisce:

$$y = G_1(s) \cdot u + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot y_1$$

da cui otteniamo la funzione di trasferimento del sistema aggregato:

$$\boxed{G(s) = \frac{y}{u} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_2(s)}} \tag{2.60}$$

Nel caso di un sistema a tempo discreto, avremmo ottenuto:

$$\boxed{G(z) = \frac{y}{u} = \frac{G_1(z)}{1 - G_1(z) \cdot G_2(z)}} \tag{2.61}$$

Passiamo ora all'analisi del sistema rappresentato in figura 2.20, in cui il nodo in ingresso effettua la textitdifferenza tra i segnali $u(t)$ ed $y_2(t)$; in questo caso parleremo di un sistema a *retroazione negativa* (o *controreazione*). Per questo sistema, supposto a tempo continuo, si ha:

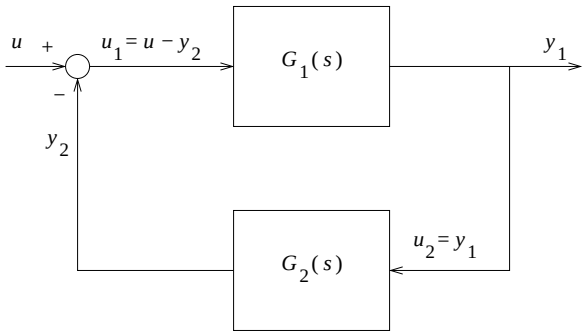

Figura 2.20: Sistema controreazionato

$$y = G_1(s) \cdot u_1$$

$$y_2 = G_2(s) \cdot u_2 = G_2(s) \cdot y$$

$$u_1 = u - u_2$$

Procedendo in modo analogo al caso precedente, si ottiene la funzione di trasferimento di un sistema controreazionato:

$$\boxed{G(s) = \frac{y}{u} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}} \tag{2.62}$$

Analogamente, per un sistema a tempo discreto, si ha:

$$\boxed{G(z) = \frac{y}{u} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2(z)}} \tag{2.63}$$

2.5.4 Esempio

Come esercizio riepilogativo, si consideri il sistema rappresentato in figura 2.21 e si determini la funzione di trasferimento complessiva. Siano:

$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{s}{s+2}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s}$$

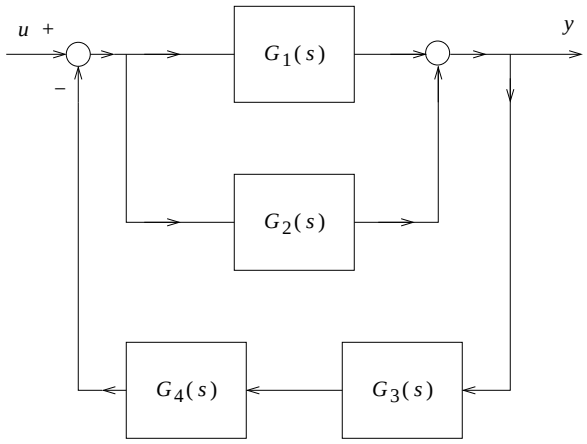

Figura 2.21: Esercizio riepilogativo

Osserviamo che i blocchi G_1 e G_2 sono in parallelo, e che i blocchi G_3 e G_4 sono in cascata; otteniamo dunque:

$$G_a(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{s \cdot (s + 1)}$$

$$G_b(s) = G_3(s) + G_4(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 2)}$$

Lo schema semplificato é rappresentato in figura 2.22 Abbiamo cosí ottenuto

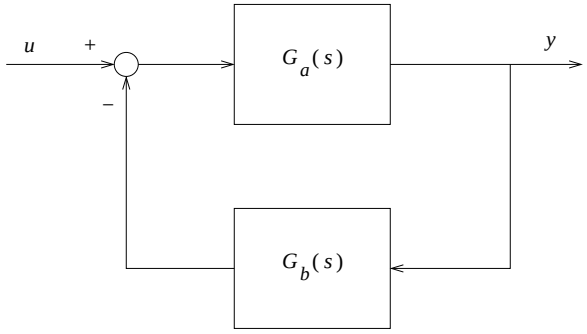

Figura 2.22: La semplificazione conduce ad uno schema controreazionato

un sistema controreazionato, la cui funzione di trasferimento é:

$$G(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{2 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s}{s^4 + 3 \cdot s^3 + 2 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}$$

Osserviamo come non sia facile calcolare i poli della f.d.t. del sistema aggregato (abbiamo a che fare con una equazione di quarto grado), e che essi non coincidono piú con i poli di G_1 e di G_2, come invece avveniva per sistemi in cascata o in parallelo.

2.5.5 Esempio riepilogativo

Consideriamo lo schema a blocchi di figura 2.23; in questo caso l'*annidamento* di due sottosistemi retroazionati non consente di applicare direttamente le formule di semplificazione.

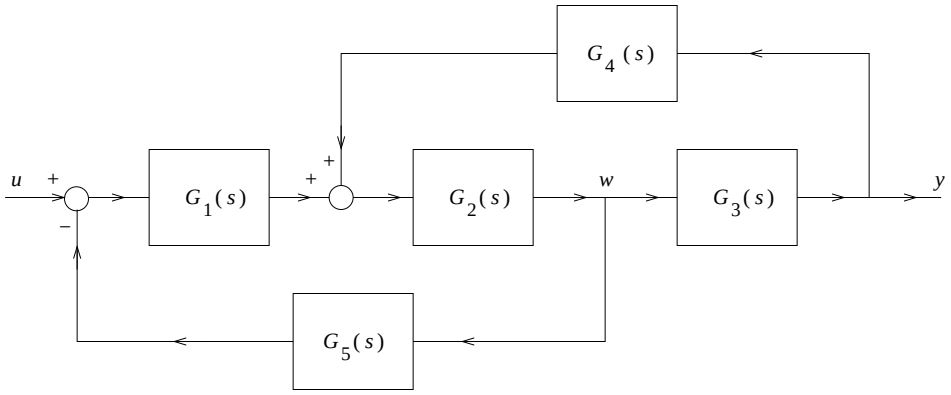

Figura 2.23: Sistemi in retroazione annidati

Se tuttavia passiamo allo schema a blocchi di figura 2.24, ci rendiamo conto che esso é equivalente al sistema di figura 2.23; infatti si ha:

$$y = y_1 = G_3(s) \cdot w$$

ovvero l'ingresso del blocco G_4 é ancora y.

A questo punto, risulta semplice semplificare il sistema, a partire dai blocchi in cascata G_3 e G_4:

$$G_a = G_3 \cdot G_4$$

e successivamente passando ai blocchi in retroazione G_{34} e G_2

$$G_b = \frac{G_2}{1 + G_2 \cdot G_a} = \frac{G_2}{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}$$

Si passa infine alla semplificazione tra i blocchi G_b e G_1, ottenendo

$$G_c = G_b \cdot G_1 = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}$$

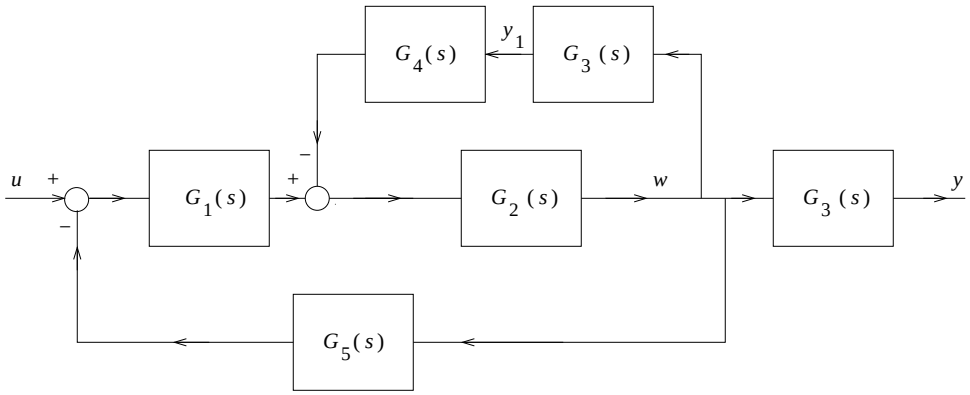

Figura 2.24: Semplificazione dei sistemi annidati

A questo punto, si semplifica l'ultima retroazione tra G_c e G_5:

$$G_d = \frac{G_c}{1 + G_c \cdot G_5} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 + G_1 \cdot G_3 \cdot G_5}$$

Si ha infine:

$$G(s) = G_d(s) \cdot G_3(s) = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 + G_1 \cdot G_3 \cdot G_5}$$

Si invita il lettore, per esercizio, a rappresentare con schemi a blocchi, passaggio per passaggio, le semplificazioni effettuate.

Capitolo 3

Equazioni differenziali

3.1 Spazio delle fasi

3.1.1 Il problema di Kostantinoff

La cittá A é collegata alla cittá B da due strade che non si intersecano. Due pedoni, uniti da una corda di lunghezza $2r$, partendo dalla cittá A arrivano alla cittá B per strade diverse, senza rompere la corda. Due carri di forma circolare di raggio r sono situati rispettivamente nelle cittá A e B. Riusciranno i due carri, muovendosi uno incontro all'altro, a raggiungere l'altra cittá, senza mai toccarsi ?

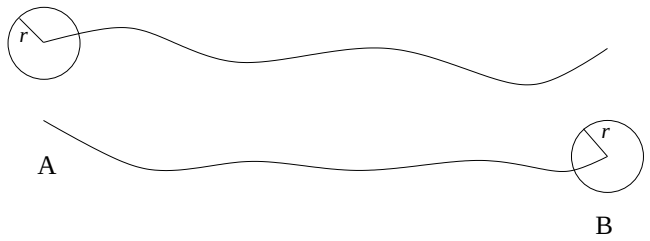

Figura 3.1: Il problema di Kostantinoff

Questo problema é solo in apparenza semplice; infatti per giungere alla soluzione é necessario utilizzare la nozione di *spazio delle fasi*. Indichiamo innanzitutto con x_1 e con x_2 le frazioni delle distanze tra la cittá A e la cittá B lungo le due strade[1], e consideriamo il quadrato Q di lato 1, definito come

[1]Ovviamente si ha $0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2$

il prodotto cartesiano di x_1 con x_2:

$$\mathrm{Q} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}$$

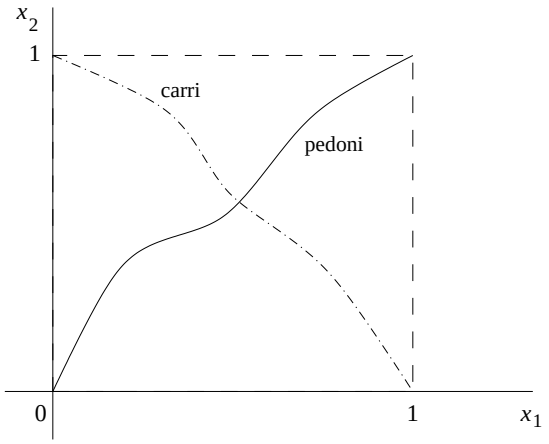

Figura 3.2: Spazio delle fasi per il problema di Kostantinoff

Qualsiasi posizione dei veicoli o dei pedoni é univocamente associata ad un punto del quadrato Q. Ad esempio, i pedoni partono da A, ed a questo punto é associata la coppia di coordinate $x_1 = 0; x_2 = 0$, corrispondente al punto in basso a sinistra del quadrato. Questo quadrato é detto *spazio delle fasi*, ed i suoi punti vengono chiamati *punti rappresentativi*. La posizione iniziale dei pedoni é data dal punto $x_1 = 0; x_2 = 0$, mentre la loro posizione finale é individuata dal punto $x_1 = 1; x_2 = 1$. Analogamente, la posizione iniziale dei carri é individuata dalle coordinate $x_1 = 1; x_2 = 0$, mentre la posizione finale é individuata dal punto $x_1 = 0; x_2 = 1$.

La posizione dei carri e quella dei pedoni sono dunque individuate da due curve che congiungono vertici opposti del quadrato. Ma due curve che congiungono vertici opposti di un quadrato si intersecano sempre in almeno un punto. Di conseguenza, esisterá sempre un istante in cui la posizione dei carri coincide con quella dei pedoni, e quindi *i due carri non riusciranno a passare*.

3.1.2 Spazio delle fasi e flusso di fase

L'esempio precedente serve ad introdurre il concetto di spazio delle fasi; in generale sappiamo che un sistema dinamico puó essere descritto dall'insieme dei suoi stati $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Possiamo dunque introdurre la seguente

Definizione 3.1 *Lo spazio delle fasi di un sistema dinamico é l'insieme M di tutti i suoi possibili stati.*

Ogni punto $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ individua uno ed un solo stato del sistema[2].

Ad esempio, se lo stato di un sistema[3] é descritto mediante tre variabili di stato x_1, x_2, x_3 ciascuna delle quali assume valori compresi tra 0 e 10, allora lo spazio delle fasi del sistema é individuato da un cubo di lato $l = 10$; in questo modo qualsiasi valore assunto dalle variabili di stato é univocamente rappresentato da un punto del cubo (vedi figura 3.3).

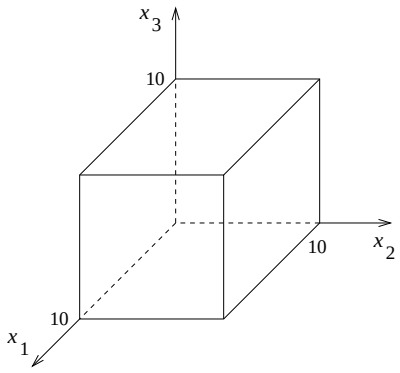

Figura 3.3: Spazio delle fasi per un sistema con tre variabili di stato che assumono valori compresi tra 0 e 10

Analogamente, se consideriamo un sistema descritto da una sola variabile di stato x, e se x puó assumere qualsiasi valore reale, il suo spazio delle fasi é individuato da una retta orientata[4]. In ogni istante di tempo t, il valore della variabile di stato $x(t)$ é individuato da un punto sulla retta.

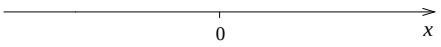

Figura 3.4: Spazio delle fasi per un sistema caratterizzato da una sola variabile di stato reale

Passiamo ora ad una nuova

[2]Osserviamo che in alcuni testi lo spazio degli stati é detto *spazio degli stati*

[3]Nel presente capitolo, consideriamo solo sistemi a tempo continuo

[4]esiste infatti una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta orientata ed i numeri reali

Definizione 3.2 *Sia M lo spazio delle fasi di un sistema, e sia*

$$X(T) = (x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T))$$

il suo stato all'istante T. Dopo un intervallo di tempo t, il sistema si troverá nello stato

$$X(T+t) = (x_1(T+t), x_2(T+t), \ldots, x_n(T+t))$$

Definiamo l'applicazione di avanzamento nel tempo (o operatore di avanzamento) g^t come la funzione che porta lo stato $X(T)$ nel nuovo stato $X(T+t)$. Scriveremo:

$$g^t(X(T)) = X(T+t)$$

Sussiste il seguente:

Teorema 3.1 *L'applicazione di avanzamento g^t e' biunivoca e la sua inversa é g^{-t}.*

Osserviamo che, per $t = 0$ si ha $X(T+t) = X(T)$, e quindi l'applicazione g^0 lascia ogni stato invariato.

Analogamente, l'applicazione g^{-t} é l'*inversa* dell'applicazione g^t, ovvero corrisponde ad un arretramento nel tempo:

$$g^{-t}X(T) = X(T-t)$$

Di conseguenza, applicando nell'ordine ad $X(T)$ sia l'operatore di avanzamento g^t che il suo inverso g^{-t}, si riottiene ancora $X(T)$; si ha infatti

$$g^{-t}(g^t X(T)) = g^{-t}X(T+t) = X(t)$$

Al variare di t, la famiglia di applicazioni g^t permette di determinare, istante per istante, l'evoluzione dello stato di un sistema. In particolare, questa evoluzione puó essere rappresentata nello spazio delle fasi mediante una linea, che congiunge tutti gli stati di un sistema ottenuti per differenti valori di t, a partire da uno stato iniziale. Questa linea é detta *curva di fase*. La famiglia di applicazioni g^t ottenuta al variare di t é detta *flusso di fase*.

Ad esempio, se consideriamo un sistema descritto da due variabili di stato (ad esempio la posizione dei pedoni nel problema di Kostantinoff) la curva che descrive istante per istante la posizione dei pedoni é una curva di fase (vedi figura 3.5).

Sussiste il seguente, importantissimo

Teorema 3.2 *Per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola curva di fase*

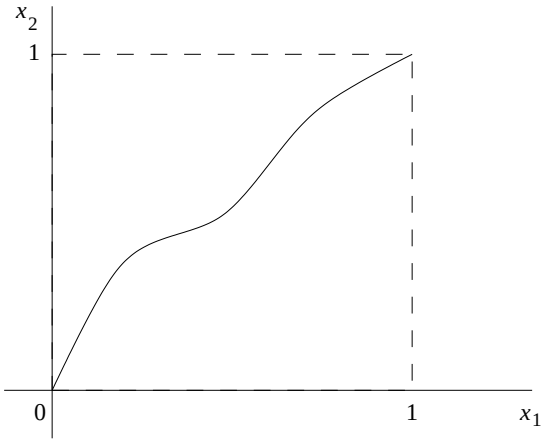

Figura 3.5: Curva di fase per un sistema lineare descritto da due variabili di stato

Questo teorema é conseguenza immediata della biunivocitá dell'applicazione di avanzamento g^t.

Per il teorema 3.2, individuato all'istante di tempo T lo stato di un sistema mediante un punto $X(T)$, risulta univocamente determinato anche lo stato del sistema in un altro istante $X(T+t)$.

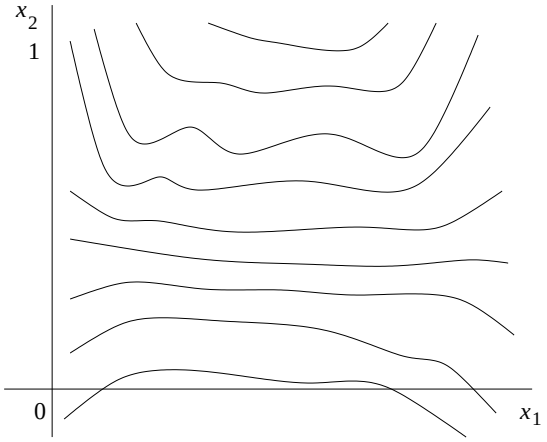

Figura 3.6: Curve di fase nello spazio delle fasi

In figura 3.6 é sono rappresentate delle curve di fase nello spazio delle fasi per un sistema con due variabili di stato. Per il teorema 3.2, le curve di fase

non si possono intersecare.

Procediamo ulteriormente:

Definizione 3.3 *Sia X un arbitrario punto dello spazio delle fasi. Il moto di un punto $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nello spazio delle fasi M per effetto di un flusso di fase g^t é l'applicazione*

$$\varphi : \mathbb{R} \to M \quad \varphi(t) = g^t(X)$$

In pratica il moto[5] di un punto é l'applicazione che associa ad ogni istante t uno ed un sol valore dello stato $g^t(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ottenuto dallo stato iniziale X mediante un avanzamento nel tempo pari a t lungo l'unica curva di fase passante per X.

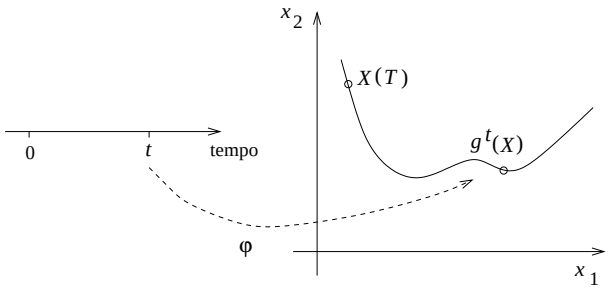

Figura 3.7: Moto di un punto rappresentativo nello spazio delle fasi per un sistema descritto da due variabili di stato

La funzione $\varphi(t)$ ha come insieme di definizione l'asse reale (o un suo sottoinsieme), che rappresenta il tempo t, ed ha come immagine una curva di fase nello spazio delle fasi.

3.1.3 Spazio delle fasi ampliato e curve integrali

In molte applicazioni, risulta utile rappresentare lo stato di un sistema in funzione del tempo; consideriamo innanzitutto un sistema caratterizzato da un solo stato $x = x(t)$; possiamo rappresentare questa funzione in un diagramma cartesiano, come in figura 3.9.

Analogamente, per un sistema caratterizzato da due variabili di stato $x_1(t)$ ed $x_2(t)$, é possibile rappresentare l'evoluzione del sistema mediante una linea nello spazio cartesiano a tre dimensioni, tale che un'asse rappresenti il tempo t, ed i rimanenti due assi rappresentino le variabili dipendenti x_1 ed x_2. Ció é rappresentato in figura 3.10.

[5] Alcuni Autori parlano di *movimento*

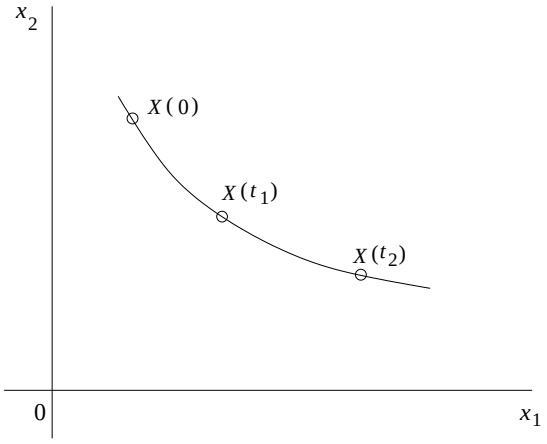

Figura 3.8: Lo stato di un sistema é univocamente determinato a partire da uno stato iniziale

Il piano (o lo spazio) cartesiano utilizzato in queste due rappresentazioni é detto *spazio delle fasi ampliato*; il grafico del moto ivi rappresentato é detto *curva integrale.*

Nel caso in cui le variabili di stato siano piú di due, la rappresentazione cartesiana non é piú intuitiva; tuttavia é possibile generalizzare quanto esposto mediante delle definizioni rigorose:

Definizione 3.4 *Dati due insiemi A, B, si dice prodotto cartesiano (o prodotto diretto) $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$.*

Definizione 3.5 *Sia*

$$f : A \to B$$

una applicazione tra due insiemi A e B. Si definisce grafico dell'applicazione f il sottoinsieme S del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito dai punti

$$S = (a, f(a)) : \quad a \in A$$

Definizione 3.6 *Si definisce spazio delle fasi ampliato di uno spazio delle fasi M il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times M$ dell'asse reale dei tempi $\mathbb{R}$ con l'insieme M. Il grafico del moto rappresentato nello spazio delle fasi ampliato é detto curva integrale.*

Sussiste il seguente corollario, immediata conseguenza del teorema 3.2:

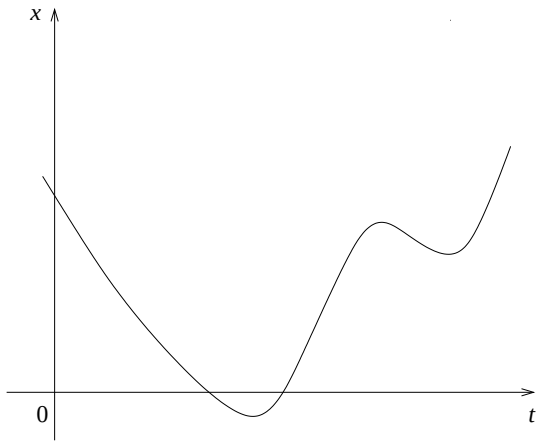

Figura 3.9: Curva integrale nello spazio delle fasi ampliato

Corollario 3.1 *Per ogni punto dello spazio delle fasi ampliato passa una ed una sola curva integrale.*

Consideriamo, ad esempio, un sistema caratterizzato da due variabili di stato x_1, x_2 e supponiamo che per il punto P $= (x_1(T), x_2(T), T)$ del suo spazio delle fasi ampliato passino due curve integrali, come in figura 3.11.

Ció significa che partendo da un istante di tempo T_1 antecedente a T é possibile raggiungere il punto P attraverso due curve integrali differenti, partendo da due punti distinti Q ed R. Ma rappresentando le corrispondenti curve di fase nello spazio delle fasi (come in figura 3.12), otteniamo due curve di fase che si intersecano nel punto $(x_1(T), x_2(T))$.

Ció contraddice il teorema 3.2, e di conseguenza due curve integrali non possono mai incontrarsi.

In figura 3.13 sono rappresentate, a titolo di esempio, delle curve integrali per un sistema caratterizzato da un solo stato.

3.2 Campi vettoriali

Consideriamo uno spazio delle fasi M ed il flusso di fase associato alla totalitá delle applicazioni di avanzamento g^t.

Al variare del tempo t, il punto X si muove nello spazio delle fasi; la velocitá di spostamento di tale punto é detta *velocitá di fase*.

Per essere piú precisi, passiamo ad una definizione rigorosa:

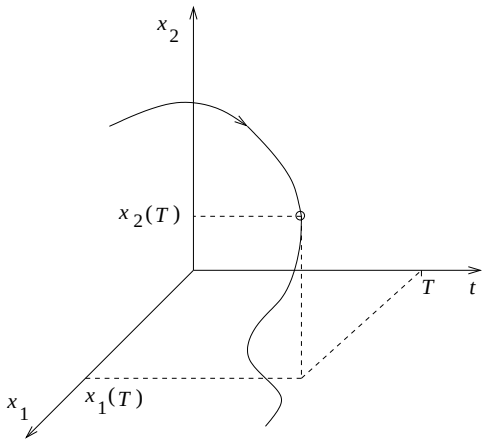

Figura 3.10: Curva integrale per un sistema caratterizzato da due variabili di stato

Definizione 3.7 *La velocitá di fase $V(X)$ in un punto X dello spazio delle fasi é il vettore velocitá con cui si sposta il punto X stesso.*

Dato che in *Meccanica* la velocitá é definita come la derivata della posizione $\vec{x}(t)$ rispetto al tempo t, ovvero come $\vec{v}(x) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$, possiamo definire la velocitá di fase in modo analogo:

$$V(X) = \dot{X}(t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \tag{3.1}$$

Se indichiamo esplicitamente con

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

la matrice rappresentante lo stato X del sistema, possiamo subito vedere che il vettore velocitá é costituito da n componenti, date da:

$$V(X) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

In poche parole, il numero delle componenti del vettore velocitá di fase é uguale al numero di variabili di stato del sistema.

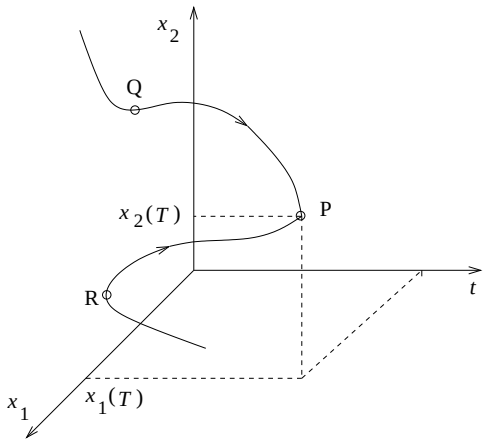

Figura 3.11: Per un punto dello spazio delle fasi ampliato non possono passare due curve integrali

In figura 3.14 é rappresentato come esempio il vettore velocitá di fase nel punto $X(T)$ per un sistema descritto da due variabili di stato; osserviamo che tale vettore é tangente alla curva di fase e che esso possiede due componenti v_1 e v_2 che possono essere calcolate come:

$$v_1(X) = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

$$v_2(X) = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

Supponiamo ora, che in ogni punto dello spazio delle fasi M sia definito uno ed un solo vettore velocitá di fase; diremo allora che su M é definito un *campo vettoriale di velocitá di fase*, o piú brevemente, un *campo vettoriale*.

Definizione 3.8 *Un campo vettoriale $V(X)$ su uno spazio delle fasi M é una applicazione che associa ad ogni punto X dello spazio delle fasi uno ed un sol vettore $V(X)$ avente il punto X stesso come origine*

Nella figura 3.15 é rappresentato un campo vettoriale per uno spazio delle fasi di dimensione due.

Nel seguito della trattazione, supporremo che le componenti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ siano funzioni differenziabili rispetto ad $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Osserviamo che un campo vettoriale definisce una *legge locale di evoluzione* dello stato del sistema; infatti se in un istante di tempo t é noto in un punto X_0 dello spazio delle fasi il vettore velocitá V é possibile stabilire lo

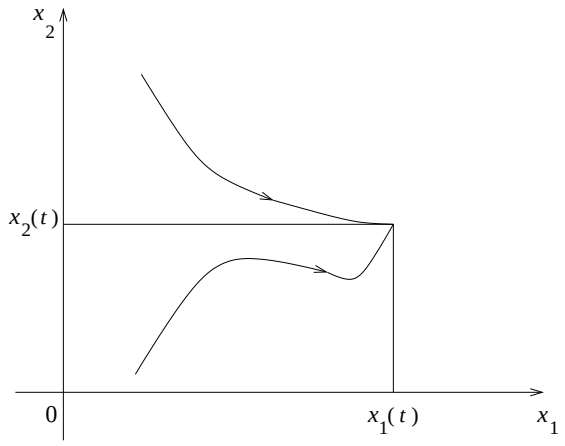

Figura 3.12: Se le curve integrali si intersecano in P, allora anche le curve di fase corrispondenti dovrebbero intersecarsi anch'esse

stato successivo X_1 del sistema nell'istante $t + \mathrm{d}t$, semplicemente osservando che la curva di fase é sempre tangente al vettore velocitá. Si osservi a proposito la figura 3.16, che si riferisce ad un sistema descritto da una sola variabile di stato x.

Particolare importanza rivestono i cosiddetti *punti fissi* (o punti di *equilibrio*) di uno spazio delle fasi:

Definizione 3.9 *Un punto X_f appartenente ad uno spazio delle fasi M é detto un punto fisso (o un punto di equilibrio) se per ogni t, si ha*

$$g^t(X_f) = X_f$$

Un punto fisso é dunque un punto non soggetto a moto; la curva di fase passante per esso si riduce al punto stesso e la curva integrale é una retta nello spazio delle fasi ampliato.

Nella figura 3.17 sono rappresentate le curve di fase in un intorno di un punto fisso X_f; la curva integrale corrispondente é rappresentata in figura 3.18. Possiamo notare che la curva integrale é una retta parallela all'asse t.

Dato che un punto fisso é privo di moto, deduciamo immediatamente il seguente:

Teorema 3.3 *In un punto fisso X_f il velocitá di fase é nullo, ovvero tutte le sue componenti sono identicamente uguali a zero.*

Osserviamo tuttavia che la velocitá di fase puó essere nulla anche in un punto non fisso. Ció conduce immediatamente alla seguente:

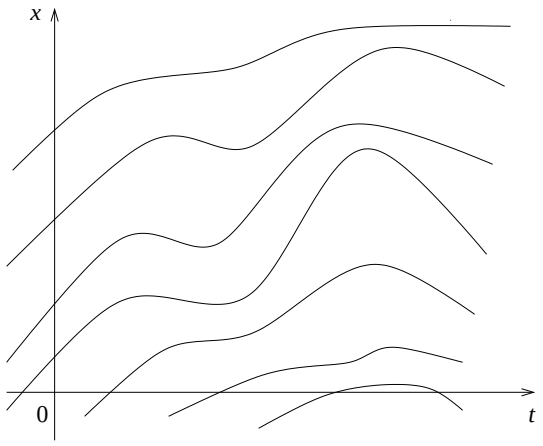

Figura 3.13: Esempio di curve integrali per un sistema caratterizzato da una sola variabile di stato

Definizione 3.10 *Un punto X in cui la velocitá di fase é nulla é detto un punto singolare.*

Ovviamente un punto fisso é anche un punto singolare, ma il viceversa non é sempre vero.

3.3 Equazione differenziale definita da un campo vettoriale

Definizione 3.11 *Sia M un dominio aperto di uno spazio euclideo di dimensione n, e sia $V(X) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un campo vettoriale (ovviamente anch'esso di dimensione n) di velocitá di fase su M. L'equazione:*

$$\dot{X}(t) = V(X); \quad X \in U \tag{3.2}$$

é detta equazione differenziale definita dal campo vettoriale V. Il dominio M é detto spazio delle fasi dell'equazione 3.2.

Il problema principale della teoria delle equazioni differenziali consiste nel determinare l'evoluzione dello stato $X(t)$ di un sistema in funzione del tempo, sia nel futuro che nel passato, noto uno stato iniziale $X(t_0)$ definito in un preciso istante di tempo t_0 e noto il campo vettoriale nello spazio delle fasi.

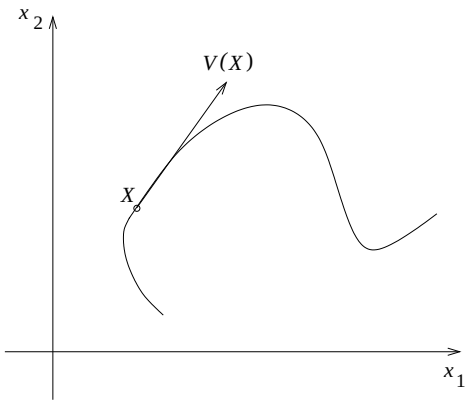

Figura 3.14: Vettore velocitá di fase

Intuitivamente, si tratta di determinare la *curva di fase* e la *curva integrale* passante per il punto $X(t_0)$ conoscendo l'andamento del campo delle velocitá di fase in ogni punto dello spazio delle fasi.

Le curve di fase possono essere tracciate anche a mano libera, se sono noti i vettori velocitá di fase in un numero sufficiente di punti; ció é illustrato in figura 3.19. Tale figura é rappresentativa del caso di un sistema descritto per mezzo di due variabili di stato.

Analogamente, é possibile determinare le curve integrali nello spazio delle fasi ampliato.

Vediamo come ció sia possibile, analizzando, senza ledere la generalitá del ragionamento, il caso relativo ad un sistema descritto da una sola variabile di stato $x(t)$.

Ricordiamo che la velocitá di fase v é definita come la derivata rispetto al tempo della variabile di stato $x(t)$; pertanto la velocitá di fase puó essere rappresentata dalla *retta tangente* alla funzione $x(t)$. Infatti, in ogni punto $(t, x(t))$ dello spazio delle fasi ampliato possiamo tracciare una retta il cui coefficiente angolare $m = \tan\alpha$ é uguale alla velocitá di fase v; ovvero:

$$\alpha = \arctan v$$

Di conseguenza, conoscere i vettori velocitá di fase é equivalente a conoscere istante per istante, nello spazio delle fasi ampliato, ed in ogni suo punto, la direzione della retta tangente alla curva integrale.

Pertanto, la determinazione della curva integrale passante per un determinato punto puó essere effettuata tracciando a mano libera la curva tangente ai segmenti rappresentati sullo spazio delle fasi ampliato ed i cui coefficienti angolari coincidono con i valori del vettore velocitá di fase.

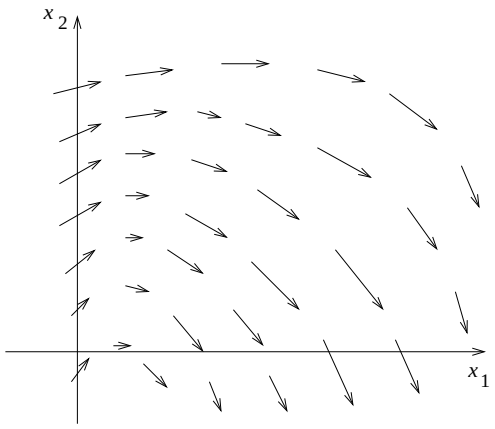

Figura 3.15: Esempio di campo vettoriale

La figura 3.20 fornisce un ulteriore chiarimento.

Questa rappresentazione, effettuata sullo spazio delle fasi ampliato, é alternativa alla rappresentazione nello spazio delle fasi, che in questo caso é unidimensionale.

Introduciamo ora la definizione rigorosa di *soluzione dell'equazione differenziale* 3.2:

Definizione 3.12 *Sia I un intervallo dell'asse reale:*

$$I = \{t \in \mathbb{R} : t_1 < t < t_2\}$$

(ammettendo anche i valori $t_1 = -\infty$; $t_2 = +\infty$). Dicesi soluzione dell'equazione differenziale 3.2 una funzione differenziabile:

$$\varphi : I \to M \tag{3.3}$$

tale che $\dot{\varphi}(t) = V(\varphi(t))$.

In poce parole, il punto $X = \varphi(t)$ deve spostarsi nello spazio delle fasi con velocitá di fase data punto per punto dal vettore $V(X)$.

L'immagine dell'applicazione $\varphi(t)$ nello spazio delle fasi é detta la *curva di fase dell'equazione 3.2.*

3.4 Determinazione delle curve integrali

Nel presente paragrafo ci occuperemo della determinazione dell'equazione delle curve integrali nei casi piú semplici.

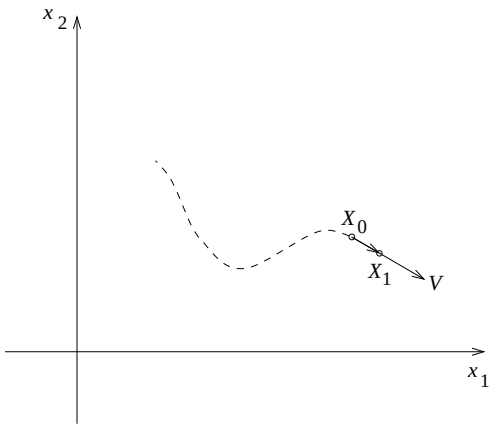

Figura 3.16: Dalla conoscenza del campo vettoriale é possibile determinare l'*evoluzione locale* dello stato del sistema

Cominciamo a considerare un sistema descritto da una sola variabile di stato $x(t)$, nel caso in cui il campo vettoriale sia costante in ogni punto dell'asse reale, e successivamente analizziamo il caso in cui il campo vettoriale dipenda linearmente dalla posizione x sulla retta.

Suddividiamo lo studio in due sottoparagrafi.

3.4.1 Equazione differenziale per un campo costante

Consideriamo un sistema descritto da una sola variabile di stato $x(t)$. In questo caso lo spazio delle fasi é costituito da una retta orientata r. Consideriamo un campo di velocitá costante, ovvero:

$$v(x) = k \tag{3.4}$$

In questo caso, in ciascun punto della retta r, il campo di velocitá puó essere rappresentato da un vettore di modulo k e parallelo alla retta stessa. Vogliamo determinare la soluzione

$$x = \varphi(t)$$

dell'equazione differenziale $\dot{x}(t) = v(x(t))$, ovvero:

$$\dot{x}(t) = k \tag{3.5}$$

soddisfacente alla *condizione iniziale*:

$$\varphi(0) = x_0 \tag{3.6}$$

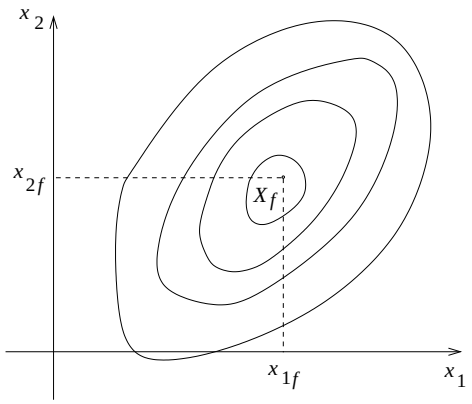

Figura 3.17: Curva di fase intorno ad un punto fisso per un sistema descritto da due variabili di stato

Fisicamente, ció corrisponde alla determinazione della *legge oraria* di un mobile puntiforme che si muove su una traiettoria rettilinea a velocitá costante. Si tratta cioé di determinare l'equazione della legge oraria nel caso di un *moto rettilineo uniforme*, conoscendo la posizione x_0 del punto materiale all'istante di tempo iniziale $t_0 = 0$. Si ha ovviamente:

$$\boxed{\varphi(t) = x_0 + k \cdot t} \tag{3.7}$$

Il lettore puó verificare che la 3.7 é soluzione della 3.5 con la condizione iniziale 3.6 derivandola rispetto al tempo. La 3.7 fornisce dunque la legge di evoluzione dello stato $x = \varphi(t)$ in funzione del tempo, ed é dunque la curva integrale cercata. Per il corollario 3.1, tale soluzione é unica. La curva integrale trovata é rappresentata in figura 3.22. Ovviamente, essendo la traiettoria rettilinea, la corrispondente curva di fase coincide con la retta r. Osserviamo infine che se il campo é ovunque nullo ($k = 0$), si ha dalla 3.7 la soluzione $x = x_0$, e quindi in questo caso ogni punto della retta é un *punto di equilibrio* (o *punto fisso*).

3.4.2 Campo proporzionale alla distanza

Consideriamo ancora il caso di un sistema descritto da una sola variabile di stato $x(t)$, e supponiamo stavolta che il campo di velocitá $v(x)$ sia proporzionale ad $x(t)$, ovvero:

$$v(x) = k \cdot x \tag{3.8}$$

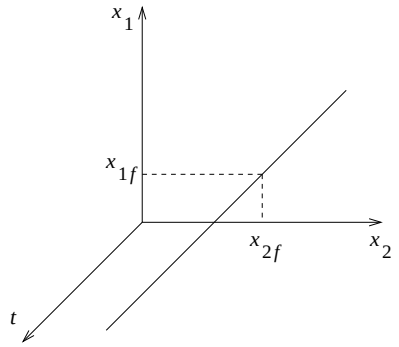

Figura 3.18: Curva integrale relativa ad un punto fisso per un sistema descritto da due variabili di stato

Vogliamo determinare la soluzione

$$x = \varphi(t)$$

dell'equazione differenziale $\dot{x}(t) = v(x(t))$, che in questo caso si scrive come:

$$\dot{x}(t) = k \cdot x, \quad k \neq 0 \tag{3.9}$$

soddisfacente alla condizione iniziale:

$$x(0) = x_0 \tag{3.10}$$

Osserviamo innanzitutto che il campo vettoriale v puó essere rappresentato come in figura 3.23, ovvero é costituito da vettori di modulo proporzionale ad x. Per risolvere la 3.9, consideriamo innanzitutto il caso in cui $k = 1$. La 3.9 diviene allora:

$$\dot{x}(t) = x(t) \tag{3.11}$$

Osservando che la derivata rispetto al tempo di e^t é ancora e^t, otteniamo che una soluzione $x = \varphi(t)$ soddisfacente la 3.11 con la condizione iniziale 3.10 é:

$$\varphi(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^t \tag{3.12}$$

Per il corollario 3.1, tale soluzione é unica. Passiamo ora al caso generale; in questo caso dobbiano determinare una funzione $x = \varphi(t)$ tale che la sua derivata rispetto a t sia la funzione stessa, moltiplicata per k. In questo caso, osserviamo che la derivata rispetto al tempo di e^{kt} é $k \cdot \mathrm{e}^{kt}$. Per soddisfare la condizione iniziale, ci basta ora moltiplicare questa funzione per x_0, ottenento:

$$\varphi(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

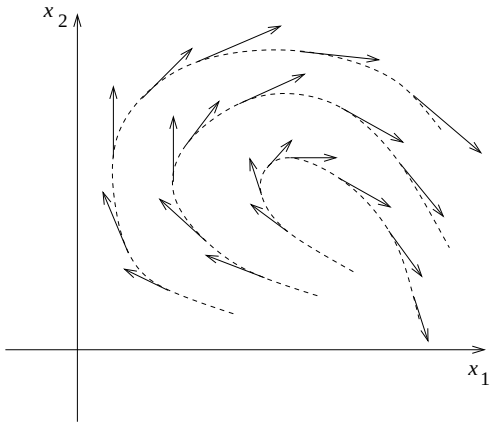

Figura 3.19: Tracciamento delle curve di fase noto il campo vettoriale delle velocitá di fase

Tale soluzione é unica, sempre per il corollario 3.1. Tutto ció puó essere sintetizzato nel seguente

Teorema 3.4 *La soluzione $x = \varphi(t)$ dell'equazione differenziale 3.9 soddisfacente alla condizione iniziale 3.10 é:*

$$\varphi(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{kt} \tag{3.13}$$

La soluzione é dunque un

- esponenziale descrescente tendente a zero per $t \to +\infty$, se $k < 0$ e $x_0 > 0$
- esponenziale crescente tendente a zero per $t \to +\infty$, se $k < 0$ e $x_0 < 0$
- esponenziale tendente a $+\infty$ per $t \to +\infty$, se $k > 0$ e $x_0 > 0$
- esponenziale tendente a $-\infty$ per $t \to +\infty$, se $k > 0$ e $x_0 < 0$
- $x = 0$, se $x_0 = 0$

Queste curve integrali sono rappresentate in figura 3.24

3.5 Sistemi di equazioni differenziali

Passiamo ora all'analisi (principalmente *qualitativa*) delle curve di fase e delle curve integrali per sistemi di equazioni differenziali.

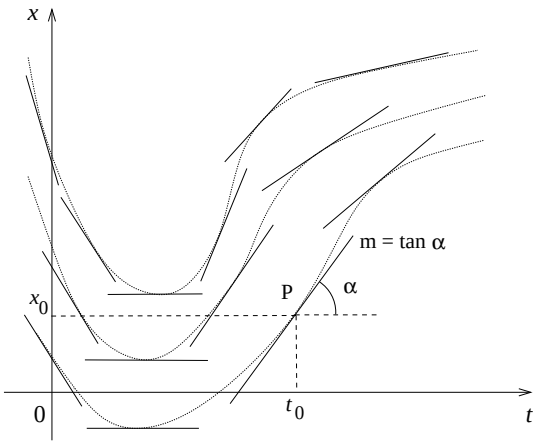

Figura 3.20: Tracciamento delle curve integrali noto il campo di velocitá nello spazio delle fasi ampliato

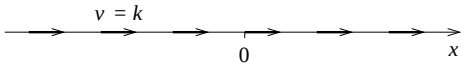

Figura 3.21: Campo vettoriale costante su una retta

Abbiamo giá avuto a che fare con esse, scrivendo le equazioni di stato di un sistema lineare a tempo continuo:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

ove A e B sono due matrici di numeri reali.

Nel caso in cui la matrice B sia nulla, l'equazione di stato diventa:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) \tag{3.14}$$

e pertanto l'evoluzione dello stato non dipende dagli ingressi del sistema. Parleremo in questo caso di *sistema autonomo*.

Nel presente paragrafo vogliamo studiare le curve di fase e le curve integrali per una equazione differenziale piú generale della 3.14, ovvero per l'equazione differenziale

$$\dot{X}(t) = V(X) \tag{3.15}$$

ove $V(X)$ é un campo vettoriale. Questa equazione é piú generale della 3.14, potendola applicare a sistemi autonomi *non lineari*. Cominciamo da un semplice sistema, costituito da un *pendolo matematico*.

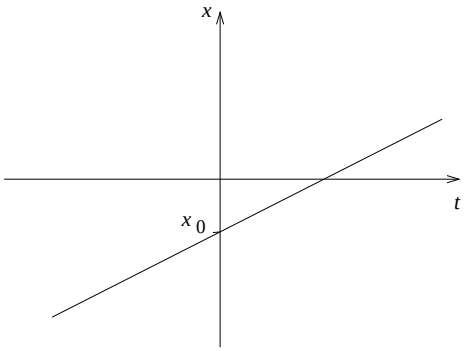

Figura 3.22: Curva integrale per un campo costante su una retta

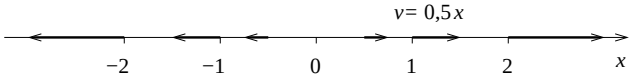

Figura 3.23: Campo proporzionale alla distanza

3.5.1 Campo vettoriale per un pendolo matematico

Consideriamo un *pendolo matematico*, ovvero una idealizzazione matematica di un comune pendolo.

Definizione 3.13 *Un pendolo matematico é un sistema costituito da una massa puntiforme m collegata ad un filo inestensibile di lunghezza l e privo di massa, oscillante senza attriti in un piano verticale e soggetto ad un campo gravitazionale costante $\vec{g}$ diretto come la verticale.*

Possiamo rappresentare il pendolo matematico come in figura 3.25, ove vengono inoltre rappresentate le forze agenti sul grave.

La forza $\vec{T}$ rappresenta la tensione a cui é soggetto il filo, per effetto della forza peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$; in figura 3.25 viene inoltre rappresentata la *componente tangenziale* della forza peso $\vec{F} = -m \cdot \vec{a}$, ove $\vec{a}$ indica *accelerazione tangenziale* del punto materiale (il segno meno sta a significare che l'accelerazione tangenziale ha verso contrario alla forza F).

Indicando con θ l'angolo formato dal filo rispetto alla verticale, e scomponendo la forza peso $\vec{P}$ lungo le direzioni individuate dai vettori $\vec{T}$ e $\vec{F}$, otteniamo le relazioni:

$$\begin{aligned} T &= m \cdot g \cdot \cos\theta \\ F &= m \cdot g \cdot \sin\theta = -m \cdot a \end{aligned} \tag{3.16}$$

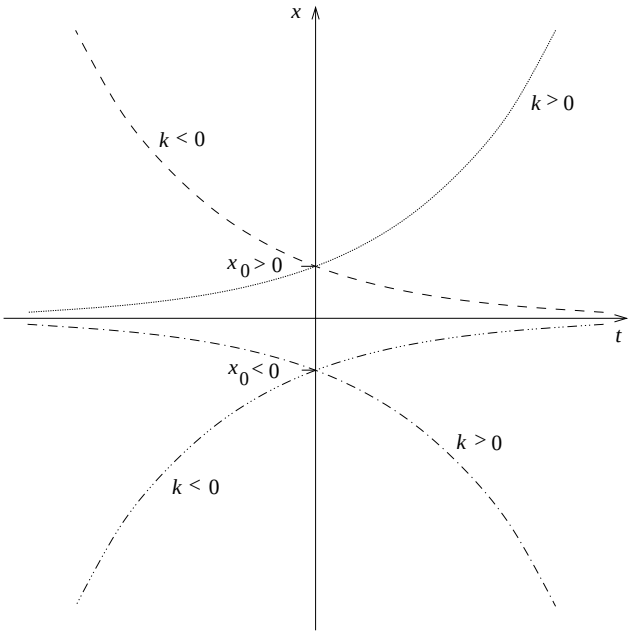

Figura 3.24: Curve integrali nel caso di campo proporzionale alla distanza

Osserviamo ora che l'angolo θ é legato alla *velocitá angolare* ω ed all'*accelerazione angolare* α dalle relazioni:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

e che l'accelerazione tangenziale é legata all'accelerazione angolare dalla relazione:

$$a = \alpha \cdot l$$

possiamo riscrivere la 3.16 come:

$$-m \cdot l \cdot \ddot{\theta} = m \cdot g \cdot \sin\theta \tag{3.17}$$

da cui otteniamo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta \tag{3.18}$$

Osservando che $\omega = \dot{\theta}$ e che $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, possiamo scrivere il seguente *sistema di equazioni differenziali*:

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \tag{3.19}$$

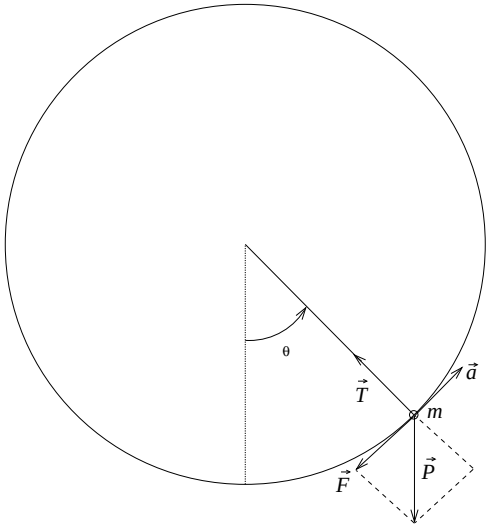

Figura 3.25: Pendolo matematico

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$$

Se prendiamo come *variabili di stato* l'angolo θ e la velocitá angolare ω, ovvero se poniamo:

$$x_1(t) = \theta(t)$$
$$x_2(t) = \omega(t)$$

otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.20}$$
$$\dot{x}_2 = -k \cdot \sin x_1$$

con $k = \frac{g}{l}$. Trattasi di un sistema *non lineare*, in quanto la dipendenza di $\dot{x}_2$ da x_1 non é lineare, per la presenza della funzione seno[6].

Le componenti del campo vettoriale associato al pendolo matematico sono determinate dai secondi membri del sistema 3.20, ovvero:

$$v_1 = x_2$$

[6]Osserviamo tuttavia che per piccoli angoli, si ha $\sin\theta \approx \theta$, e di conseguenza il sistema 3.20 puó essere sostituito dal sistema lineare

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1$$

$$v_2 = -k \cdot \sin x_1$$

Questo campo vettoriale é rappresentato, nel caso $k = 1$ in figura 3.26.

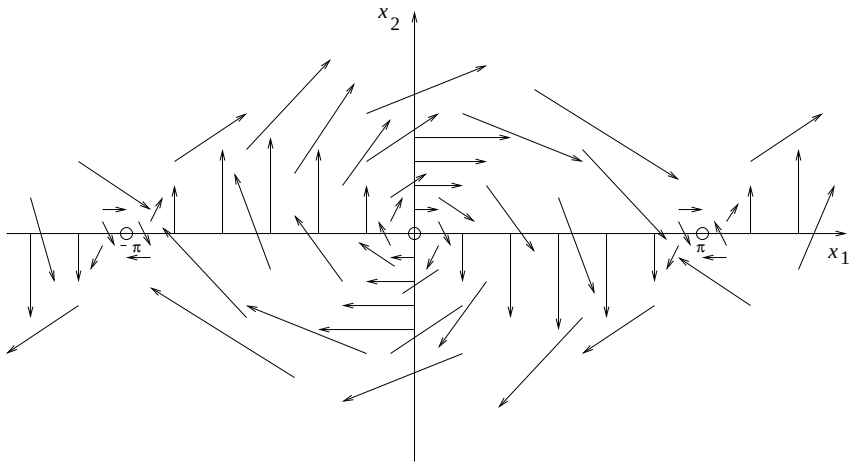

Figura 3.26: Campo vettoriale per un pendolo matematico

Questo campo si annulla nei punti di coordinate $(x_1 = m \cdot \pi, x_2 = 0)$, con m intero. Di conseguenza, tutti questi punti, rappresentati con un circoletto in figura 3.26 sono dei *punti singolari*.

Si noti che muovendosi nell'intorno di un punto singolare, il campo vettoriale delle velocitá cambia continuamente la sua direzione.

Osserviamo che il campo vettoriale é periodico, rispetto alla variabile x_1 di periodo 2π; pertanto esso puó essere rappresentato sulla superficie di un cilindro avente base circolare di circonferenza pari a 2π (vedi figura 3.27).

Per piccoli angoli, vale quanto detto nella nota a pié di pagina, ed il sistema puó essere sostituito dal *sistema linearizzato*

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1$$

In questo caso il campo vettoriale é rappresentato in figura 3.28; (sempre per $k = 1$); notiamo come allontanandosi dall'asse verticale il campo ottenuto si discosti notevolmente dal campo reale disegnato in figura 3.26. Ció é indice della perdita di validitá della linearizzazione per grandi angoli[7]

[7]Occorre osservare che il *periodo delle oscillazioni del pendolo* puó essere determinato risolvendo il sistema di equazioni differenziali. Nel caso del sistema linearizzato, si puó

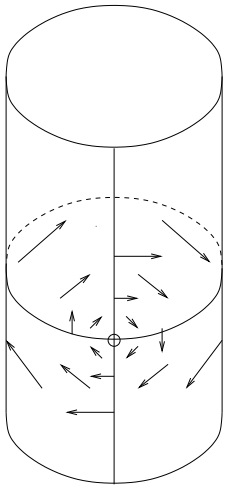

Figura 3.27: Campo vettoriale per un pendolo matematico rappresentato su un cilindro

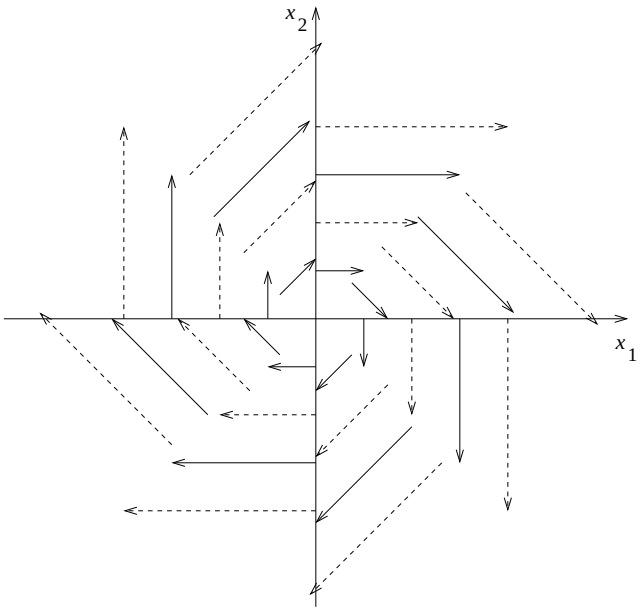

Figura 3.28: Campo vettoriale *linearizzato* per un pendolo matematico

3.5.2 Significato delle curve di fase per un pendolo matematico

Passiamo ora all'analisi delle curve di fase relative ad un pendolo matematico. Cominciamo ad analizzare la curva di fase relativa alla posizione iniziale:

$$x_1(0) = \theta(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2(0) = \omega(0) = 0$$

Fisicamente, ció corrisponde a posizionare un pendolo a 45 gradi rispetto alla verticale e successivamente lasciarlo libero di oscillare. La curva di fase corrispondente deve pertanto passare per il punto A di figura 3.29, ed é pertanto univocamente individuata dal campo di velocitá.

La curva di fase é chiusa, e ció é in accordo con la proprietá di *periodicitá* del movimento del pendolo. Nella stessa figura sono illustrate le posizioni del pendolo durante la prima semioscillazione. Osserviamo che l'ascissa x_1 rappresenta l'angolo di inclinazione rispetto alla verticale[8], e che l'ordinata x_2 rappresenta la velocitá angolare ω del punto materiale. Ricordando che il modulo della velocitá $\dot{v}$ é proporzionale ad ω (si ha infatti $v = \omega \cdot l$), possiamo osservare che la velocitá del pendolo é massima (in modulo) nei punti C e G, corrispondenti ai passaggi della massa per la verticale. Viceversa, nel punto E, di ascissa uguale ed opposta a quella del punto A, la velocitá é nulla ed il pendolo inverte il suo moto.

Nel caso in cui si desideri tracciare la curva di fase per il campo vettoriale ricavato dalla linearizzazione delle equazioni differenziali, si puó osservare dalla figura 3.28 che le curve di fase sono delle circonferenze; una di esse, relativa alla posizione iniziale $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = 0$ é rappresentata in figura 3.30

---

dimostrare che il periodo delle oscillazioni é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

mentre dal sistema esatto si ottiene

$$T = 2\pi[1 + \frac{1}{16} \cdot \theta_{max}^2 + \ldots] \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ove θ_{max} rappresenta l'angolo massimo di oscillazione del perdolo. Considerando un angolo di soli 0,1 radianti (cioé di soli $5,73\ldots$ gradi) ed utilizzando il valore determinato dalla formula linearizzata, si commette un errore pari allo 0,0625 % . Occorre dunque una certa cautela nell'utilizzo di modelli approssimati nel caso si desideri una grande precisione di calcolo. Per maggiori dettagli si rimanda a [24] e [29].

[8] misurato in senso antiorario

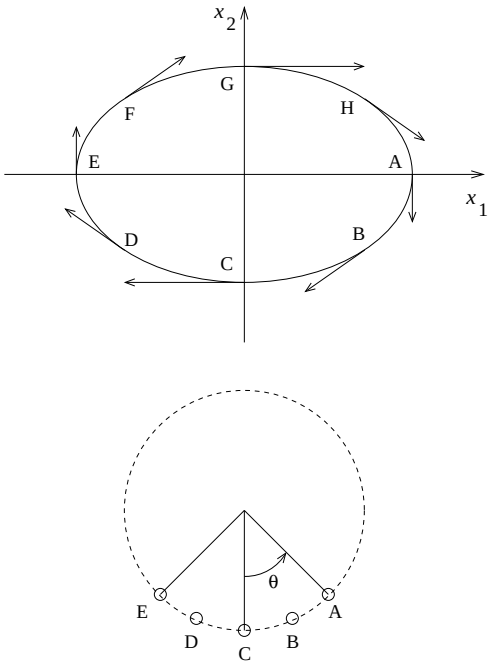

Figura 3.29: Determinazione della curva di fase per un pendolo oscillante

Possiamo osservare la notevole diversitá della curva di fase rispetto a quella esatta rappresentata in figura 3.29, ad ulteriore conferma della perdita di validitá della linearizzazione per angoli non sufficientemente piccoli.

Passiamo ora all'analisi delle curve di fase nel caso in cui il pendolo parta all'istante di tempo $t = 0$ dalla posizione piú alta con velocitá iniziale diversa da zero. Sia cioé:

$$x_1(0) = \theta(0) = \pi$$

$$x_2(0) = \omega(0) = \omega_0 > 0$$

In questo caso la curva di fase deve passare per il punto A rappresentato in figura 3.31; possiamo notare che questa curva non é chiusa in quanto, dopo che il pendolo ha compiuto un giro completo (cioé una rotazione di $2 \cdot \pi$ radianti, si trova nel punto B con la stessa velocitá che aveva nel punto A. Il pendolo continua dunque a ruotare su se stesso.

3.5.3 Determinazione analitica della curva di fase

Passiamo ora ad analizzare come la determinazione delle curve di fase per un pendolo oscillante sia assai semplice nel caso in cui si utilizzino le equazioni

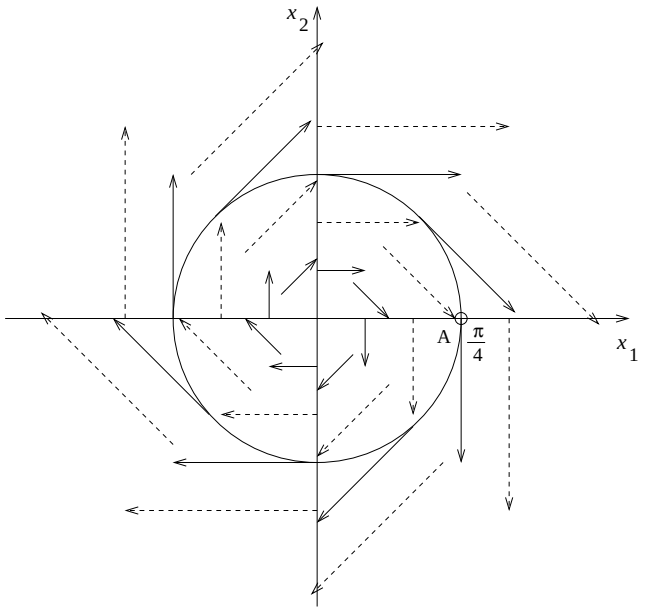

Figura 3.30: Curva di fase per il campo ottenuto mediante linearizzazione delle equazioni

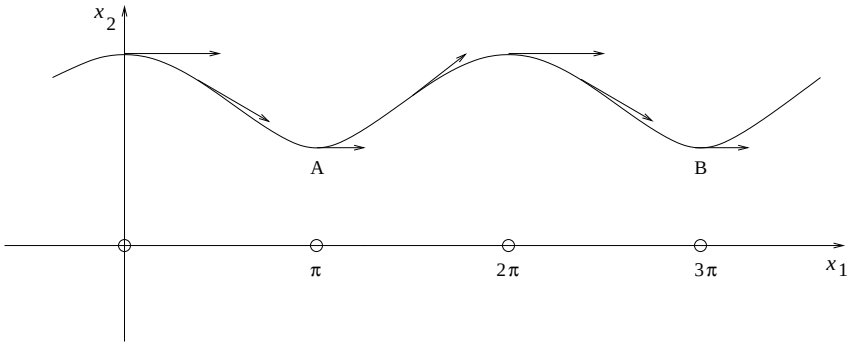

Figura 3.31: Curva di fase per un pendolo che parte dal punto piú alto con velocitá iniziale non nulla

linearizzate:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1$$

Osserviamo che l'origine $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ é un punto singolare.

Senza ledere la generalitá, possiamo supporre $k = 1$; in ogni caso ció é sempre attuabile con una opportuna scelta dell'unitá di misura del tempo[9]

Otteniamo dunque il seguente sistema di equazioni:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.21}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

Lo spazio delle fasi é il piano cartesiano;

Ogni punto del piano cartesiano (x_1, x_2) diverso dall'origine puó essere rappresentato in *coordinate polari* ϱ, ϕ mediante la seguente trasformazione biunivoca dalle variabili x_1, x_2 alle nuove variabili ϱ, ϕ:

$$x_1 = \varrho \cdot \cos\phi \tag{3.22}$$

$$x_2 = \varrho \cdot \sin\phi$$

Per dettagli, vedi figura 3.32

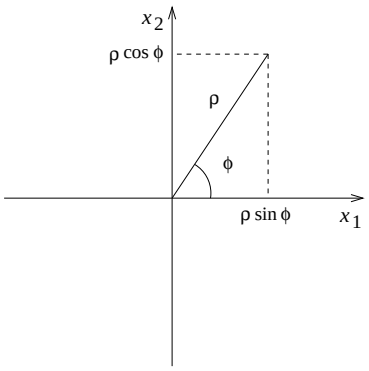

Figura 3.32: Rappresentazione di un punto in coordinate polari

[9]Sia, ad esempio $g = 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $l = 2 \cdot g$. Allora: $k = \frac{g}{l} = 2$ Introduciamo ora una nuova unitá di misura di tempo, che chiameremo *newsecond* e che abbrevieremo con n, ponendo: $1\,\mathrm{secondo} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{newsecond}$. Otteniamo allora il nuovo valore del campo gravitazionale: $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9,81 \cdot (\sqrt{2})^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}^2} = 2 \cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}^2}$ Segue allora $k = \frac{g}{l} = 1$.

Deriviamo rispetto al tempo le 3.22[10]. Otteniamo:

$$\dot{x}_1 = \dot{\varrho} \cdot \cos\phi - \varrho \cdot \dot{\phi} \sin\phi \tag{3.23}$$
$$\dot{x}_2 = \dot{\varrho} \cdot \sin\phi + \varrho \cdot \dot{\phi} \cos\phi$$

Sostituendo le equazioni 3.22 e 3.23 nelle 3.21 otteniamo:

$$\dot{\varrho} = 0 \tag{3.24}$$
$$\dot{\phi} = -1$$

Il campo vettoriale delle velocitá, nelle nuove coordinate ϱ e ϕ é il seguente:

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = -1$$

ed é rappresentato in figura 3.33.

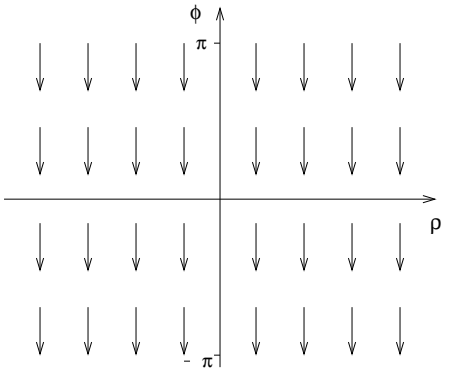

Figura 3.33: Campo di velocitá di un pendolo in coordinate polari

Le equazioni 3.24 possono essere risolte separatamente, e dato che ci siamo ricondotti ad un campo di velocitá costante, la soluzione é determinabile secondo la procedura del paragrafo 3.4.1.

Si ha immediatamente:

$$\varrho(t) = \varrho_0 \tag{3.25}$$
$$\phi = -t + \phi_0 \tag{3.26}$$

[10]Nel calcolare la derivata occorre osservare che sia $\varrho = \varrho(t)$ che $\phi = \phi(t)$ sono funzioni del tempo t.

ove ϱ_0 e ϕ_0 sono due costanti dipendenti dalle condizioni iniziali (posizione angolare $\theta(0)$ e velocitá angolare $\omega(0)$ del pendolo nell'istante $t = 0$).

Sostituendo le 3.25 e 3.26 nelle 3.22, otteniamo la soluzione desiderata:

$$\boxed{x_1(t) = \varrho_0 \cdot \cos(-t + \phi_0)} \tag{3.27}$$

$$\boxed{x_2(t) = \varrho_0 \cdot \sin(-t + \phi_0)} \tag{3.28}$$

Utilizzando l'identitá trigonometrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ed elevando al quadrato le 3.27 e 3.28 si ottiene l'equazione delle curve di fase (ad esclusione di quella passante per l'origine, che é ridotta ad un punto[11]):

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2} \tag{3.29}$$

Le curve di fase sono dunque delle circonferenze centrate nell'origine.

Esercizio

Determinare la curva di fase e la curva integrale relativa alla posizione iniziale:

$$x_1(0) = \theta(0) = \frac{\pi}{12}$$

$$x_2(0) = \omega(0) = 0$$

Soluzione

Sostituendo i valori iniziali di x_1 e di x_2 nelle 3.27 e 3.28 si ottiene:

$$\frac{\pi}{12} = \varrho_0 \cdot \cos \phi_0$$

$$0 = \varrho_0 \cdot \sin \phi_0$$

Dalla seconda equazione ricaviamo immediatamente

$$\phi_0 = 0$$

che sostituito nella prima equazione ci permette di determinare il valore di ϱ_0:

$$\varrho_0 = \frac{\pi}{12}$$

La curva integrale é data allora dalle seguenti equazioni:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} \cdot \cos t$$

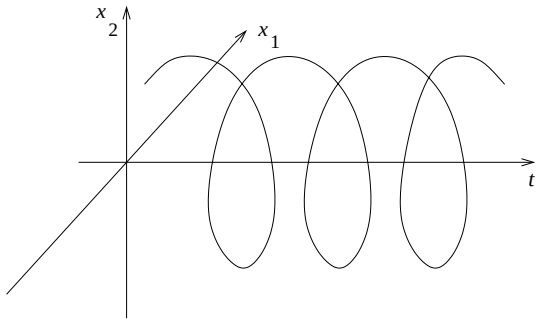

Figura 3.34: Curva integrale per un pendolo matematico per piccole oscillazioni

$$x_2 = -\frac{\pi}{12} \cdot \sin t$$

Essa é un'*elica*, come rappresentato in figura 3.34. La curva di fase é una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\varrho_0 = \frac{\pi}{12}$:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{\pi^2}{144}$$

3.5.4 Sistemi di equazioni differenziali lineari

Passiamo ora all'analisi delle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari, ovvero sistemi di equazioni differenziali nelle incognite

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

che possono essere scritti in forma matriciale come:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) \tag{3.30}$$

ove

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

e dove A é una matrice quadrata di ordine n di elementi reali. Questo sistema di equazione coincide con il sistema di equazioni di stato di un sistema lineare a tempo continuo, nel caso in cui gli ingressi siano nulli, oppure nel caso in cui l'evoluzione dello stato non dipende dagli ingressi (sistemi autonomi).

[11] l'origine é infatti un punto fisso.

Nel paragrafo 3.4.1 abbiamo esaminato il caso in cui lo spazio delle fasi é monodimensionale; passiamo ora all'analisi del caso in cui esso sia n–dimensionale.

3.5.5 L'esponenziale di una matrice

Ricordiamo che la funzione esponenziale e^x puó essere scritta come serie di potenze (vedi Appendice B):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Estendiamo questa nozione, introducendo l'*esponenziale di una matrice quadrata*:

Definizione 3.14 *Sia A una matrice quadrata di ordine n i cui elementi siano numeri reali. Allora l'esponenziale della matrice A é anch'essa una matrice quadrata di ordine n definita come:*

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \ldots \tag{3.31}$$

Sia ora t una variabile reale. Allora possiamo definire l'esponenziale della matrice $A \cdot t$ nello stesso modo:

$$\exp(At) = I + A \cdot t + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{A^3 \cdot t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} + \ldots \tag{3.32}$$

Consideriamo ad esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Si ha:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = A$$

$$\ldots$$

Di conseguenza, si ha:

$$\begin{aligned}\exp(At) &= I + A\cdot t + \frac{A^2\cdot t^2}{2!} + \frac{A^3\cdot t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{-t^2}{2!} & 0\\ 0 & \frac{-t^2}{2!}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \frac{t^3}{3!}\\ \frac{-t^3}{3!} & 0\end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix}1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\dots & -t+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^5}{5!}+\dots\\ t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\dots & 1+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+\dots\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.34}$$

Utilizzando gli sviluppi in serie di potenze delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ riportati in appendice B, otteniamo:

$$\exp(A\cdot t) = \begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix} \tag{3.35}$$

3.5.6 Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari

Nel caso monodimensionale, avevamo ricavato la soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = a\cdot x \quad a\in\mathbb{R}$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$x(0) = x_0$$

La soluzione é infatti:

$$x(t) = x_0\cdot \mathrm{e}^{at}$$

Il seguente teorema[12] estende questo risultato ai sistemi di equazioni differenziali lineari:

Teorema 3.5 *Sia dato il sistema di equazioni differenziali lineari:*

$$\dot{X}(t) = A\cdot X(t) \tag{3.36}$$

ove

$$X(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \dots\\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

[12]La dimostrazione presenta alcuni passaggi tecnici che vengono solitamente trattati nei corsi universitari, e viene di conseguenza omessa.

e dove A é una matrice quadrata di ordine n a elementi reali.

Data la condizione iniziale

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \cdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

esiste una ed una sola soluzione, e precisamente:

$$X(t) = \exp(A \cdot t) \cdot X_0 \tag{3.38}$$

Esempio

Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\dot{X} = A \cdot X$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nota la condizione iniziale

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Soluzione

L'esponenziale della matrice $A \cdot t$ é giá stato calcolato nel paragrafo 3.5.5:

$$\exp(A \cdot t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

La soluzione é allora la seguente:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos t + 3 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \sin t - 3 \cdot \cos t \end{bmatrix}$$

La soluzione puó essere anche scritta come:

$$x_1(t) = 2 \cdot \cos t + 3 \cdot \sin t$$

$$x_2(t) = 2 \cdot \sin t - 3 \cdot \cos t$$

Esempio

Determinare la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\dot{X} = A \cdot X$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e soddisfacente alla condizione iniziale

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Osservando che la matrice A coincide con la matrice unitá I, segue che $A^n = I$ per ogni intero positivo n. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \exp(At) &= I + A \cdot t + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{A^3 \cdot t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze di e^x riportato in Appendice B, possiamo scrivere

$$\exp(A \cdot t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

La soluzione é pertanto:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 5 \cdot \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

3.5.7 Teorema di equivalenza

Capita a volte di avere a che fare con equazioni differenziali del tipo:

$$x^{(n)}(t) + h_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + h_n x(t) = 0 \tag{3.40}$$

in cui compare la funzione incognita $x(t)$ e le sue derivate, sino all'ordine n. Osserviamo che questa equazione corrisponde alla *descrizione esterna* di un

sistema autonomo; infatti si tratta di un caso particolare dell'equazione 1.70, quando tutti i coefficienti k_i relativi all'ingresso $u(t)$ ed alle sue derivate sono uguali a zero.

Possiamo dunque passare ad una *realizzazione* del sistema, ad esempio in *forma canonica di ricostruzione*, ottenendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -h_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -h_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -h_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -h_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -h_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ci si riconduce di conseguenza alla risoluzione di un sistema di equazioni differenziali del tipo:

$$\dot{X} = A \cdot X$$

ovvero al calcolo dell'esponenziale della matrice $A \cdot t$.

Siccome il processo di *realizzazione* non é univoco, esistono altri modi di passare ad un sistema di equazioni lineari autonomo. Ad esempio, sussiste il teorema di equivalenza, valido anche per equazioni differenziali non lineari di ordine superiore al primo; per poterlo enunciare ci occorrono due definizioni preliminari:

Definizione 3.15 *Sia $f(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ una funzione differenziabile, definita in un dominio $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dello spazio euclideo n–dimensionale. Si dice equazione differenziale di ordine n una equazione del tipo:*

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) \tag{3.41}$$

Definizione 3.16 *Diremo che una applicazione $x = \varphi(t)$, con $a \leq t \leq b$ é una soluzione dell'equazione differenziale 3.41 soddisfacente alle condizioni iniziali:*

$$\begin{gathered} \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi^{(1)}(0) = \varphi_{10} \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_{(n-1)0} \end{gathered} \tag{3.42}$$

se per ogni $t \in (a, b)$ *si ha*

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t))$$

Osserviamo che, per determinare la soluzione, occorrono n condizioni iniziali, pari cioé all'ordine massimo di derivazione presente nell'equazione differenziale. Si pensi a tal proposito all'equazione del pendolo matematico (del secondo ordine), che necessita di due condizioni iniziali (angolo di inclinazione e velocitá angolare).

Teorema 3.6 *Sia data una equazione differenziale di ordine* n*:*

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)) \tag{3.43}$$

Allora esso é equivalente al sistema di n *equazioni differenziali nelle incognite* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*:*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\ldots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

La verifica é immediata e viene lasciata al lettore per esercizio. Tale teorema é giá stato utilizzato per ricondurre l'equazione differenziale del pendolo matematico 3.18 nel sistema di due equazioni differenziali del primo ordine.

Sussiste inoltre il seguente

Corollario 3.2 *Sia data una equazione differenziale lineare di ordine* n*:*

$$x^{(n)}(t) + h_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + h_n x(t) = 0 \tag{3.44}$$

Allora essa é equivalente al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\ldots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -h_n \cdot x_1 - h_{n-1} \cdot x_2 - \cdots - h_1 \cdot x_n
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Osserviamo che il sistema 3.45 puó essere riscritto nella forma matriciale

$$\dot{X} = A \cdot X$$

con

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ed

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -h_n & -h_{n-1} & -h_{n-2} & \dots & -h_2 & -h_1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo cioé ritrovato la matrice A ottenuta mediante la realizzazione in *forma canonica di controllo*, nel caso particolare di un sistema autonomo.

Si ha pertanto il seguente:

Teorema 3.7 *L'applicazione del corollario 3.2 ad un sistema autonomo é equivalente ad una realizzazione in forma canonica di controllo.*

Esercizio

Determinare le curve integrali dell'equazione differenziale:

$$x^{(2)}(t) - x(t) = 0$$

Soluzione

Per il teorema 3.7, possiamo ottenere un sistema di due equazioni nelle incognite x_1, x_2 del tipo $\dot{X} = A \cdot X$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo stesso risultato si ottiene ponendo $x_1(t) = x(t)$ ed $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$.

Con semplici calcoli si ricava:

$$A^2 = I$$

$$A^3 = A$$

...

e di conseguenza:

$$\exp(A \cdot t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{bmatrix}$$

Ricordando lo sviluppo in serie delle funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$ riportate in appendice B, otteniamo:

$$\exp A \cdot t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

Indicando le condizioni iniziali con

$$X(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

otteniamo infine

$$X(t) = \exp(A \cdot t) \cdot X(0) = \begin{bmatrix} c_1 \cdot \cosh t + c_2 \cdot \sinh t \\ c_1 \cdot \sinh t + c_2 \cdot \cosh t \end{bmatrix}$$

Si ha pertanto:

$$x_1(t) = c_1 \cdot \cosh t + c_2 \cdot \sinh t$$
$$x_2(t) = c_1 \cdot \cosh t + c_2 \cdot \sinh t$$

Ricordando che $x(t) = x_1(t)$ le curve integrali sono pertanto le seguenti:

$$x(t) = c_1 \cdot \cosh t + c_2 \cdot \sinh t$$

3.6 Complementi

Concludiamo il capitolo con una curiositá, che presenta interessanti applicazioni anche al di fuori della teoria delle equazioni differenziali.

3.6.1 Definizioni preliminari

Consideriamo una circonferenza $\mathbb{T}^1$ di raggio unitario. Allora ogni punto della retta appartenente all'intervallo $\mathbb{I}_0 = [0, 2\pi)$ é in corrispondenza biunivoca con un punto della circonferenza.

Infatti, se consideriamo l'applicazione

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$$

definita come:

$$\theta(x) = \mathrm{e}^{ix} = \cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x$$

e se rappresentiamo la circonferenza unitaria sul piano complesso (centrandola nell'origine), otteniamo una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'intervallo $\mathbb{I}_0$ ed i punti della circonferenza. Ció é illustrato in figura 3.35.

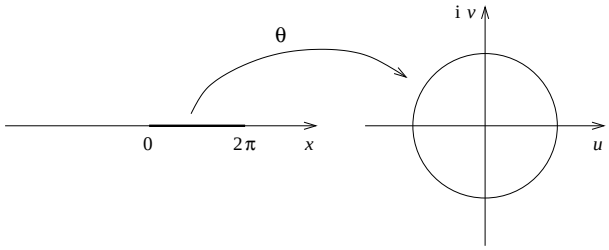

Figura 3.35: Corrispondenza tra i punti di una retta e una circonferenza

É importante osservare che i punti dell'intervallo $\mathbb{I}_n = [2n\pi, (2n+1)\pi)$ con n intero sono anch'essi in corrispondenza biunivoca con i punti della circonferenza $\mathbb{T}^1$, e ció a causa della periodicitá di 2π delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

Definizione 3.17 *Sia $\mathbb{T}^1$ la circonferenza di raggio unitario. Definiamo il toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$ come il prodotto cartesiano:*

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$$

Il toro bidimensionale é rappresentato in figura 3.36; ogni punto del piano cartesiano di coordinate x_1, x_2 soddisfacenti alla condizione $x_1 \in \mathbb{I}_0$ ed $x_2 \in \mathbb{I}_0$ puó essere messo in corrispondenza biunivoca mediante la trasformazione:

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$$

definita come:

$$\tau(x_1, x_2) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2})$$

Osserviamo che ogni punto del toro bidimensionale é univocamente determinato dai due angoli α e β, ciascuno dei quali é definito univocamente su una circonferenza di raggio unitario, e tali che il prodotto cartesiano delle due circonferenze rappresenti il toro bidimensionale.

Infatti la trasformazione τ individua una coppia di numeri complessi di modulo uno:

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1} = \cos x_1 + \mathrm{i} \sin x_1$$

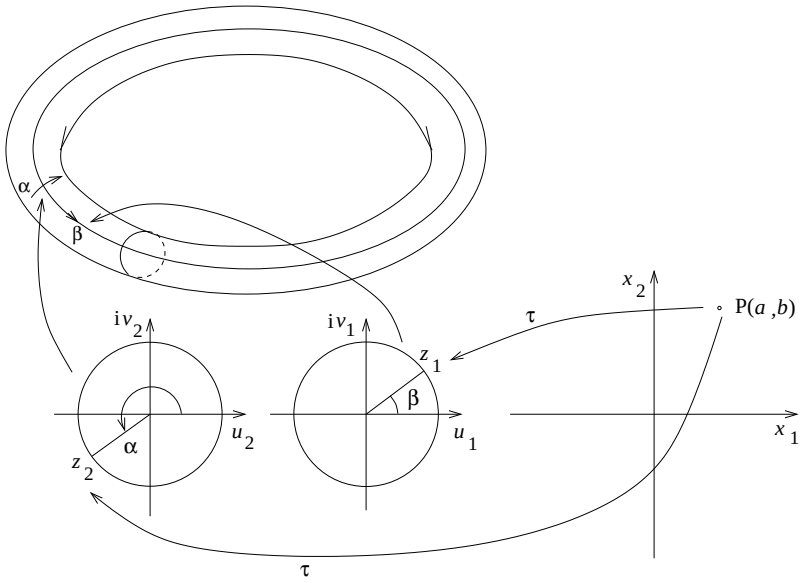

Figura 3.36: Toro bidimensionale

$$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2} = \cos x_2 + \mathrm{i}\sin x_2$$

che possono essere rappresentati su due circonferenze di raggio unitario.

Sempre per la periodicitá di 2π delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$, ogni sottoinsieme dei punti del piano determinato dalle condizioni:

$$2n\pi \leq x_1 \leq (2n+1)\pi$$

$$2n\pi \leq x_2 \leq (2n+1)\pi$$

puó essere messo in corrispondenza biunivoca, mediante l'applicazione τ, con il toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$. Si veda a tal proposito la figura 3.37.

3.6.2 Equazioni differenziali sul toro

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\omega \cdot x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \omega \cdot x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\Omega \cdot x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \Omega \cdot x_3(t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

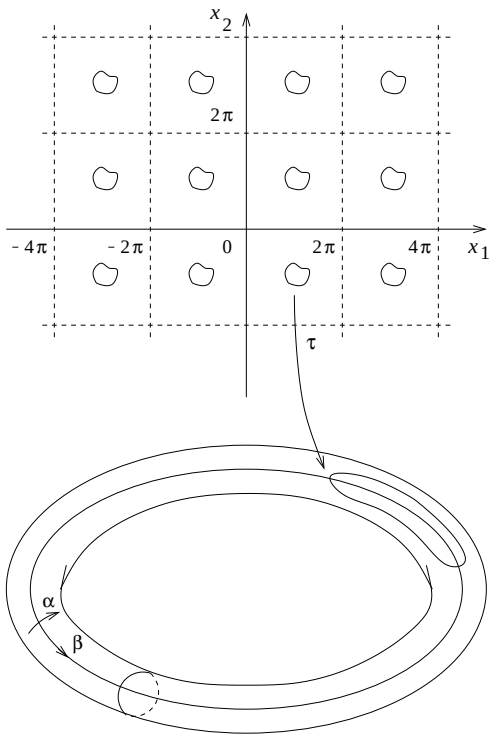

Figura 3.37: Corrispondenza tra i punti del piano cartesiano ed i punti del toro bidimensionale

con $\omega, \Omega \in \mathbb{R}$.

Dato che le prime due equazioni contengono solamente le funzioni incognite $x_1(t)$ ed $x_2(t)$, mentre le rimanenti due equazioni contengono solamente le $x_3(t)$ ed $x_4(t)$, il sistema si decompone in due sistemi di equazioni indipendenti:

$$\dot{x}_1 = -\omega \cdot x_2 \qquad \dot{x}_2 = \omega \cdot x_1 \tag{3.47}$$

e:

$$\dot{x}_3 = -\Omega \cdot x_4 \qquad \dot{x}_4 = \Omega \cdot x_3 \tag{3.48}$$

Entrambi i sistemi possono essere scritti nella forma matriciale $\dot{X} = A \cdot X$; per il sistema 3.47 la matrice A é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo, a meno del fattore ω, la matrice 3.33; con semplici calcoli si ricava

allora l'esponenziale della matrice $A \cdot t$:

$$\exp(At) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot t) & -\sin(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) & +\cos(\omega \cdot t) \end{bmatrix}$$

Indicando con

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e rappresentando le condizioni iniziali mediante la matrice X_0:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere la soluzione del sistema 3.47 come:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \exp(At) \cdot X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \cdot \cos(\omega \cdot t) - x_{20} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ x_{10} \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_{20} \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Le curve di fase vengono ricavate elevando al quadrato le soluzioni trovate:

$$x_1^2 = x_{10}^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + x_{20}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) - 2x_{10} \cdot x_{20}^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$x_2^2 = x_{10}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + x_{20}^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + 2x_{10} \cdot x_{20}^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

e sommandole termine a termine:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2(x_{10}^2 + x_{20}^2)$$

il secondo membro é una costante, e pertanto le curve di fase sono delle circonferenze centrate nell'origine e di raggio

$$r = \sqrt{2 \cdot (x_{10}^2 + x_{20}^2)}$$

Analogamente, la soluzione del sistema 3.48 é:

$$\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{30} \cdot \cos(\omega \cdot t) - x_{40} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ x_{30} \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_{40} \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

e le sue curve di fase sono delle circonferenze di equazione:

$$x_3^2 + x_4^2 = 2(x_{30}^2 + x_{40}^2)$$

ove $x_{30} = x_3(0)$ ed $x_{40} = x_4(0)$ rappresentano le condizioni iniziali.

In questo modo, lo spazio delle fasi del sistema 3.46 puó essere rappresentato come prodotto diretto dello spazio delle fasi dei sistemi 3.47 e 3.48; di

conseguenza ogni curva di fase del sistema 3.46 é prodotto diretto delle curve di fase relative ai sistemi 3.47 e 3.48. Ma tali curve sono delle circonferenze, e di conseguenza il loro prodotto diretto é un *toro bidimensionale*.

Osserviamo che un avanzamento g^t corrisponde, per il sistema 3.47, ad una rotazione di un angolo:

$$\Delta\varphi_1 = \omega \cdot t, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2 \cdot \pi \tag{3.51}$$

analogamente per il sistema 3.48, l'avanzamento g^t corrisponde ad una rotazione di un angolo

$$\Delta\varphi_2 = \Omega \cdot t, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2 \cdot \pi \tag{3.52}$$

Si veda in proposito la figura 3.38.

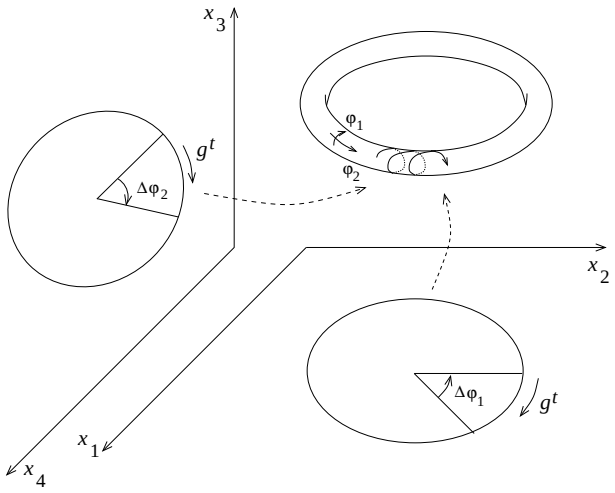

Figura 3.38: Curve di fase ed operatore di avanzamento per i sistemi 3.47 e 3.48

Essendovi una corrispondenza biunivoca tra gli angoli $\Delta\varphi_1$ e $\Delta\varphi_2$ (con $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$) ed i punti delle circonferenze C_1 e C_2, possiamo rappresentare ogni punto della curva di fase del sistema 3.46 sia su un quadrato di lato 2π che sul toro, come evidenziato in figura 3.39

Infatti, derivando le 3.51 e 3.52 rispetto al tempo, si ottiene il sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega, \qquad \dot{\varphi}_2 = \Omega \tag{3.53}$$

del tutto equivalente al sistema 3.46. Le soluzioni del sistema 3.53 sono:

$$\varphi_1 = \omega \cdot t + \varphi_{10} \tag{3.54}$$

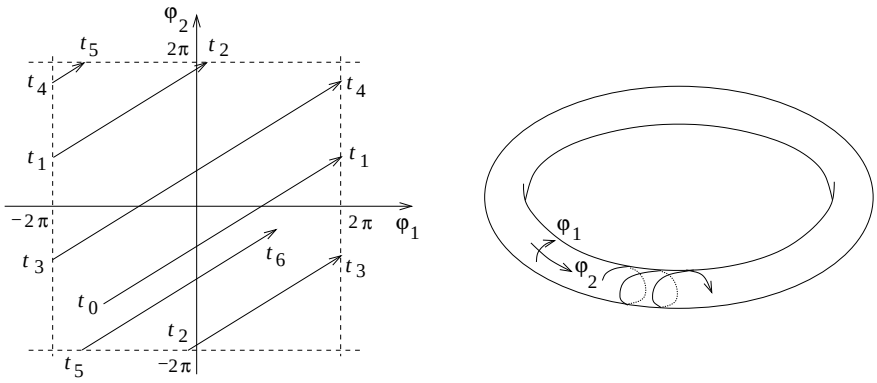

Figura 3.39: Rappresentazione delle curve di fase sul toro

$$\varphi_2 = \Omega \cdot t + \varphi_{10} \tag{3.55}$$

ove φ_{10} e φ_{10} rappresentano le condizioni iniziali. Ricavando il tempo t dalla 3.54 e sostituendola nella 3.55 otteniamo l'equazione delle curve di fase:

$$\varphi_2 = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \varphi_1 + k_2 \tag{3.56}$$

ove $k_2 = \varphi_{20} - \frac{\Omega}{\omega} \cdot \varphi_{10}$ é una costante. Le curve di fase sono dunque delle rette nel piano di coordinate φ_1, φ_2; mettendo i punti del piano in corrispondenza biunivoca con il toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$, tali curve sono rappresentabili come *eliche* sul toro.

3.6.3 Analisi delle curve di fase sul toro

Proseguamo ora nell'analisi delle curve di fase relative al sistema 3.53.

Iniziamo innanzitutto da una

Definizione 3.18 *Un insieme A é denso in uno spazio B se per ogni punto $x \in B$ e per ogni intorno $U_x \subset B$ del punto x, si ha $U_x \bigcap A \neq \emptyset$.*

Ad esempio, l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ é denso nell'insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$.

Per proseguire, ci serve una ulteriore:

Definizione 3.19 *Due numeri reali ω ed Ω sono razionalmente dipendenti se esistono due numeri interi n_1 e n_2 non entrambi nulli, tali che*

$$\omega \cdot n_1 + \Omega \cdot n_2 = 0$$

In caso contrario, essi sono detti razionalmente indipendenti.

Ad esempio, i numeri $\sqrt{3}$ e $\sqrt{12}$ sono *razionalmente dipendenti*; si ha infatti:

$$2 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{12} = 0$$

Viceversa, i numeri 1 e π sono razionalmente indipendenti.

Nel presente paragrafo, vogliamo dimostrare il seguente:

Teorema 3.8 *Se ω ed Ω sono razionalmente dipendenti, allora ogni curva di fase del sistema 3.53 é chiusa sul toro $\mathbb{T}^2$. Viceversa, se ω ed Ω sono razionalmente indipendenti, allora ogni curva di fase é densa sul toro.*

Per dimostrare questo teorema, ci occorre un lemma preliminare:

Lemma 3.1 (Dirichlet) *Se si pongono $n+1$ oggetti in n scatole, almeno una di esse conterrá piú di un oggetto.*

Da questa semplice affermazione, possiamo dimostrare il seguente:

Lemma 3.2 *Sia $\mathbb{T}^1$ la circonferenza di raggio unitario, e θ un angolo incommensurabile con 2π. Considerato un punto* P *sulla circonferenza individuato da un angolo ϕ (misurato modulo 2π), la successione dei punti:*

$$\phi,\ \phi + \theta,\ \phi + 2 \cdot \theta,\ \phi + 3 \cdot \theta, \tag{3.57}$$

costituisce un insieme denso su $\mathbb{T}^1$[13].

Dimostrazione

Dividiamo la circonferenza in n intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_n$, ciascuno costituita da un arco di lunghezza $\frac{2\pi}{n}$.

Per il lemma 3.1, tra i primi $n+1$ elementi della successione esistono due elementi appartenenti allo stesso intervallo I_i. Siano essi $\phi + r \cdot \theta$ e $\phi + s \cdot \theta$, con $r, s \in \mathbb{Z}$ ed $r \neq s$. Per l'incommensurabilitá tra θ e 2π, questi due punti saranno distinti. In caso contrario, si avrebbe $r \cdot \theta - s \cdot \theta = 0 + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), da cui $\theta = \frac{2k\pi}{r-s}$, ovvero θ sarebbe *commensurabile* con 2π, contro l'ipotesi. La lunghezza dell'arco compreso tra i due punti é allora

$$l = (r - s) \cdot \theta = q \cdot \theta, \quad q = r - s$$

e dato che i due punti appartengono allo stesso intervallo, si ha

$$l = q \cdot \theta < \frac{2\pi}{n}$$

[13] Gli angoli della successione sono misurati *modulo* 2π, ovvero ogni angolo $\alpha \geq 2\pi$ viene ricondotto ad un angolo appartenente all'intervallo $[0, 2\pi)$.

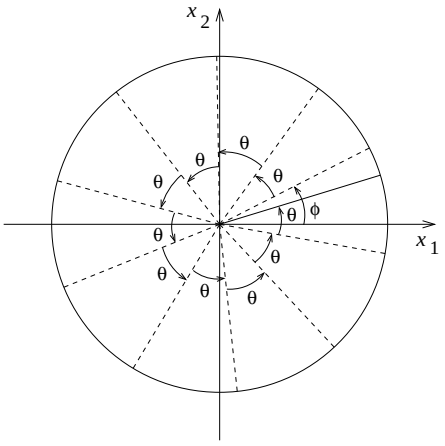

Figura 3.40: Immagini di un punto della circonferenza per ripetute rotazioni

Di conseguenza, considerando la successione:

$$\phi,\ \phi + q \cdot \theta,\ \phi + 2 \cdot q \cdot \theta,\ \phi + 3 \cdot q \cdot \theta,\ \ldots \tag{3.58}$$

possiamo affermare che due punti consecutivi di tale successione sono separati da un arco di lunghezza minore di $\frac{2\pi}{n}$. Comunque si scelga un numero reale $\epsilon > 0$, é sempre possibile trovare un intero n sufficientemente grande per soddisfare la relazione $\frac{2\pi}{n} < \epsilon$. Pertanto, in qualsiasi intorno $(\phi - \frac{\epsilon}{2}, \phi + \frac{\epsilon}{2})$ di ϕ cade almeno un punto della successione 3.58. Ció dimostra il lemma.

Dimostrazione del teorema

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema. La soluzione del sistema 3.53 é, come noto:

$$\varphi_1(t) = \omega \cdot t + \varphi_{10}, \qquad \varphi_2(t) = \Omega \cdot t + \varphi_{20} \tag{3.59}$$

Caso 1: Se ω ed Ω sono *razionalmente dipendenti*, allora esistono due interi n_1 ed n_2 non entrambi nulli, tali che:

$$n_1 \cdot \omega + n_2 \cdot \Omega = 0 \tag{3.60}$$

Vogliamo dimostrare che in questo caso la curva di fase é un'elica chiusa sul toro; per far ció ci basta determinare il *periodo* T dell'elica.

Per far ció basta imporre le condizioni di periodicitá:

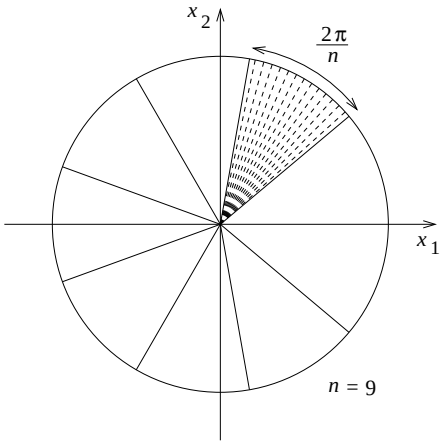

Figura 3.41: Punti della successione 3.58

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t+T)$$
$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t+T)$$

Utilizzando le 3.59, otteniamo allora il sistema di equazioni:

$$\omega \cdot T = 2 \cdot p \cdot \pi \tag{3.61}$$

$$\Omega \cdot T = 2 \cdot q \cdot \pi \tag{3.62}$$

con $p, q \in \mathbb{Z}$.

Da esse si ricava:

$$\omega = \frac{2 \cdot p \cdot \pi}{T}$$
$$\Omega = \frac{2 \cdot q \cdot \pi}{T}$$

che sostituite nella 3.60 portano alla relazione:

$$p \cdot n_1 + q \cdot n_2 = 0$$

che ammette una infinitá di soluzioni (p, q). Esse sono tutte multiple della *soluzione fondamentale*, data da:

$$p = \frac{\text{m.c.m.}(n_1, n_2)}{n_1}$$

$$q = -\frac{\text{m.c.m.}(n_1, n_2)}{n_2}$$

Sostituendo p nella 3.61 (oppure sostituendo q nella 3.62) si ricava il periodo T:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \text{m.c.m.}(n_1, n_2)}{\omega \cdot n_1}$$

Di conseguenza, la curva di fase é chiusa di periodo T.

Caso 2: Passiamo ora all'analisi del caso in cui ω ed Ω siano *razionalmente indipendenti*. Consideriamo le soluzioni del sistema 3.53:

$$\varphi_1(t) = \omega \cdot t + \varphi_{10}, \qquad \varphi_2(t) = \Omega \cdot t + \varphi_{20}$$

Senza ledere la generalitá, con un opportuna scelta dell'origine temporale, possiamo supporre $\varphi_{10} = 0$, da cui:

$$t = \frac{\varphi_1(t)}{\omega}$$

e di conseguenza:

$$\varphi_2 = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \varphi_1 + \varphi_{20} \tag{3.63}$$

La 3.63 rappresenta la curva di fase relativa alle condizioni iniziali $\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_{20}$; tale curva é una retta. Determiniamo le intersezioni di tale retta con le rette del piano di ordinata $\varphi_1 = 2 \cdot k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Questi punti hanno ordinata (modulo 2π):

$$\varphi_{2k} = \varphi_{20} + 2 \cdot k\pi \cdot \frac{\Omega}{\omega} \tag{3.64}$$

e corrispondono ad una successione ottenuta partendo dall'angolo φ_{20} con rotazioni di angolo $\theta = 2 \cdot k \cdot \pi \frac{\Omega}{\omega}$. Quest'angolo é incommensurabile con 2π, essendo ω ed Ω razionalmente indipendenti. Di conseguenza, per il lemma 3.2, l'insieme dei punti considerato é ovunque denso sula circonferenza $\mathbb{T}^1$, ovvero é ovunque denso sull'insieme $[0, 2\pi)$.

Disegnamo la retta definita dalla 3.63 sul piano (vedi figura 3.42); l'insieme dei punti di intersezione (modulo 2π di tale retta con le rette verticali di ascissa $2k\pi$ dato dalla successione 3.64 puó essere proiettato sull'asse verticale di un quadrato di lato 2π; otteniamo un insieme di punti denso in $[0, 2\pi)$.

Se da ciascuno di questi punti facciamo partire un segmento (interno al quadrato) con la stessa pendenza della curva di fase 3.63, otteniamo un insieme denso all'interno del quadrato stesso. Tale insieme rappresenta la rappresentazione modulo 2π della curva di fase, come rappresentato in figura 3.43. Di conseguenza, la curva di fase é densa in un quadrato di lato 2π. In

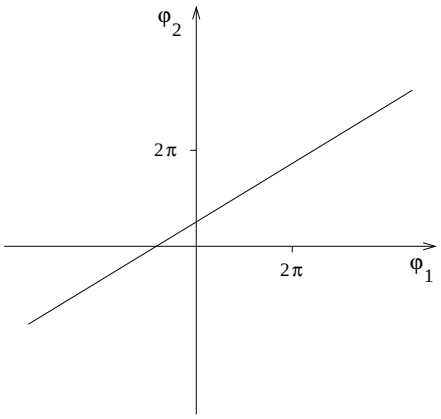

Figura 3.42: Rappresentazione della curva di fase nel piano

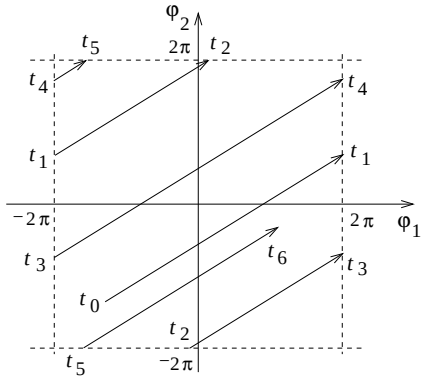

Figura 3.43: Rappresentazione della curva di fase nel quadrato

altre parole, preso un qualsiasi intorno di un punto arbitrario di tale quadrato, la curva di fase entra in tale intorno. Mettendo in relazione biunivoca i punti di tale quadrato con i punti del toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$, segue che la curva di fase é densa sul toro, ovvero che in un qualsiasi intorno di un arbitrario punto del toro é possibile trovare una porzione della curva di fase.

Il teorema é dimostrato.

3.6.4 Applicazioni alla Teoria dei Numeri

Il lemma 3.2 puó essere utilizzato per risolvere il seguente problema di Teoria dei Numeri:

Problema

Consideriamo la successione delle *prime cifre* delle potenze di due $1, 2, 4, \ldots$:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, \ldots \tag{3.65}$$

Comparirá il numero 7 in questa successione ? Comparirá piú frequentemente il numero 7 oppure il numero 8 ? E quanto piú frequentemente ?

Risposta

Per risolvere questo problema, occorrono alcune definizioni e teoremi preliminari:

Definizione 3.20 *Sia $\mathbb{T}^1$ la circonferenza di raggio unitario, e sia*

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$$

una successione di punti appartenenti a $\mathbb{T}^1$. Diremo che tale successione é uniformemente distribuita se per ogni arco $\Lambda \subset \mathbb{T}^1$ il numero di punti $N(\Lambda, k)$ costituenti i primi k termini $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ della successione contenuti in Λ é asintoticamente proporzionale alla lunghezza dell'arco, ovvero se:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(\Lambda, k)}{k} = \frac{|\Lambda|}{2\pi}$$

Teorema 3.9 *La successione di punti*

$$\phi,\ \phi + \theta,\ \phi + 2 \cdot \theta,\ \ldots$$

é uniformemente distribuita sulla circonferenza $\mathbb{T}^1$.

La dimostrazione, che presenta alcuni punti assai tecnici, viene omessa.

Conseguenza immediata del Teorema 3.9 é il seguente Corollario, che fornisce la soluzione al problema proposto:

Corollario 3.3 *Nella successione delle potenze di 2, compare piú frequentemente la cifra 7 rispetto alla cifra 8. Se indichiamo con $N_7(k)$ e con $N_8(k)$ la quantitá di numeri del segmento della successione $1, 2, \ldots, 2^k$ che iniziano rispettivamente con la cifra 7 e con la cifra 8, otteniamo:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_7(k)}{N_8(k)} = \frac{\log 8 - \log 7}{\log 9 - \log 8} = 1,133706496\ldots$$

Dimostrazione

Consideriamo la successione delle potenze di due:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots \tag{3.66}$$

e calcoliamone il logaritmo in base 10; otteniamo una nuova successione:

$$\log_{10} 1, \log_{10} 2 \log_{10} 4, \log_{10} 8, \log_{10} 16, \log_{10} 32, \ldots \tag{3.67}$$

Rappresentiamo questi numeri su una circonferenza C di raggio $\frac{1}{2\pi}$; osservando che i termini della successione sono tutti multipli di $\log_{10} 2 = 0,301\ldots$, tale rappresentazione corrisponde a ripetute rotazioni di un arco di lunghezza pari a $\log_{10} 2$. Si veda in proposito la figura 3.44. Dato che i numeri 1

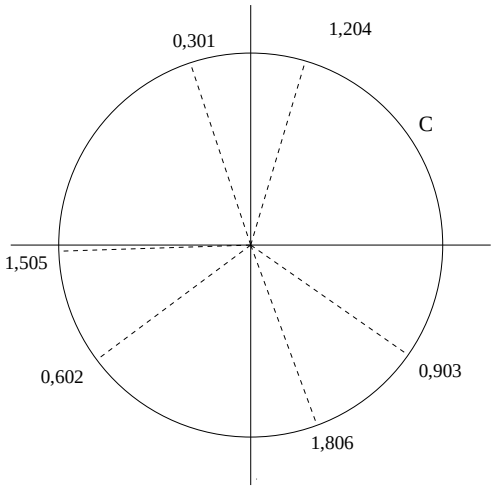

Figura 3.44: Rappresentazione del logaritmo della successione delle potenze di due sulla circonferenza

e $\log_{10} 2$ sono incommensurabili, tale successione é densa sulla circonferenza C; inoltre, per il Teorema 3.9 essa é uniformemente distribuita su C.

Scriviamo i termini della successioen 3.66 in notazione $n_1, n_2 n_3 n_4 \ldots \cdot 10^k$ ove $1 \leq n_1 \leq 9$ e con $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$:

$$1 \cdot 10^0,\ 2 \cdot 10^0,\ 4 \cdot 10^0,\ 8 \cdot 10^0,\ 1,6 \cdot 10^1,\ 3,2 \cdot 10^1, \ldots \tag{3.68}$$

Calcolando il logaritmo in base 10, otteniamo una successione di termini del tipo:

$$\log_{10}(n_1, n_2 n_3 n_4 \ldots) + \log_{10}(10^k) = \log_{10}(n_1, n_2 n_3 n_4 \ldots) + k$$

Nella sua rappresentazione sulla circonferenza, l'intero k corrisponde a k rotazioni complete. Pertanto, tutti i numeri della successione 3.66 con $n_1 = 7$ apparterranno all'arco $\Lambda_7 = [\log_{10} 7, \log_{10} 8)$, e tutti i numeri che iniziano con la cifra 8 apparterranno all'arco $\Lambda_8 = [\log_{10} 8, \log_{10} 9)$. Dalla definizione 3.20,

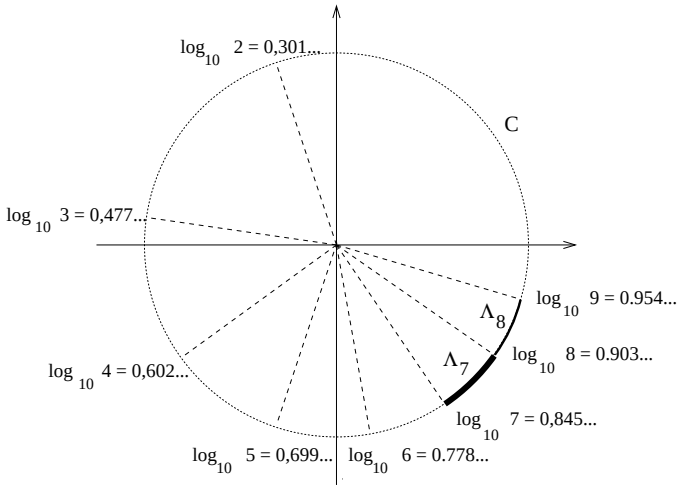

Figura 3.45: Intervalli in cui cadono le cifre 7 ed 8

ricaviamo il rapporto tra la frequenza di comparsa della cifra 7 rispetto alla cifra 8:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_7(k)}{N_8(k)} = \frac{|\Lambda_7|}{|\Lambda_8|} = \frac{\log_{10} 8 - \log_{10} 7}{\log_{10} 9 - \log_{10} 8} = \frac{\log 8 - \log 7}{\log 9 - \log 8}$$

.

Osservazione

Considerando una *crescita esponenziale* della popolazione mondiale, le prime cifre del numero di abitanti delle nazioni del mondo sono distribuite come le prime cifre delle potenze del numero 2. Ció é conseguenza dell'aumento esponenziale del numero di abitanti della Terra, con conseguente analogo comportamento del numero abitanti nei vari paesi in ogni periodo.

Capitolo 4

Sistemi a tempo discreto

4.1 Introduzione

Nel presente capitolo verranno presentati alcuni risultati relativi ai *sistemi autonomi a tempo discreto*, sia lineari che non lineari, nonché approfondimenti e curiositá relative a qualche sistema non lineare, sempre a tempo discreto.

Ricordiamo che per un sistema a tempo discreto autonomo, le equazioni di stato non dipendono dall'ingresso $U(t)$, ovvero si ha:

$$X(t+1) = A \cdot X(t)$$

4.2 Sistema autonomo con una sola variabile di stato

In questo paragrafo vogliamo dimostrare il seguente

Teorema 4.1 *Sia:*

$$x(t+1) = a \cdot x(t), \quad a \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \tag{4.1}$$

l'equazione di stato di un sistema a tempo discreto descritto dalla variabile di stato $x(t)$.

Sia

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

lo stato iniziale del sistema.

Allora la 4.1 ammette una ed una sola soluzione soddisfacente la 4.1 e la condizione iniziale 4.2, e precisamente:

$$x(t) = a^t \cdot x(0), \qquad \forall t \in \mathbb{N}_0 \tag{4.3}$$

Una applicazione é giá stata analizzata in 1.5

Dimostrazione

Procediamo *per induzione*[1]. Innanzitutto la 4.3 é vera per $t = 0$. Supponiamo sia vera per $t > 0$, $t \in \mathbb{N}_0$. Allora $x(t) = a^t \cdot x(0)$, che sostituita nella 4.1 dá:

$$x(t+1) = a \cdot a^t \cdot x(0) = a^{t+1} \cdot x_(0)$$

L'unicitá é immediata. Il Teorema é dimostrato.

4.3 Sistema di equazioni lineari autonomo

Passiamo ora ad una generalizzazione, senza dimostrazione[2], del teorema 4.1 per un sistema di equazioni lineari:

Teorema 4.3 *Sia dato un sistema autonomo a tempo discreto, descritto in forma matriciale dall'equazione di stato:*

$$X(t+1) = A \cdot X(t) \tag{4.4}$$

ove

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad x_i(t) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{N}_0$$

e dove A é una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali. Sia inoltre

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

[1]Il procedimento di dimostrazione *per induzione*, nella sua forma piú semplice, é dato dal seguente

Teorema 4.2 (Prima forma del Principio di Induzione) *Sia (P_n) (con $n \in \mathbb{N}_0$) una successione di proposizioni tale che:*

- *Esiste un $n \in \mathbb{N}_0$ tale che P_n sia vera (base dell'induzione).*
- *L'essere $m \geq n$ e P_n vera implica P_{m+1} vera (ipotesi di induzione).*

Allora P_k é vera per ogni $k \geq n$.

Per una dimostrazione, si veda ad esempio [17].

[2]Riservata ai corsi universitari

lo stato iniziale del sistema. Allora la 4.4 ammette una ed una sola soluzione soddisfacente la condizione iniziale 4.5, e precisamente:

$$X(t) = A^t \cdot X(0) \tag{4.6}$$

4.4 I conigli di Fibonacci

Nel 1202 Leonardo da Pisa, noto come Fibonacci[3], costruí un modello a tempo discreto per lo studio della crescita di una popolazione di conigli.

Per la determinazione del modello, egli fece le seguenti ipotesi:

1. I conigli sono immortali.
2. Ciascuna coppia di conigli adulti genera annualmente una coppia di conigli giovani.
3. Dopo un anni di vita, un coniglio é adulto.
4. I conigli giovani non si accoppiano.
5. All'inizio di ogni anno é possibile immettere o prelevare. dall'allevamento coppie di conigli giovani.

Indichiamo ora con:

- $x_1(t)$: numero delle coppie di conigli giovani all'inizio dell'anno t.
- $x_2(t)$: numero delle coppie di conigli adulti all'inizio dell'anno t.
- $u(t)$: numero di coppie di conigli giovani immesse ($u > 0$) o prelevate ($u < 0$) all'inizio dell'anno t.
- $y(t)$: totale delle coppie di conigli all'inizio dell'anno t.

Si noti come la notazione sia coerente con quella utilizzata nella Teoria dei Sistemi: x_1 ed x_2 sono variabili di stato, u é l'ingresso ed y é l'uscita del sistema.

Dalle regole 2, 4 e 5, segue:

$$x_1(t+1) = x_2(t) + u(t)$$

[3]in quanto figlio di *Messier Bonaccius*

Dalle regole 1 e 3, si ha:

$$x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

Infine, si ha la seguente equazione di uscita:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Il sistema é lineare, e le equazioni di stato possono essere scritte in forma matriciale

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

con:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

Si ha allora:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che dall'allevamento non vengano *mai* immesse o prelevate coppie di conigli; in questo caso abbiamo a che fare con un sistema autonomo del tipo $X(t+1) = A \cdot X(t)$.

Supponiamo che, nell'anno $t = 0$, nell'allevamento sia presente una sola coppia di conigli adulti, la condizione iniziale é:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione dell'equazione di stato é allora:

$$X(t) = A^t \cdot X(0)$$

Avendosi:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

Piú in generale, posto

$$A^t = \begin{bmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{bmatrix}$$

si dimostra per induzione che si ha:

$$A^{t+2} = \begin{bmatrix} a_t + a_{t+1} & b_t + b_{t+1} \\ c_t + c_{t+1} & d_t + d_{t+1} \end{bmatrix}$$

Risulta allora:

$$X(t) = A^t \cdot X(0) = \begin{bmatrix} a_t \\ c_t \end{bmatrix}$$

Si ricava immediatamente la seguente soluzione:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = a_t + c_t$$

Un semplice calcolo, porta alla seguente successione di valori:

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 1$$

$$y(2) = 2$$

$$y(3) = 3$$

$$y(4) = 5$$

$$\dots$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$\dots$$

In questa successione, l'n–esimo termine é la somma dei due termini precedenti. Essa é nota come successione di Fibonacci.

4.5 Confronto con sistemi autonomi a tempo continuo

Nel caso di sistemi autonomi lineari, abbiamo esaminato in questo capitolo, e nel precedente, tutti i casi. Riassumiamoli brevemente:

Sistema a tempo continuo con una variabile di stato

- Equazione: $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$
- Condizione iniziale: $x(0) = x_0$
- Soluzione: $x(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{at}$

Sistema a tempo discreto con una variabile di stato

- Equazione: $x(t+1) = a \cdot x(t)$
- Condizione iniziale: $x(0) = x_0$
- Soluzione: $x(t) = x_0 \cdot a^t$

Sistema a tempo continuo con piú variabili di stato

- Equazione: $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$
- Condizione iniziale: $X(0) = X_0$
- Soluzione: $X(t) = X_0 \cdot \exp(At)$

Sistema a tempo discreto con piú variabili di stato

- Equazione: $X(t+1) = A \cdot X(t)$
- Condizione iniziale: $X(0) = X_0$
- Soluzione: $X(t) = A^t \cdot X_0$

4.6 Sistemi a tempo discreto non lineari

Analizziamo ora un semplice sistema a tempo discreto non lineare, conosciuto come *parabola logistica*; tale modello é utilizzato. per stimare l'andamento negli anni della densitá di popolazione in una data area geografica. Pur essendo assai semplice (dipende da un solo parametro reale), presenta molti aspetti interessanti e curiosi.

4.6.1 La parabola logistica

Supponiamo di voler studiare la fluttuazione della popolazione in una data area geografica. Mediante osservazioni di determinate condizioni (numero di predatori, clima, disponibilitá di cibo, ecc.) é possibile costruire un modello matematico adatto. Il modello piú semplice, a tempo continuo, é dato dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$$

che, come sappiamo, ammette soluzione

$$x(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{at}$$

ove x_0 é la popolazione iniziale. Questo modello non tiene conto di fenomeni come il sovrappopolamento, il tasso di mortalitá, eccetera, e si limita a fornire un comportamento esponenziale della popolazione. Questo modello ha un analogo a tempo discreto, se si ipotizza che la popolazione dopo $t+1$ anni sia proporzionale alla popolazione nell'anno t:

$$x(t+1) = a \cdot x(t)$$

Questa equazione ha soluzione

$$x(t) = x_0 \cdot a^t$$

In entrambi i modelli, si verificano i seguenti casi, a seconda del valore del parametro a:

- Crescita illimitata
- La popolazione rimane costante
- Tendenza all'estinzione

Un modello (a tempo continuo) piú accurato, che tenga conto delle conseguenze del sovrappopolamento, é dato dalla seguente equazione:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) \cdot [Q - x(t)] \tag{4.7}$$

Questa equazione nasce dall'ipotesi che esista un valore critico Q per la popolazxione; se la popolazione $x(t)$ supera Q allora il secondo membro é negativo, e la popolazione tende a decrescere. In questo modo si tiene conto delle conseguenze negative del sovrappopolamento. Viceversa, se $x(t)$ é minore di Q, si ha $\dot{x} > 0$ e la popolazione tende a crescere.

Detta $x(0) = P$ la popolazione iniziale, si dimostra che la soluzione della 4.7 é:

$$x(t) = \frac{Q \cdot P \cdot \mathrm{e}^{aPt}}{Q - P + P \cdot \mathrm{e}^{aPt}} \tag{4.8}$$

Alcune soluzioni, relative ad $a = 0,01$, $Q = 100$ e per differenti valori di P rappresentate nella figura 4.1.

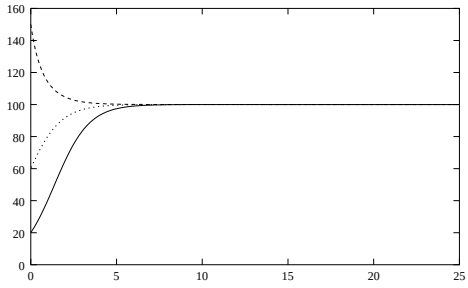

Figura 4.1: Soluzioni dell'equazione 4.8

I valori utilizzati per P relativi ai grafici della figura 4.1 sono i seguenti:

- $P = 20$ – linea continua
- $P = 60$ – linea punteggiata
- $P = 150$ – linea tratteggiata

Come si puó notare, le soluzioni non presentano comportamenti ciclici o fluttuazioni imprevedibili della popolazione.

Passiamo ora all'analisi a tempo discreto; in questo caso ci aspettano grandi sorprese.

Da questo punto, indichiamo con $x(t)$ la densitá relativa della popolazione, ovvero il rapporto tra la popolazione esistente ed il limite massimo Q; con questa normalizzazione l'equazione a tempo discreto corrispondente alla 4.7 é la seguente:

$$\boxed{x(t+1) = a \cdot x(t) \cdot [1 - x(t)]} \tag{4.9}$$

ed ovviamente $0 \leq x(t) \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{N}_0$. Dato che il secondo membro é un polinomio di secondo grado in $x(t)$, questa equazione ha preso il nome di *parabola logistica*

Poniamo ora

$$f(x) = a \cdot x \cdot (1 - x) \tag{4.10}$$

e sia P la densitá iniziale di popolazione, ovvero $x(0) = P$. Si ha allora:

$$x(1) = f(P)$$

$$x(2) = f(x(1)) = f(f(P))$$

$$x(3) = f(x(2)) = f(f(f(P)))$$

$$\ldots$$

In questo modo, é possibile determinare l'andamento della densitá di popolazione a partire dal valore iniziale P.

4.6.2 Simulazioni

Il seguente programma, scritto in `Fortran77`, permette di determinare l'andamento della densitá della popolazione utilizzando il modello 4.9 (la parabola logistica) scrivendo il risultato su un file in formato testo. In questo modo, é possibile importare il file in un qualsiasi strumento di *Office Automation* per tracciare un grafico.

```
      PROGRAM CAOS

      DOUBLE PRECISION X
*        DENSITA' DI POPOLAZIONE (0 <= X <= 1)

      REAL A
*        PARAMETRO DELLA PARABOLA LOGISTICA

      INTEGER NUMIT
*        NUMERO DI ITERAZIONI

      INTEGER I
*        CONTATORE DEL CICLO

      CHARACTER*20 FNAME
*        NOME DEL FILE DI OUTPUT

*     ***** INTRODUZIONE DATI *****

 100  WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' INTRODUCI LA DENSITA'' DI POPOLAZIONE'
      READ (UNIT=*, FMT=*) X
      IF ((X .GE. 0.0) .AND. (X .LE. 1.0)) GOTO 120
*        CONTROLLO CORRETTEZZA DELL'INTRODUZIONE
      WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' DATO NON CORRETTO '
      GOTO 100
```

```
 120    WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' INTRODUCI IL PARAMETRO DELLA PARABOLA'
        READ (UNIT=*, FMT=*) A

 130    WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' INTRODUCI IL NUMERO DI ITERAZIONI'
        READ (UNIT=*, FMT=*) NUMIT

        IF (NUMIT.GT.0) GOTO 140
*          CONTROLLO CORRETTEZZA DELL'INTRODUZIONE

        WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' DATO NON CORRETTO'
        GOTO 130

 140    WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' NOME FILE DI OUTPUT (MAX 20 CARATTERI)'
        READ (UNIT=*, FMT=500) FNAME
*          SONO AMMESSI AL PIU' 20 CARATTERI

*       ***** CALCOLO DEI VALORI *****

        OPEN (UNIT=2, NAME=FNAME, ERR=700)
*          APRE IL FILE DI OUTPUT

        DO 150, I = 1, NUMIT
           X = A * X * (1.0 - X)
           IF ((X .GE. 0.0) .AND. (X .LE. 1.0)) THEN
*                SE LA DENSITA' DI POPOLAZIONE NON E' COMPRESA TRA 0 ED 1
*                NON LA VISUALIZZA, ESSENDO PRIVO DI SIGNIFICATO IL DATO
*                ED ESCE DAL CICLO
              WRITE (UNIT=*, FMT=510) I, X
              WRITE (UNIT=2, FMT=520) I, X
           ELSE
              GOTO 160
*                VALORE DI DENSITA' DI POPOLAZIONE
*                NON COMPRESO TRA 0. ED 1.
*                ESCE DAL CICLO (E DAL PROGRAMMA) CON UN MESSAGGIO
           ENDIF

 150    CONTINUE

        CLOSE (UNIT=2)
*          CHIUDE IL FILE DI OUTPUT

        STOP

*       ***** USCITA DAL CICLO: VALORE DI DENSITA' DI *****
*       ***** POPOLAZIONE NON COMPRESO TRA 0.0 E 1.0  *****

 160    CLOSE (UNIT = 2)
        WRITE (UNIT=*, FMT=*)
     +     ' VALORE DI DENSITA'' DI POPOLAZIONE NON VALIDO'
```

```
      STOP

*     ***** MESSAGGIO DI ERRORE PER ERRATA GESTIONE FILE DI OUTPUT *****

 700  CLOSE (UNIT=2)
      WRITE (UNIT=*, FMT=*) ' ERRORE DI GESTIONE DEL FILE DI OUTPUT'

      STOP

*     ***** FORMATTAZIONE DEGLI OUTPUT *****

 500  FORMAT (A20)
 510  FORMAT (1X, ' T= ', I8, 4X, ' X = ', F12.9)
 520  FORMAT (1X, I8, 1X, F12.9)

      END
```

Questo programma puó essere compilato con qualsiasi compilatore `ANSI FORTRAN77`; si puó ad esempio utilizzare il compilatore gratuito (licenza `GNU-GPL`) `g77` disponibile sotto `LINUX`. In questo caso supponendo che il *file sorgente* sia `caos.f` é possibile compilarlo con il comando:

```
g77 caos.f -o caos
```

ottenendo un *eseguibile* di nome `caos`, che puó essere lanciato con il comando:

```
./caos
```

Dal file di output é possibile ricavare un grafico; ad esempio utilizzando il programma gratuito (licenza `GNU-GPL`) `GnuPlot` sotto `LINUX`, é possibile visualizzare un grafico con il comandi elencati in appendice C

Mediante questo programma, sono state effettuate diverse simulazioni Cominciamo con un grafico che rappresenta l'andamento della densitá di popolazione in un periodo di tempo di 100 anni, con $a = 3,5$, $P = 0,2$; il risultato é rappresentato in figura 4.2, ove i punti ottenuti sono stati collegati con dei segmenti.

Possiamo notare che dopo un certo numero di anni, la popolazione fluttua con *andamento periodico*, il cui periodo é pari a quattro. Infatti, gli ultimi valori della densitá di popolazione sono i seguenti:

```
t            x
91      0,382919683
```

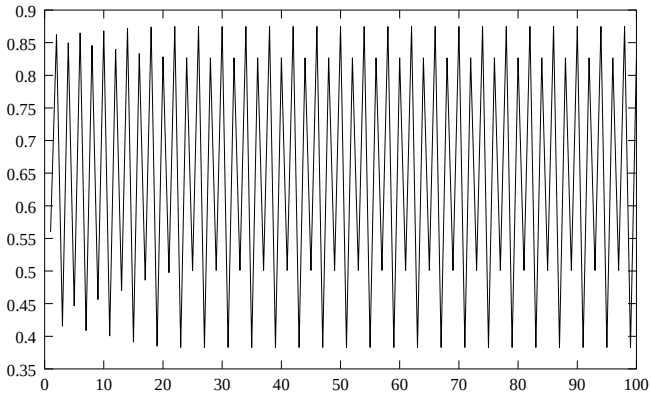

Figura 4.2: Andamento della densitá di popolazione per $a = 3{,}5$

92	0,826940707
93	0,500884210
94	0,874997264
95	0,382919683
96	0,826940707
97	0,500884210
98	0,874997264
99	0,382919683
100	0,826940707

In figura 4.3 viene riportato l'andamento della densitá di popolazione per $a = 3,95$, con densitá iniziale $P = 0,2$. Possiano notare la scomparsa di fluttuazioni periodiche, ed un comportamento piú irregolare.

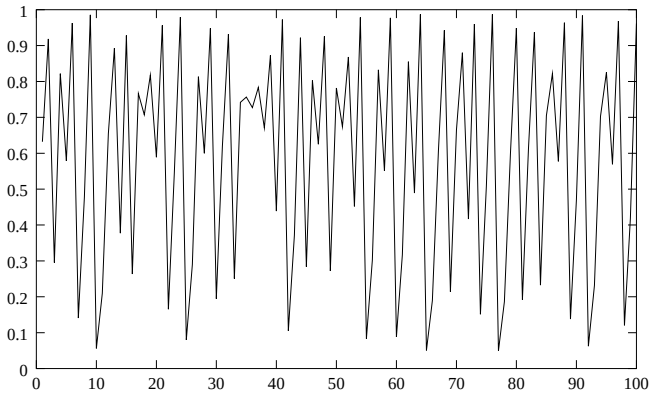

Figura 4.3: Andamento della densitá di popolazione per $a = 3{,}95$

É allora interessante esaminare sotto quali condizioni esistono soluzioni periodiche, e di che periodo. Per far ció ci occorrono alcune nozioni preliminari, che saranno illustrate nel prossimo paragrafo.

Per ora, esaminiamo ancora alcuni grafici, riportati nelle figure da 4.4 a 4.10, relative ad una densitá di popolazione iniziale $P = 0,3$ ed ai seguenti valori del parametro a:

- Figura 4.4: $a = 2,5$
- Figura 4.5: $a = 3$
- Figura 4.6: $a = 3,5$
- Figura 4.7: $a = 3,6$
- Figura 4.8: $a = 3,7$
- Figura 4.9: $a = 3,8$
- Figura 4.10: $a = 4$

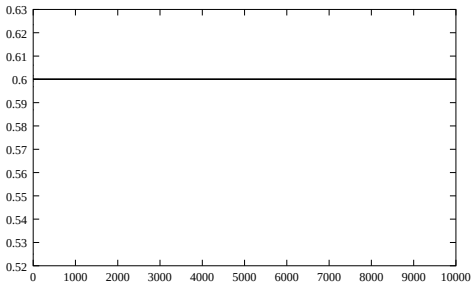

Figura 4.4: Simulazione per a = 2,5

Si é scelto, per una maggiore chiarezza grafica, di non unire i punti trovati con delle linee.

Come si puó notare, per valori crescenti del parametro a, la dinamica del sistema diventa sempre piú complessa; infatti per bassi valori di a la densitá di popolazione tende ad oscillare entro delle precise bande (vedi figure da 4.4 a 4.6), e diventa sempre piú complessa per valori di a prossimi a 4 (vedi figure da 4.7 a 4.10).

Uno studio dettagliato della dinamica del sistema deve essere tuttavia effettuato *senza l'utilizzo di calcolatori*; infatti gli errori di approssimazione inevitabilmente introdotti nel calcolo numerico portano inevitabilmente a risultati errati.

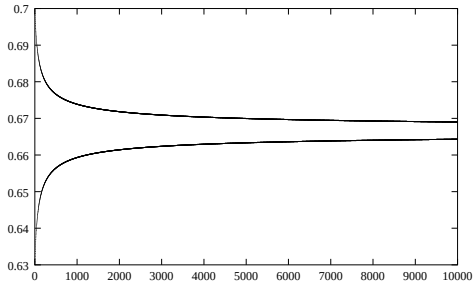

Figura 4.5: Simulazione per $a = 3$

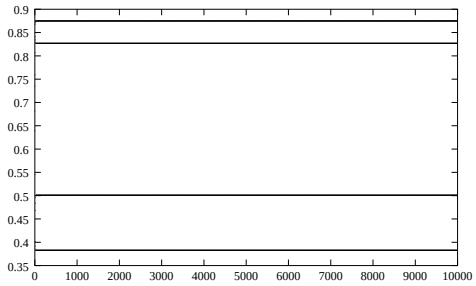

Figura 4.6: Simulazione per $a = 3{,}5$

Ad esempio, si provi il programma per $a > 4$; dopo poche iterazioni la densitá di popolazione uscirá dall'intervallo $[0, 1]$ per *qualsiasi* valore della densitá iniziale.

Come vedremo nei paragrafi successivi, questo risultato é errato.

4.6.3 Definizioni elementari

Incominciamo dalla definizione di orbita e di traiettoria per un sistema dinamico a tempo discreto.

Nel seguito del capitolo, indicheremo con $\mathbb{I}$ un intervallo dell'asse reale. Questo intervallo potrá essere aperto, chiuso, aperto a destra o aperto a sinistra, ovvero del tipo (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ o $(a, b]$.

Indicheremo inoltre, per tutto il seguito del capitolo, con $\mathbb{J}$ l'intervallo chiuso $[0, 1]$. Chiameremo $\mathbb{J}$ l'*intervallo base*.

Definizione 4.1 *Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ una funzione continua. Possiamo definire la n–esima iterazione $f^{<n>}$ della funzione f, con $n \in \mathbb{N}_0$ per induzione come:*

$$f^{<1>}(x) = f(x)$$

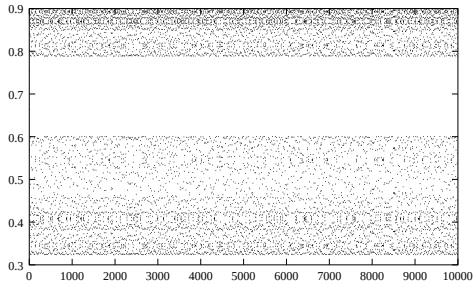

Figura 4.7: Simulazione per $a = 3{,}6$

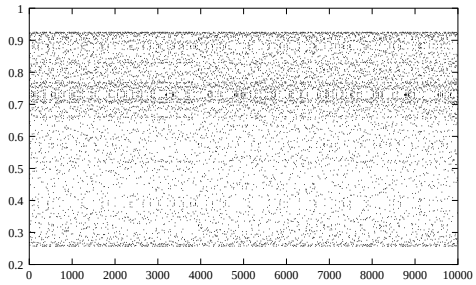

Figura 4.8: Simulazione per $a = 3{,}7$

$$f^{<n>}(x) = f(f^{<n-1>}(x))$$

Definiamo inoltre $f^{<0>}(x)$ *come la funzione identitá, ovvero:*

$$f^{<0>}(x) = x$$

Tali definizioni si intendono per ogni $x \in \mathbb{I}$.

In altre parole, si ha ad esempio:

$$f^{<2>}(x) = f(f(x))$$
$$f^{<3>}(x) = f(f(f(x)))$$

Definizione 4.2 *Sia* f *come nella definizione 4.1, e sia* $x \in \mathbb{I}$. *La traiettoria di* x *é la successione* $(f^{<n>}(x))$, *con* $n \in \mathbb{N}_0$. *L'orbita di* x *é l'insieme dei punti* $\{f^{<n>}(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ad esempio, consideriamo il caso in cui $a = 2$, e sia $x(0) = P = 0,6$.

Allora la *traiettoria* di $x(0)$ é la successione $0,6\,,\ 0,48\,,\ 0,4992\,,\ \ldots$, mentre l'*orbita* di $x(0)$ é l'insieme costituito dai punti della traiettoria, ovvero

$$S = \{0,4\,,\ 0,48\,,\ 0,4992\,,\ \ldots\,,\ 0,6\}$$

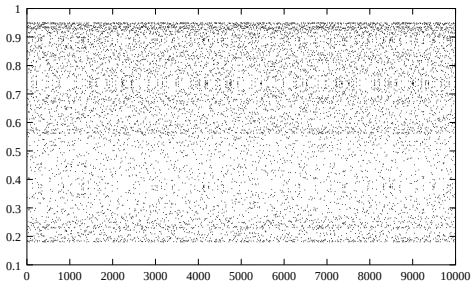

Figura 4.9: Simulazione per $a = 3{,}8$

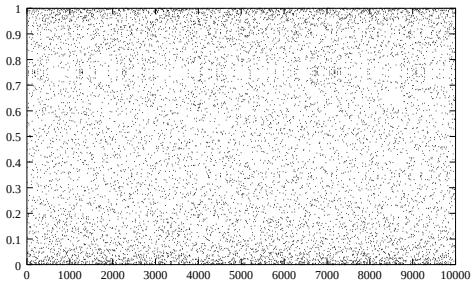

Figura 4.10: Simulazione per $a = 4$

Definizione 4.3 *Un punto $x \in \mathbb{I}$ é detto un punto fisso (o un punto di equilibrio) se $f(x) = x$*

Osserviamo che la traiettoria di un punto fisso é la successione $x, x, x, \ldots$, mentre la sua orbita é l'insieme $\{x\}$ costituito da un solo punto.

Osserviamo inoltre che i *punti fissi* si ottengono dall'intersezione della retta $y = x$ con la funzione $y = f(x)$.

Esercizio

Determinare i punti fissi della parabola logistica con $a = 3$.

Soluzione

Dobbiamo trovare l'intersezione tra la retta

$$y = x$$

e la funzione

$$y = 3 \cdot x \cdot (1 - x)$$

Un semplice calcolo ci permette di determinare i due punti fissi x_a ed x_b:

$$x_a = 0 \qquad x_b = \frac{2}{3}$$

Il grafico 4.11 si riferisce a questo esempio.

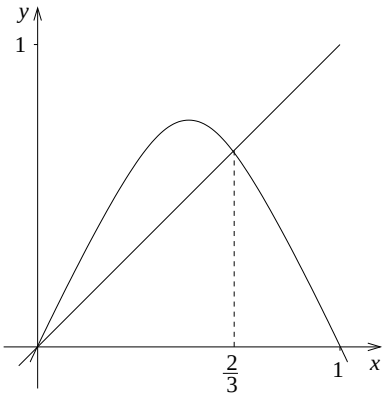

Figura 4.11: Determinazione dei punti fissi della parabola logistica

Esercizio

Determinare i punti fissi della parabola logistica per $a > 0$ generico.

Soluzione

I punti fissi sono:

$$x_a = 0$$
$$x_b = \frac{1-a}{a} \tag{4.11}$$

Osserviamo che per $a = 1$ si ha un solo punto fisso (infatti $x_a = x_b$, e che per $0 < a < 1$ si ha $x_b < 0$.

4.6.4 Analisi grafica

La determinazione delle traiettorie puó essere effettuata, in modo assai semplice, per via grafica.

Si tracciano, nel piano cartesiano, il grafico della curva $y = f(x)$ e la retta $y = x$. Per ottenere la traiettoria con punto iniziale x_0 tracciamo una retta verticale di ascissa x_0 sino ad incontrare la funzione $y = f(x)$, e

da qui tracciamo una retta orizzontale sino ad incontrare la retta $y = x$. In questo modo abbiamo ricavato il punto $x(1)$, e ripetendo il processo piú volte possiamo determinare i successivi punti della traiettoria. Si veda, ad esempio, la figura 4.12, che si riferisce alla parabola logistica, con $a = 2,5$.

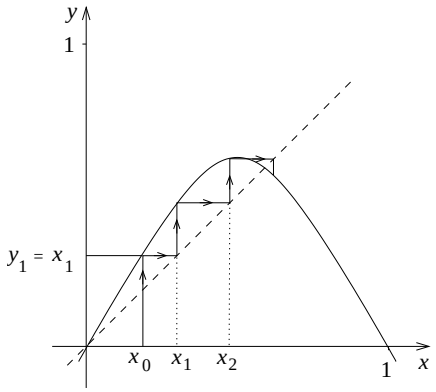

Figura 4.12: Analisi grafica per la determinazione della traiettoria

4.6.5 Iperbolicitá

Esaminiamo ora alcune proprietá dei punti fissi e dei punti periodici. Incominciamo con una

Definizione 4.4 *Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$. Un punto $x \in \mathbb{I}$ é detto periodico di periodo n se $f^{<n>}(x) = x$. Il piú piccolo intero positivo n tale che $f^{<n>}(x) = x$ é detto il periodo primo di f.*

Di conseguenza, un punto fisso é un punto periodico di periodo primo $n = 1$. Osserviamo inoltre che l'orbita di un punto periodico di periodo primo n é costituita da esattamente n punti.

Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ ha due punti fissi: $x_a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mentre i punti $x_c = 0$ ed $x_d = -1$ appartengono ad un'orbita di periodo 2.

Si veda, a proposito, la figura 4.13

Definizione 4.5 *Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ e sia $p \in \mathbb{I}$ un punto di periodo primo n. Supponiamo inoltre che la funzione sia derivabile in p. Il punto p é detto iperbolico se $|(f^{<n>})'(x)| \neq 1$. In caso contrario é detto non iperbolico.*

Sussiste il seguente:

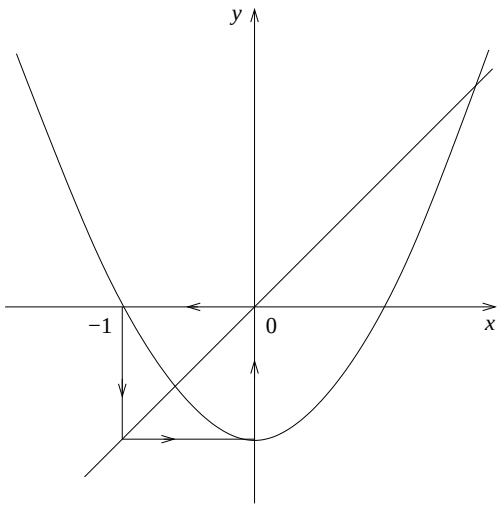

Figura 4.13: Esempio di punti di periodo primo 2

Teorema 4.4 *Sia f come nella definizione 4.5.*

1. *Se p é un punto fisso iperbolico con*
$$|f'(p)| < 1$$
allora esiste un intorno U_p di p tale che:
$$\lim_{k \to +\infty} f^{<k>}(x) = p$$
per ogni $x \in U_p$.

2. *Se p é un punto periodico iperbolico di periodo primo n con*
$$|(f^{<n>})'(p)| < 1$$
allora esiste un intorno U_p di p tale che:
$$\lim_{k \to +\infty} f^{<k>}(x) = p$$
per ogni $x \in U_p$.

3. *Se p é un punto fisso iperbolico con*
$$|f'(p)| > 1$$
allora esistono un intorno U_p di p ed un numero intero positivo k tali che:
$$f^{<k>}(x) \notin U_p$$
per ogni $x \in U_p$, $x \neq p$.

4. *Se p é un punto periodico iperbolico di periodo primo n con*

$$|(f^{<n>})'(p)| > 1$$

allora esistono un intorno U_p di p ed un numero intero positivo k tali che:

$$f^{<k>}(x) \notin U_p$$

per ogni $x \in U_p$, $x \neq p$.

Nei casi 1 e 3 diremo che il punto p é un *attrattore*, mentre nei casi 2 e 4 diremo che il punto p é un *repulsore*.

Chiariamo il tutto con degli esempi grafici.

Consideriamo la funzione $f(x) = -\frac{x^2}{4}$. Dall'intersezione con la retta $y = x$ segue che $x_a = 0$ é un punto fisso di f. Si ha inoltre:

$$|f'(x_a)| = 0 < 1$$

Di conseguenza x_a é un punto fisso attrattore. L'analisi grafica di figure 4.14 ne é una conferma. L'altro punto fisso é $x_b = 4$. In questo punto si ha

$$|f'(x_b)| = 2 > 1$$

Di conseguenza, x_b é un punto fisso repulsore.

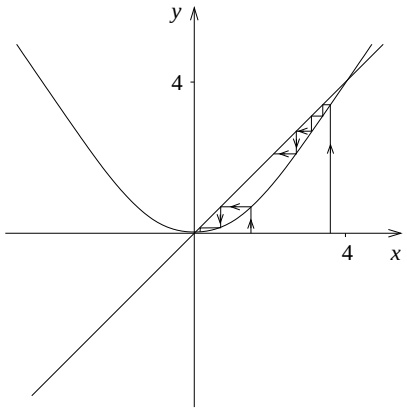

Figura 4.14: Esempio di punti fissi attrattore e repulsore

Consideriamo ora la funzione $f(x) = x^2 - 2$. I suoi punti fissi sono:

$$x_a = -1, \qquad x_b = 2$$

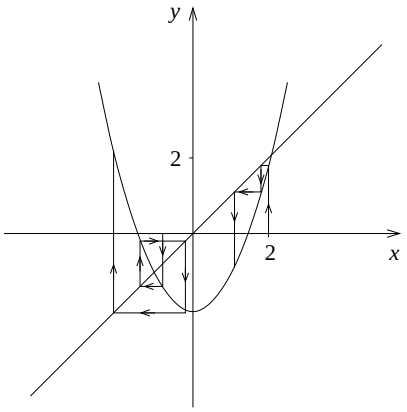

Figura 4.15: Esempio di punti fissi repulsori

Si ha inoltre:

$$|f'(x_a)| = 2 > 1, \qquad |f'(x_b)| = 4 > 1$$

Entrambi i punti fissi sono repulsori. L'analisi grafica di figura 4.15 mette il risalto questo fatto.

Ci si puó domandare cosa succede se un punto fisso *non é iperbolico*, ovvero se $|f'(p)| = 1$. In questo caso si considerino le funzioni:

- $f_1(x) = x^3 + x$
- $f_2(x) = -x^3 + x$
- $f_3(x) = x^2 + x$

Tutte queste funzioni hanno un punto fisso per $x_a = 0$.

Per quanto riguarda f_1, esiste un conveniente intorno U_a di x_a tale che per ogni $p \in U_a, p \neq x_a$ la traiettoria di p esce da U_a dopo un numero sufficiente di iterazioni. Diremo in questo caso che $x_a = 0$ é un punto *repulsore debole*. L'analisi grafica corrispondente é illustrata in figura 4.16. Osserviamo che in questa figura compare un secondo grafico, detto *diagramma di fase*, consistente in una rappresentazione, sulla retta reale, delle orbite della funzione, relativamente alle prime iterazioni.

Considerazioni simili per la f_2 portano a verificare che il punto $x_a = 0$ é un punto *attrattore debole*; esiste infatti un conveniente intorno U_a di x_a tale che per ogni $p \in U_a$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty} f^{<k>}(p) = x_a = 0$$

Si veda la figura 4.17 per la corrispondente analisi grafica.

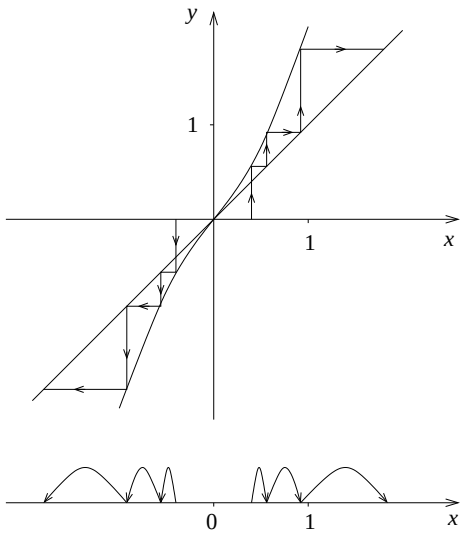

Figura 4.16: Esempio di punto fisso non iperbolico debolmente repulsore

Infine la funzione f_3 ha ancora $x_a = 0$ come punto fisso, ma in questo caso l'analisi grafica mostra che esso é repulsore se si prende un punto iniziale $p > 0$ sufficientemente vicino ad x_a, mentre x_a stesso si comporta da attrattore se si prende un punto iniziale $p < 0$, sempre sufficientemente vicino ad x_a. Vedi figura 4.18.

Il fenomeno della non iperbolicitá é strettamente collegato alla *Teoria delle Biforcazioni*.

4.6.6 Analisi grafica applicata alla parabola logistica

Analizziamo ora, per via grafica[4] , i seguenti casi:

- $0 \leq a \leq 1$
- $1 \leq a \leq 2$
- $a = 2$
- $2 \leq a \leq 3$

La figura 4.19 si riferisce alla parabola logistica con $0 \leq a \leq 1$; in questo caso possiamo notare che l'unico *punto fisso* appartenente all'intrvallo $[0, 1]$

[4]La verifica della condizione di iperbolicitá, nonché la classificazione in punti attrattori e repulsori secondo il Teorema 4.4 é lasciata al lettore per esercizio.

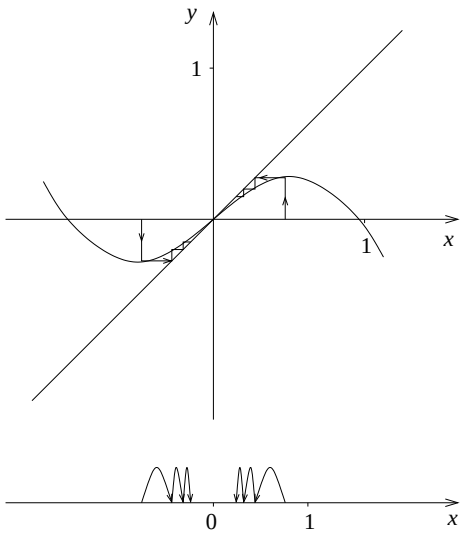

Figura 4.17: Esempio di punti fisso non iperbolico debolmente attrattore

é il punto $x = 0$ e che tutte le traiettorie tendono asintoticamente (cioé per $n \to +\infty$ a 0.

Passiamo ora al caso in cui $1 \leq a \leq 2$; osservando i grafici di figura 4.20 possiamo notare che:

- Il punto $x_a = 0$ é un punto fisso. Se il valore iniziale é sufficientemente vicino ad x_a la sua traiettoria tende a $-\infty$ per $n \to \infty$, ovvero si allontana da x_a. Diremo in questo caso che x_a é un *punto fisso repulsore*.

- Il punto $x_b = \frac{1-a}{a} < 0,5$ é un altro punto fisso. Quando il parametro a risulta supera il valore 1, si ha la *nascita* di un secondo punto fisso. Osserviamo inoltre che partendo da un punto sufficientemente vicino ad x_b la traiettoria tende asintoticamente ad x_b. Di conseguenza, diremo che x_b é un *punto fisso attrattore*.

Per $a = 2$ si ha un punto fisso repulsore $x_a = 0$ ed un punto fisso attrattore $x_b = \frac{1}{2}$ coincidente con l'ascissa del vertice della parabola. Vedi figura 4.21.

Per $2 < a < 3$ si ha ancora un punto fisso repulsore $x_a = 0$ ed un punto fisso attrattore $x_b > 0,5$. Vedi figura 4.22.

Piú precisamente, sussiste il seguente

Teorema 4.5 *Sia* $1 \leq a \leq 3$*, e sia* $f(x) = a \cdot x \cdot (1 - x)$*. Allora* f *possiede un punto fisso repulsore* $x_a = 0$*, ed un punto fisso attrattore* $x_b = \frac{a-1}{a}$*. Se inoltre* $0 \leq x \leq 1$*, si ha:*

$$\lim_{n \to \infty} f^{<n>}(x) = x_b$$

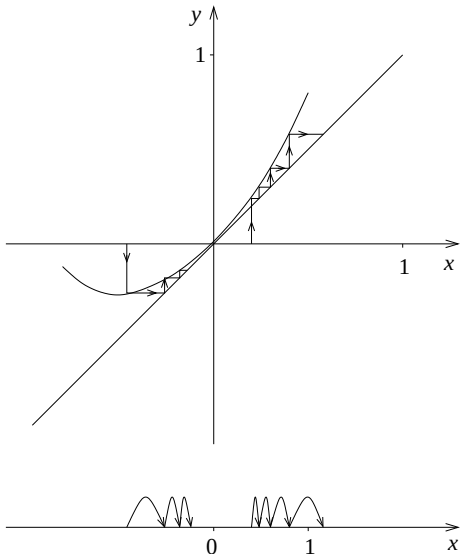

Figura 4.18: Esempio di punto fisso non iperbolico attrattore da sinistra e repulsore da destra

Infine, se $x < 0$*, o se* $x > 1$*, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} f^{<n>}(x) = -\infty$$

Il teorema é conseguenza immediata della 4.11 e dell'analisi grafica.

Una dimostrazione rigorosa si trova in [21].

Passiamo ora all'analisi per $3 \leq a \leq 4$. La trattazione teorica esula dalle pretese di queste dispense, e pertanto procediamo con una analisi grafica, rimandando ad esempio a [21] per ulteriori approfondimenti.

Per far ció, scegliamo $a = 3,6$, ed andiamo alla ricerca sia dei *punti fissi* che dei *punti periodici* della funzione:

$$f(x) = 3,6 \cdot x \cdot (1 - x)$$

Per determinare i punti fissi, occorre e basta intersecare la retta $y = x$ con il grafico di $f(x)$; ciø' é rappresentato in figura 4.23. Troviamo ancora due punti fissi: $x_a = 0$ ed $x_b = \frac{13}{18}$.

Per determinare i punti di periodo 2, occorre intersecare la retta $y = x$ con il grafico di $f^{<2>}(x) = f(f(x))$; ció é rappresentato in figura 4.24.

Analogamente, i punti di periodo 3 sono determinati dall'intersezione della retta $y = x$ con il grafico di $f^{<3>}(x)$. Si veda, a proposito, la figura 4.25.

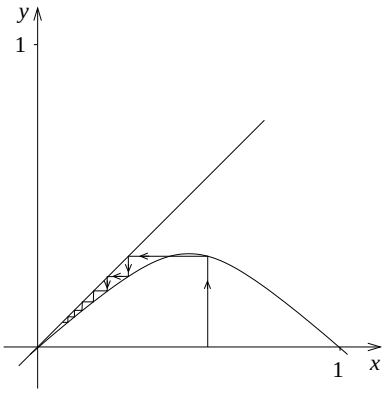

Figura 4.19: Analisi grafica per a compreso tra 0 ed 1

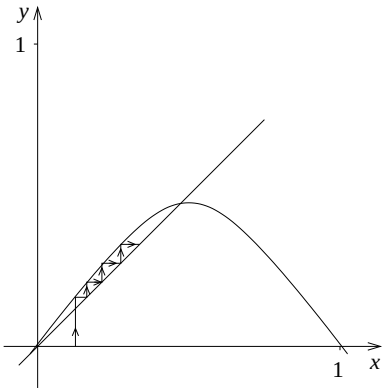

Figura 4.20: Analisi grafica per a compreso tra 1 e 2

Infine, l'intersezione della retta $y = x$ con la funzione $f^{<4>}(x)$ determina univocamente i punti di periodo 4; essi sono ben visibili in figura 4.26.

Cambiamo ora il valore di a, ponendolo uguale a $3,99027$; l'analisi grafica della funzione

$$f(x) = 3,99027 \cdot x \cdot (1 - x)$$

e delle sue iterazioni mostra come il numero di punti periodici cresce in maniera esplosiva; si vedano ad esempio le figure da 4.27 a 4.30.

In tutti i casi, si ha l'esistenza di almeno un punto di periodo 3. L'occorrenza di un'orbita di periodo 3 ha conseguenze assai importanti, come vedremo nel prossimo paragrafo.

Il caso $a > 4$ verrá trattato in seguito.

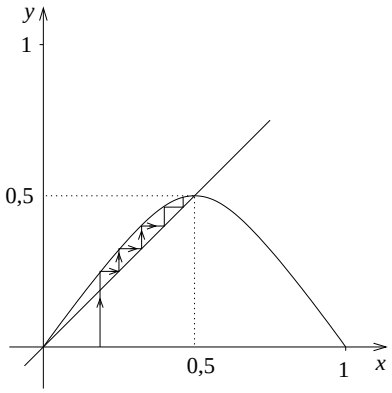

Figura 4.21: Analisi grafica per a uguale a 2

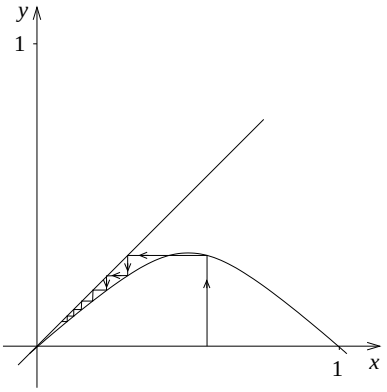

Figura 4.22: Analisi grafica per a compreso tra 2 e 3

4.6.7 Il teorema di Sarkovsky

Entriamo ora nei dettagli dello studio delle orbite periodiche di una funzione continua $f(x) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, ed incominciamo dal seguente sorprendente

Teorema 4.6 (Teorema di Sarkovsky) *Si consideri l'insieme dei numeri naturali* $\mathbb{N}$ *ordinato nel modo seguente (ordine di Sarkovky):*

$$\begin{aligned} &3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \cdots \prec 2^{\infty} \prec \ldots \\ &\prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \cdots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Sia inoltre $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $\mathbb{I}$*. Se* f *possiede almeno un'orbita periodica di periodo* k *e se* $k \prec m$ *nella 4.12, allora* f *possiede almeno un'orbita periodica di periodo* m*.*

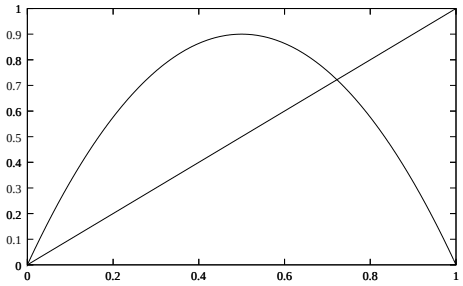

Figura 4.23: Punti fissi per $a = 3{,}6$

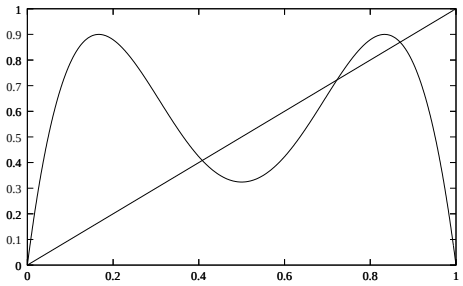

Figura 4.24: Punti di periodo 2 per $a = 3{,}6$

Per una dimostrazione, si veda ad esempio [12].

Incominciamo con alcune osservazioni: innanzitutto la relazione d'ordine $k \prec m$ si legge k *precede* m. Tale relazione é transitiva, nel senso che se $k \prec m$ ed $m \prec n$ allora $k \prec n$.

L'ordine di Sarkowsky viene ottenuto nel modo seguente: si scrivono tutti i numeri dispari, eccetto il numero 1, li si fa seguire dai numeri pari divisibili per 2, da quelli divisibili per 4, e cosí via. Infine si elencano tutte le potenze di 2 in ordine descrescente.

Per chi desidera una definizione rigorosa dell'ordine di Sarkovsky, si rimanda a [2].

Osserviamo che il Teorema di Sarkovsky vale per *qualsiasi* funzione continua definita su un intervallo $\mathbb{I}$ dell'asse reale. In particolare, esso é valido per la parabola logistica.

4.6.8 Conseguenze del Teorema di Sarkovsky

Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathbb{I}$.

Allora il Teorema 4.6 porta alle seguenti conseguenze:

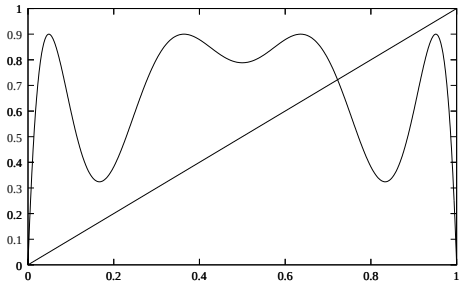

Figura 4.25: Punti di periodo 3 per $a = 3{,}6$

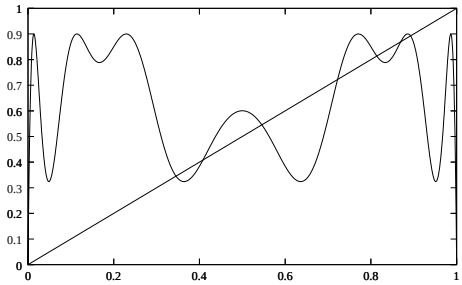

Figura 4.26: Punti di periodo 4 per $a = 3{,}6$

- Se f possiede un punto periodico di periodo primo dispari diverso da 1, allora f possiede infiniti punti periodici.

- Viceversa, se f possiede un numero finito di punti periodici, allora essi hanno necessariamente periodo primo pari, o sono punti fissi.

- L'esistenza di un orbita di periodo primo 3 implica l'esistenza di punti periodici di qualsiasi periodo. A tal proposito osserviamo che, senza conoscere il Teorema di Sarkovky (del 1964), i matematici Li e Yorke ottennero questo risultato, pubblicato sotto il titolo *Period three implies chaos*, (vedi [31]).

- Vale anche l'inverso del Teorema di Sarkosvky, possiamo infatti osservare che esistono funzioni che possiedono punti periodici di periodo primo p, e nessun punto periodico di periodo $q \prec p$. Per ulteriodi dettagli, si rimanda a [12] e [21].

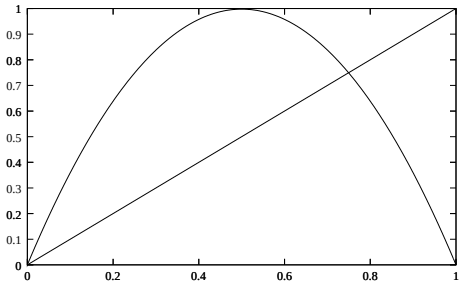

Figura 4.27: Punti fissi per $a = 3{,}99027$

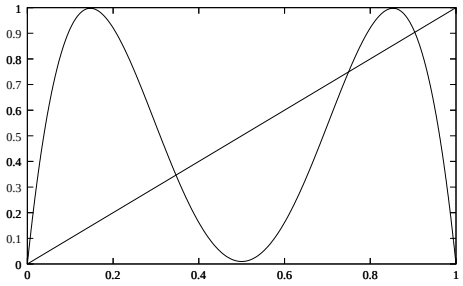

Figura 4.28: Punti di periodo 2 per $a = 3{,}99027$

4.6.9 Teoria delle Biforcazioni

Occupiamoci ora del fenomeno delle biforcazioni e del raddoppio del periodo. Questi fenomeni sono intimamente legati agli studi di Feigenbaum, ed alla sua *Teoria dell'Universalitá*.

Informalmente, secondo i piú comuni dizionari, una *biforcazione* é un divisione in due parti. Per quanto riguarda i sistemi discreti non lineari, la Teoria delle Biforcazioni si occupa dello studio del cambiamento delle proprietá di una funzione, al variare di uno parametro.

Ad esempio, la Teoria delle Biforcazioni studia la nascita e la morte di punti fissi o periodici, al variare di uno parametro di una funzione.

Come esempio classico, consideriaml la funzione:

$$f(x) = a \cdot \mathrm{e}^x \tag{4.13}$$

con $a > 0$ reale.

Consideriamo ora i punti fissi di f al variare del parametro a; dalle figure 4.31, 4.32 e 4.33 osserviamo che:

- Per $a < \frac{1}{\mathrm{e}}$ non vi sono punti fissi.

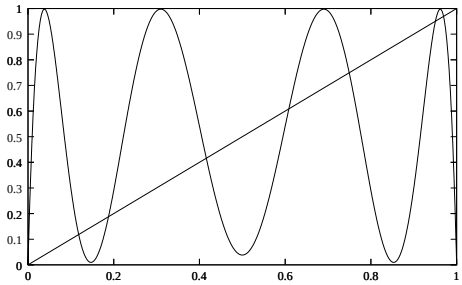

Figura 4.29: Punti di periodo 3 per $a = 3{,}99027$

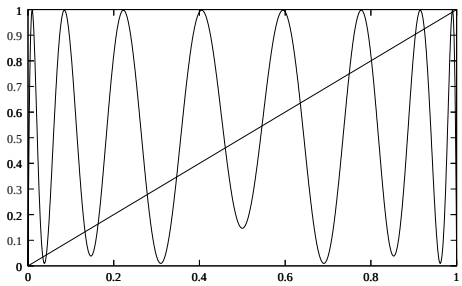

Figura 4.30: Punti di periodo 4 per $a = 3{,}99027$

- Per $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ vi é un punto fisso $x_a = 1$ $x_a = 1$.
- Per $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ i punti fissi sono due: $x_a < 1$, $x_b > 1$.

Il diagramma di fase, corrispondente ai tre casi, é rappresentato in figura 4.34.

Il fenomeno della biforcazione puó essere studiato introducendo il *diagramma delle biforcazioni*, in cui si rappresentano le ascisse dei punti fissi (o dei punti periodici) in funzione del parametro della funzione.

Nel caso in esame, il diagramma di figura 4.35 si riferisce alla posizione dei punti fissi in funzione del parametro a.

Passiamo ora allo studio delle biforcazioni relative alla parabola logistica; i risultati qui presentati costituiscono un approfondimento di quanto visto nel paragrafo 4.6.6.

Riprendiamo la mappa $f(x) = a{\cdot}x{\cdot}(1-x)$, ed esaminiamone le biforcazioni per $a \in [0, 4]$. Utilizzando l'analisi grafica ed il Teorema 4.4, si riscontrano le seguenti biforcazioni:

Per $0 < a \leq 1$ si ha che $x = 0$ é l'unico punto fisso di $f^{<k>}$, per $k \in \mathbb{N}$; questo punto é inoltre un attrattore.

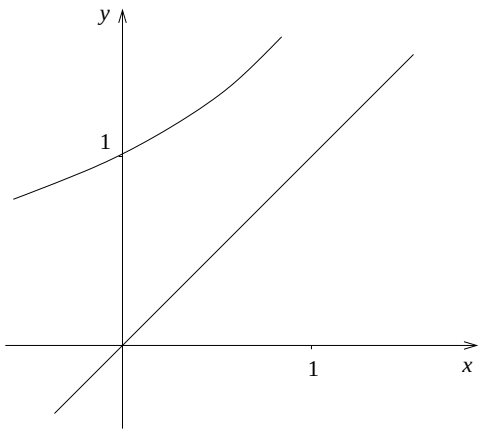

Figura 4.31: Nessun punto fisso

Se $1 < a < 3$ si ha la nascita di un secondo punto fisso di ascissa $\frac{1-a}{a}$. Questo punto é attrattore, mentre il punto fisso 0 é repulsore.

Per $a \geq 3$ l'analisi diventa assai complessa. Incrementando a nell'intervallo $[3, 4]$ si assiste alla nascita di orbite periodiche; man mano che si incrementa a si assiste al fenomeno del *raddoppio del periodo*.

Questo fenomeno consiste nella nascita di punti periodici di periodo doppio del precedente, ovvero se per un dato valore di a si ha un'orbita di periodo 2, e se si incrementa a di una quantitá opportuna, si assiste alla nascita di un'orbita periodica di periodo 4. Un ulteriore incremento del parametro a porta alla nascita di un'orbita di periodo 8, e cosí via.

In corrispondenza di ciascun valore di a in cui si assiste alla nascita di un nuovo punto periodico di periodo doppio, abbiamo a che fare con una biforcazione.

Si dimostra che l'insieme dei valori di a corrispondenti ad una biforcazione sono infiniti, sino al raggiungimento del valore $a_\infty = 3,569946\ldots$. Ció é illustrato nel diagramma di biforcazione di figura 4.36. In questo diagramma sono indicati, a fianco dei rispettivi rami, i periodi delle orbite corrispondenti.

Feigenbaum, ed indipendentemente Coullet e Tresser trovarono nel 1975 una sorprendente regolaritá nei valori di a in corrispondenza dei quali si verifica un raddoppio di periodo.

Infatti, se $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é l'insieme dei valori di a per i quali si ha la nascita di un'orbita di periodo doppio, sussiste la seguente relazione:

$$a_n = a_\infty - c \cdot q^n$$

con $c = 2.6327\ldots$ e $q = 4.669202\ldots$.

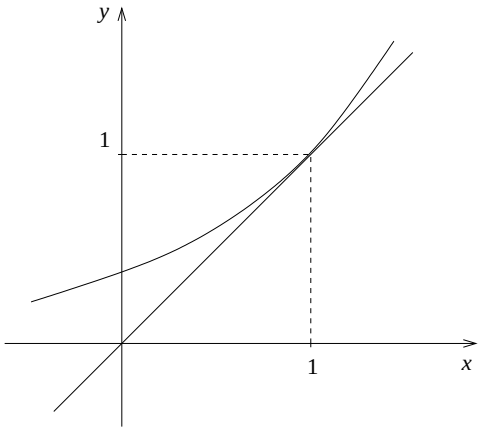

Figura 4.32: Nascita di un punto fisso

Il numero q é detto *Numero di Feigenbaum.*

Questo numero compare in molti fenomeni associati alla dinamica dei sistemi non lineari, e puó quindi essere pensato come ad una *costante universale*, cosí come lo sono π ed e.

Questa cascata infinita di raddoppi del periodo non dipende dal tipo di sistema non lineare, ed é nota come *Universalitá di Feigenbaum.*

4.6.10 Cascata di raddoppi per sistemi a tempo continuo

Il fenomeno della cascata infinita di raddoppi si verifica anche per sistemi non lineari a *tempo continuo.*

Ad esempio, uno dei modelli usati in Biologia per lo studio della riproduzione di una specie animale é dato dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = a \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x}, \qquad a > 0$$

I punti di equilibrio sono quei punti tali che $\dot{x} = 0$; si verifica facilmente che $x_a = 0$ é un punto di equilibrio, e che per piccoli valori del parametro reale a esso é un attrattore, ovvero partendo da un punto iniziale $x(0)$ sufficientemente vicino ad $x_b = 0$ si ha:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

Per un opportuno valore a_1 del parametro a si verifica la prima biforcazione, consistente nella comparsa di un secondo punto fisso attrattore x_b. Esiste

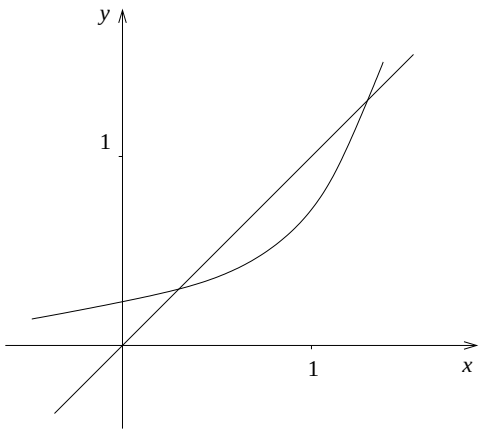

Figura 4.33: Nascita di un secondo punto fisso

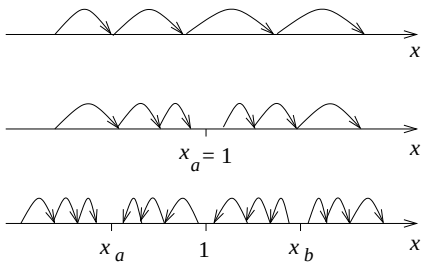

Figura 4.34: Cambiamento del diagramma di fase in corrispondenza di una biforcazione

poi un successivo valore a_2 del parametro a in corrispondenza del quale il punto fisso perde la stabilitá, dando luogo ad un comportamento oscillatorio. Un ulteriore incremento di a porta ad un comportamento oscillatorio di periodo doppio del precedente, che inizia la cascata dei raddoppi.

Ció é rappresentato nel diagramma delle biforcazioni di figura 4.37.

Questi raddoppi sono stati osservati sperimentalmente dai biologi, e spiegano assai bene la dinamica della riproduzione dei salmoni; ci sono anni in cui molti salmoni vanno in fregola, che si alternano con anni di popolazione minore.

Per maggiori dettagli si vedano [8], [39], [34] e [15].

Osserviamo infine che la Teoria di Feigenbaum si presta ad applicazioni nel campo della Tecnica e della Medicina.

Ad esempio, fenomeni di raddoppio del periodo sono osservabili sperimentalmente nel comportamento di macchine oscillanti; un caso tipico si ha nelle

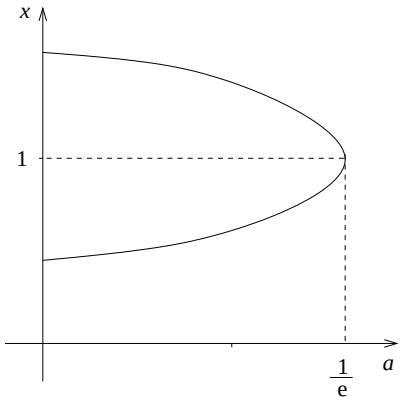

Figura 4.35: Diagramma di biforcazione per la funzione 4.13

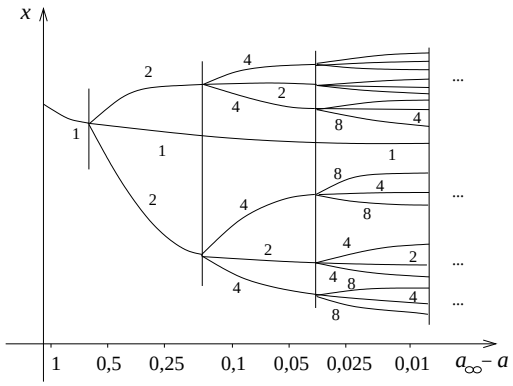

Figura 4.36: Diagramma di biforcazione per la parabola logistica

macchine volumetriche, come pompe o compressori, ove un cambiamento delle condizioni di funzionamento puó portare all'improvviso raddoppio del periodo delle oscillazioni; si veda a tal proposito la figura 4.38.

Questo metodo puó essere usato per prevedere l'arresto di sistemi meccanici oscillanti, come ad esempio pompe o compressori.

Per meglio capire il fenomeno di raddoppio del periodo, si consideri il diagramma delle fasi di una macchina volumetrica dotata di moto alternativo; siano $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ rispettivamente la ivelocitá e la posizione del pistone all'istante di tempo t.

In figura 4.39 é rappresentato una curva di fase chiusa, corrispondente ad un comportamento oscillatorio periodico.

Per opportuni cambiamenti delle condizioni di funzionamento, la curva di fase si modifica come in figura 4.40, il ciclo precedente ha perso la sua stabilitá

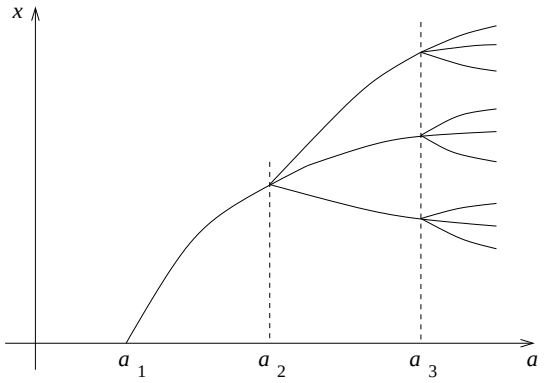

Figura 4.37: Diagramma di biforcazione per un sistema a tempo continuo

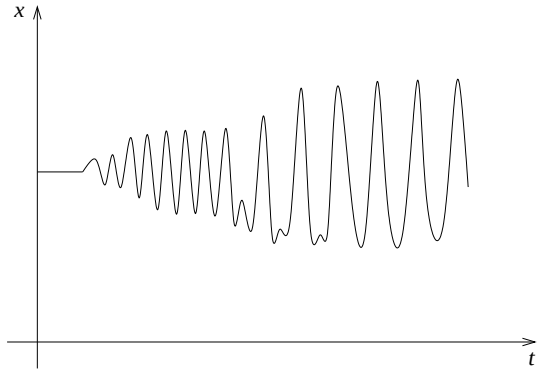

Figura 4.38: Fenomeni di raddoppio del periodo in una macchina volumetrica

ed é comparso un nuovo comportamento periodico di periodo doppio rispetto al precedente.

Vi sono altresí studi medici per l'applicazione del metodo nell'analisi di tracciati di elettrocardiografia.

4.6.11 La parabola logistica per *a* maggiore di 4

Concludiamo il capitolo determinando altre sorprendenti proprietá della parabola logistica; ci resta infatti da trattare il caso con $a > 4$.

Sia allora:

$$f(x) = a \cdot x \cdot (1 - x), \qquad a > 4$$

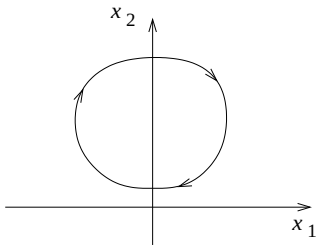

Figura 4.39: Curva di fase relativa ad un ciclo periodico di una macchina volumetrica

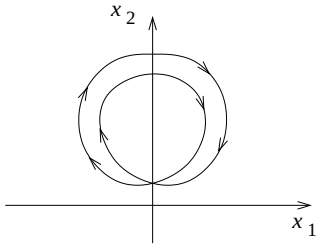

Figura 4.40: Curva di fase relativa ad un raddoppio di periodo

Osserviamo innanzitutto che, essendo $a > 4$, il vertice della parabola ha ordinata maggiore di 1.

Osserviamo altresí che tutti i punti di ascissa $x \notin [0, 1]$ si trovano su una traiettoria che tende a $-\infty$, come mostra l'analisi grafica di figura 4.41.

Di conseguenza, per le precedenti due osservazioni, esistono dei punti di $\mathbb{J} = [0, 1]$ che lasciano $\mathbb{J}$ dopo una iterazione, e conseguentemente la loro orbita tende a $-\infty$.

Sia J_0 l'insieme di tali punti; esso é rappresentato in figura 4.42.

Sia poi:

$$J_1 = \{x \in \mathbb{J} : f(x) \in J_0\}$$

l'insieme di tutti i punti dell'intervallo base che finiscono in $\mathbb{J}_0$ dopo una iterazione.

Se $x \in J_1$, allora $f(x) \in J_0$ ed $f^{<2>}(x) = f(f(x)) \notin \mathbb{J}$, da cui

$$\lim_{n \to +\infty} f^{<n>}(x) = -\infty$$

Per induzione, sia allora

$$J_n = \{x \in \mathbb{J} : f^{<k>}(x) \in \mathbb{J} \quad \text{se } k \leq n, f^{<n+1>}(x) \notin \mathbb{J}$$

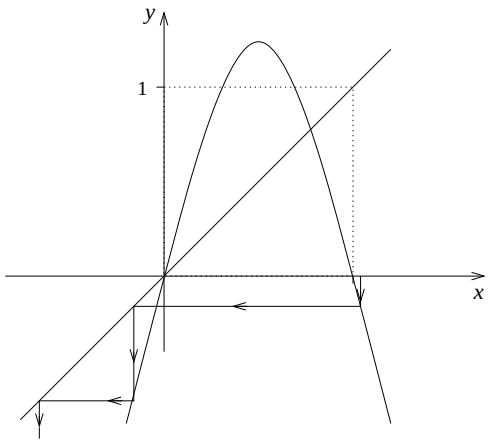

Figura 4.41: I punti della parabola logistica minori di 0 o maggiori di 1 si trovano su un'orbita divergente.

In altre parole, i punti di J_n abbandonano l'intervallo base dopo $n+1$ iterazioni.

A questo punto, ci interessa esaminare come é fatto l'insieme dei punti dell'intervallo base che non abbandona mai l'intervallo base $\mathbb{J}$ stesso. Indichiamo questo insieme con $\mathbb{Y}$.

Chiaramente:

$$\mathbb{Y} = \mathbb{J} \backslash (\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k)$$

Dato che J_0 é un intervallo aperto centrato in $x = \frac{1}{2}$, segue che $\mathbb{J} \backslash J_0$ é l'unione degli intervalli disgiunti I_1 ed I_2 di figura 4.42.

Dall'analisi grafica, si vede che esistono due intervalli I_3 ed I_4, contenuti rispettivamente in I_1 ed in I_2, tali che i punti di I_3 e di I_4 finiscono in J_0 dopo una iterazione, e di conseguenza lasciano l'intervallo base dopo due iterazioni (vedi figura 4.43).

Pertanto, J_1 sará l'unione di I_3 con I_4.

Continuando a ragionare in questo modo, possiamo notare che:

- L'insieme J_k consiste di 2^k intervalli aperti disgiunti.
- Di conseguenza, l'insieme

$$\mathbb{J}_0 \backslash (\bigcup_{n=1}^{k} J_k)$$

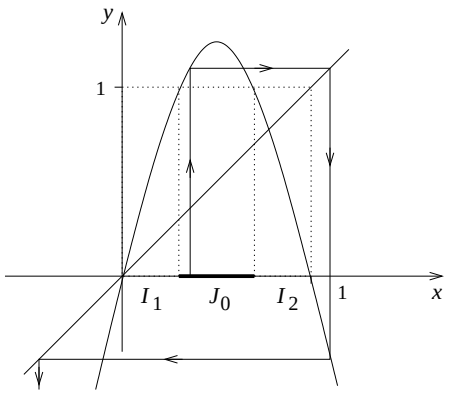

Figura 4.42: Alcuni punti della parabola logistica lasciano l'intervallo base dopo una iterazione.

é composto da 2^{k+1} intervalli chiusi[5].

- Il grafico di $f^{<k+1>}$ presenta 2^k *gobbe*, ed interseca la retta $y = x$ in 2^k punti. Di conseguenza, la funzione $f^{<k>}(x)$ possiede 2^k punti fissi (Si veda in proposito la figura 4.44, riferita al caso $k = 1$. Segue che la funzione $f(x)$ possiede 2^k punti di *periodo primo* k nell'intervallo base.

- Per l'osservazione precedente, $f(x)$ possiede 2^3 punti di periodo primo 3. Per il Teorema di Sarkovsky, segue che $f(x)$ possiede punti periodici di qualsiasi periodo nell'intervallo base.

- L'ultima osservazione dimostra come sia fallace l'uso del calcolatore nello studio di mappe caotiche.

Osserviamo inoltre che la costruzione dell'insieme $\mathbb{Y}$ ricorda quella dell'insieme di Cantor, riportata in appendice D.

A tal proposito, si puó dimostrare il seguente

Teorema 4.7 *Se $a > 4$, allora $\mathbb{Y}$ é un insieme di Cantor.*

4.6.12 Insiemi frattali

L'insieme $\mathbb{Y}$, alla pari dell'insieme di Cantor, é un esempio di *frattale*.

La parola *frattale* deriva dalla parola latina *fractus*, che significa *interrotto* od *irregolare*.

[5]Si ha infatti: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

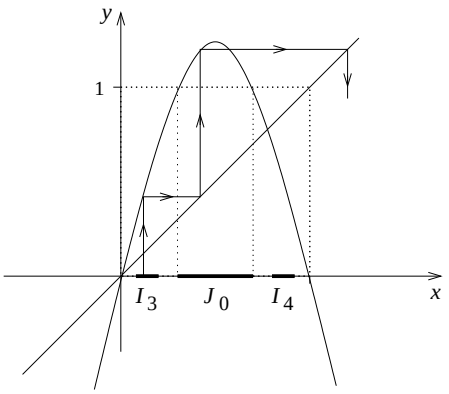

Figura 4.43: Alcuni punti della parabola logistica lasciano l'intervallo base dopo due iterazioni.

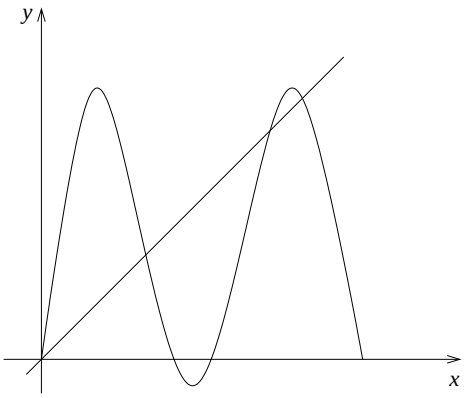

Figura 4.44: Punti fissi di $f(f(x))$

Molti insiemi frattali hanno delle proprietá di *autosomiglianza*, ovvero un ingrandimento di un loro frammento arbitrariamente piccolo appare uguale all'insieme stesso.

Tra di questi, troviamo l'insieme di Cantor.

Per un approfondimento sugli insiemi frattali, vedasi ad esempio [33] (un ottimo testo divulgativo) e [22] (un testo con rigorose definizioni matematiche).

4.6.13 Caos

Il comportamento della parabola logistica é assai complesso per $a > 3$; per $a > 4$ esso é ancora piú curioso.

Diremo in questo caso che la funzione ha un *comportamento caotico.*

Per il lettore desideroso di una definizione di *funzione caotica*, segnaliamo la seguente, rimandando a [12] per ulteriori dettagli:

Definizione 4.6 *Una mappa $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ é caotica se e solo se possiede un punto periodico di periodo primo che non é una potenza di due.*

Questa definizione, dovuta a Li e Yorke, presenta alcune varianti, che si trovano in [21] ed in [2].

Una conseguenza importante della caoticitá é dovuta al fatto che in questo caso la mappa presenta infinite orbite periodiche, tutte con differente periodo (per il Teorema di Sarkovsky).

Per analizzare ulteriori conseguenze, ci serve la seguente:

Definizione 4.7 *Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$. Se esistono due intervalli chiusi J e K contenuti in $\mathbb{I}$ con al piú un punto in comune, e se:*

$$J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K)$$

diremo che f é turbolenta. Se J e K possono essere scelti disgiunti, diremo che f é strettamente turbolenta.

Nella precedente definizione, si é posto

$$f(J) = \{f(x) : x \in J\},$$

ovvero $f(J)$ é l'*immagine* dell'insieme J, e si é fatto analogamente per K.

Si ha allora il seguente Teorema, che permette di dare altre due definizioni equivalenti di caoticitá:

Teorema 4.8 *Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *f possiede un punto periodico di periodo primo n che non é una potenza di 2.*
- *La funzione $f^{<n>}$ é turbolenta.*
- *La funzione $f^{<n>}$ é strettamente turbolenta.*

Per la dimostrazione, vedi [12].

Valgono inoltre i seguenti due Teoremi:

Teorema 4.9 *Una funzione turbolenta possiede punti periodici di qualsiasi periodo.*

Teorema 4.10 *Se f ha un punto periodico di periodo primo dispari $n > 1$, allora $f^{<2>}$ é strettamente turbolenta, e per ogni $m \geq n$, $f^{<m>}$ é strettamente turbolenta.*

Per le relative dimostrazioni, si rimanda a [12].

Indichiamo ora con $\mathbb{K}$ l'insieme di tutte le funzioni *caotiche* e *continue*, con $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$

Siano inoltre

1. $\mathbb{P}_n$,
2. $\mathbb{T}_n$,
3. $\mathbb{S}_n$

gli insiemi delle le funzioni *continue*, con $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ rispettivamente tali che

1. f possieda almeno un punto periodico di periodo n
2. $f^{<n>}$ sia turbolenta
3. $f^{<n>}$ sia strettamente turbolenta

.

Per la definizione di caoticitá si ha:

$$\mathbb{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n$$

Inoltre, se n non é una potenza di 2, dal Teorema 4.8 segue:

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{S}_n = \mathbb{T}_n$$

Il Teorema di Sarkovsky implica allora la seguente catena di inclusioni:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_3 \subset \mathbb{P}_5 \subset \mathbb{P}_7 \subset \cdots \subset \mathbb{P}_6 \subset \mathbb{P}_{10} \subset \mathbb{P}_{14} \subset \cdots \subset \\ \mathbb{P}_{12} \subset \mathbb{P}_{20} \subset \mathbb{P}_{28} \subset \cdots \subset \mathbb{P}_4 \subset \mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_1 \subset \end{aligned} \tag{4.14}$$

conosciuta come *stratificazione di Sarkovsky.*

Questa catena puó essere raffinata, grazie ai Teoremi 4.9 e 4.10 nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{T}_1 \subset \mathbb{P}_3 \subset \mathbb{P}_5 \subset \mathbb{P}_7 \subset \cdots \subset \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{T}_2 \subset \mathbb{P}_6 \subset \mathbb{P}_{10} \subset \cdots \subset \\ \mathbb{S}_4 \subset \mathbb{T}_4 \subset \mathbb{P}_{12} \subset \mathbb{P}_{20} \subset \cdots \subset \mathbb{K} \subset \cdots \subset \mathbb{P}_4 \subset \mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_1 \subset\end{aligned} \tag{4.15}$$

Questa catena é nota come *stratificazione della turbolenza*. Per ulteriori dettagli, si rimanda a [12].

Citiamo infine il seguente risultato, la cui dimostrazione si trova in [21]:

Teorema 4.11 *La parabola logistica é caotica nell'intervallo* $[0, 1]$ *per* $a > 4$.

Notiamo che il fenomeno di caoticitá della parabola logistica é limitato all'insieme di Cantor $\mathbb{Y}$; i punti che stanno al di fuori di tale insieme appartengono infatti a orbite che tendono a $-\infty$.

Dato che l'insieme di Canton *non contiene intervalli*, segue l'impossibilit'a di individuare un punto di $\mathbb{Y}$ e di effettuare la simulazione delle iterazioni mediante un elaboratore.

Capitolo 5

Il problema della stabilitá

5.1 Introduzione

Nel presente capitolo verranno analizzate le problematiche relative alla stabilitá dei sistemi lineari. Verranno introdotti i concetti di stabilitá esterna ed interna, nonché un criterio per stabilire sotto quali condizioni i due concetti di equivalgono. Verranno altresí presentati, senza dimostrazioni, i piú importanti criteri di stabilitá; questi saranno corredati da esempi applicativi. Tranne avviso contrario, nel presente capitolo considereremo esclusivamente sistemi lineari.

5.2 Studio del movimento di un sistema lineare

Consideriamo l'equazione di stato (in forma matriciale) di un sistema lineare a tempo continuo:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

La Teoria delle Equazioni Differenziali ci garantisce, noto l'ingresso $U(t)$ e lo stato iniziale del sistema, l'esistenza e l'unicitá della soluzione $X(t)$[1].

La soluzione puó essere rappresentata nello spazio delle fasi; la linea cosí ottenuta é detta, come noto, curva di fase o *traiettoria*.

[1]Nel capitolo relativo alle equazioni differenziali avevamo dimostrato ció nel caso di un sistema autonomo; tuttavia la teoria generale vale anche per sistemi non autonomi, purché le funzioni $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t)$ che rappresentano gli ingressi (ovvero gli elementi della matrice $U(t)$) siano continue in un intervallo di tempo $[0, T_m]$. In questo caso la soluzione esiste, ed é unica, per $t \in [0, T_m]$. Si veda ad esempio [4]

Consideriamo ora l'equazione di stato di un sistema lineare non autonomo a tempo discreto:

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

Anche in questo caso si puó dimostrare l'esistenza e l'unicitá della soluzione $X(t)$, noto lo stato iniziale e l'ingresso $U(t)$.

La soluzione puó ancora essere rappresentata nello spazio delle fasi; ma in questo caso la traiettoria é costituita da un insieme di punti. Per meglio chiarire l'evoluzione del sistema, si possono collegare tali punti con dei segmenti orientati.

In figura 5.1 sono rappresentati due esempi di traiettorie rispettivamente per un sistema a tempo continuo e per un sistema a tempo discreto.

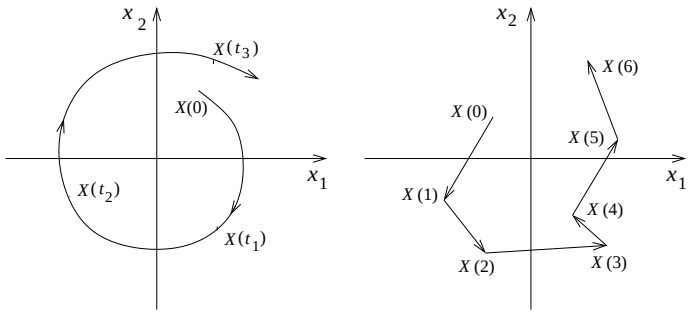

Figura 5.1: Esempio di traiettorie per sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto

Per alcuni sistemi (indipendentemente dall'essere a tempo continuo o a tempo discreto), possono esistere un particolare stato iniziale $X(0)$ ed un particolare ingresso $U(t)$ tali che

$$X(t+T) = X(T)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{S}$$

ove $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ per sistemi a tempo continuo, ed $\mathbb{S} = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ per sistemi a tempo discreto. In questo caso la traiettoria é chiusa. Si dice allora che la traiettoria é un *ciclo*. Il numero reale T é detto il *periodo* del ciclo.

Nel caso in cui anche l'uscita Y sia periodica, con lo stesso periodo T, si dice che il sistema funziona in *regime periodico*.

I cicli ottenuti con ingresso nullo o costante sono detti *autonomi*, mentre quelli ottenuti con ingresso variabile sono detti *liberi*.

Se esiste un particolare stato del sistema $X(t)$ che non varia nel tempo, diremo, come noto, che esso é uno stato di equilibrio (o punto fisso).

Ció conduce alla seguente

Definizione 5.1 *Si consideri un sistema lineare, a tempo continuo o discreto. Tale sistema si dice in equilibrio (o in stato stazionario) se esiste un ingresso costante $\bar{U}$ tale che stato ed uscita restino costanti nel tempo, ovvero tali che*

$$X(t) = \bar{X}\,, \qquad Y(t) = \bar{Y}\,, \forall t \in \mathbb{S}$$

Per un sistema a tempo continuo, la condizione di equilibrio $X(t) = \bar{X}$ implica $\dot{X} = 0$, mentre per un sistema a tempo discreto essa implica $X(t+1) = X(t) = \bar{X}$. Queste condizioni permettono di determinare gli stati di equilibrio di un sistema, come illustrato negli esempi seguenti.

5.2.1 Equilibrio di un sistema a tempo discreto

Si consideri il modello a tempo discreto, atto a stimare il numero di diplomati nel trienno di un Istituto Tecnico giá visto nel paragrafo 1.3, e siano:

$$k_1 = 0,2 \quad k_2 = 0,2 \quad k_3 = 0$$

Le equazioni possono essere scritte in forma matriciale, ottenendo cosí la seguente quaterna di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda l'equazione di stato

$$X(t+1) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

dobbiamo imporre $X(t+1) = X(t) = \bar{X}$ ed $U(t) = \bar{U}$. Otteniamo allora:

$$\bar{X} = A \cdot \bar{X} + B \cdot \bar{U}$$

Introducendo la matrice identitá I, si ha allora:

$$(I - A) \cdot \bar{X} = B \cdot \bar{U}$$

Di conseguenza, se la matrice $(I-A)$ é invertibile, esiste uno ed un solo stato di equilibrio relativo ad un ingresso costante $\bar{U}$, ovvero:

$$\bar{X} = (I - A)^{-1} \cdot B \cdot \bar{U}$$

Come si vede, lo stato di equilibrio é unico, per ogni ingresso costante $\bar{U}$ se e solo se la matrice $I - A$ é invertibile.

Se non si desidera affrontare il calcolo matriciale, é possibile risolvere il sistema di equazioni corrispondente; a tal scopo supponiamo che ogni anno si iscrivano $\bar{u} = 20$ alunni nella classe terza. Si ha allora il seguente stato di equilibrio:

$$\bar{x}_1 = 0,2 \cdot \bar{x}_1 + 20$$
$$\bar{x}_2 = 0,8 \cdot \bar{x}_1 + 0,2 \cdot \bar{x}_2$$
$$\bar{x}_3 = 0,8 \cdot \bar{x}_2$$

Si ottiene allora:

$$\bar{x}_1 = 25$$
$$\bar{x}_2 = 25$$
$$\bar{x}_3 = 20$$

Il numero di diplomati annuali é infine:

$$\bar{y} = 20$$

5.2.2 Equilibrio di un sistema a tempo continuo

Consideriamo ora il sistema a tempo continuo costituito dalla rete elettrica di figura 1.9. Nel paragrafo 1.6.1 é stata ricavata, per essa, la seguente quaterna di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Supponiamo che l'ingresso $u(t) = V(t)$ sia una tensione continua, ad esempio $u(t) = 1\,\mathrm{V}$.

Lo stato di equilibrio viene ottenuto ponendo $\dot{X} = \mathbf{0}$ nell'equazione di stato, con

$$U = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Occorre cioé risolvere il sistema di equazioni seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

che puó essere scritto come:

$$\begin{cases} -\frac{R}{L} \cdot x_1 - \frac{1}{L} \cdot x_2 + \frac{1}{L} = 0 \\ \frac{1}{C} \cdot x_1 = 0 \end{cases}$$

Si ricava allora lo stato di equilibrio del sistema:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1$$

5.3 Definizione di sistema stabile

Determinato uno stato di equilibrio, interessa sapere cosa succede spostandoci di poco da esso, ovvero come evolve il sistema partendo da una condizione iniziale prossima ad uno stato di equilibrio. Il prossimo paragrafo introdurrá l'importante definizione di *stabilitá asintotica*, mentre nei paragrafi successivi verranno introdotti diversi criteri di verifica della stabilitá.

5.4 Stabilitá asintotica

Iniziamo con una

Definizione 5.2 *Il movimento libero di un sistema lineare é l'insieme dei valori:*

$$X(t) = \Psi(t) \cdot X(0), \quad t \geq 0$$

ove $X(0)$ *indica lo stato iniziale del sistema, e dove:*

$$\Psi(t) = \begin{cases} \exp(At) & \textit{nei sistemi a tempo continuo} \\ A^t & \textit{nei sistemi a tempo discreto} \end{cases}$$

ottenuti nel caso di ingresso $U(t)$ *nullo.*

In poche parole, il movimento libero consiste nell'evoluzione dello stato del sistema, con ingresso nullo, per $t \geq 0$. Determinare il movimento libero di un sistema lineare é pertanto equivalente alla risoluzione del sistema autonomo

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$$

per un sistema a tempo continuo, oppure alla risoluzione del sistema autonomo

$$X(t+1) = A \cdot X(t)$$

per un sistema a tempo discreto, noto lo stato iniziale $X(0)$.

Possiamo ora passare alla definizione di stabilitá asintotica:

Definizione 5.3 *Un sistema é asintoticamente stabile se, per ogni stato iniziale $X(0)$, si ha:*

$$\lim_{t\to+\infty} \Psi(t)\cdot X(0) = \lim_{t\to+\infty} X(t) = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

Puó capitare che il movimento libero di un sistema non tenda a zero per $t \to +\infty$, ma che tuttavia i valori delle variabili di stato rimangano limitati. Parleremo allora di *stabilitá semplice*.

Piú precisamente, si ha la seguente:

Definizione 5.4 *Se il movimento libero é limitato, pur esistendo valori iniziali dello stato tali che non valga la 5.2, diremo che il sistema é semplicemente stabile.*

Infine, se esiste qualche valore dello stato iniziale tale che il movimento libero risulta illimitato, diremo che il sistema é *instabile*.

5.4.1 Esempio

É semplicemente stabile il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione

$$x(t+1) = a\cdot x(t)$$

per $a = 1$; si ha infatti $x(t) = x(0)$, per ogni $t \geq 0$. Per $a < 1$ tale sistema ó risulta invece asintoticamente stabile, avendosi

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

Il seguente teorema stabilisce una equivalenza tra la risposta di un sistema con un ingresso costante e la proprietá di asintotica stabilitá.

Teorema 5.1 *Un sistema lineare é asintoticamente stabile se per ogni ingresso costante $\bar{U}(t)$ esiste uno ed un solo stato di equilibrio $\bar{X}$ tale che si abbia, per ogni stato iniziale $X(0)$:*

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = X(0) \tag{5.3}$$

In altre parole, partendo da un qualsiasi stato $X(0)$, la traiettoria deve tendere all'unico stato di equilibrio $\bar{X}$ del sistema.

Per una semplice dimostrazione, relativa a sistemi a tempo discreto, vedasi [37].

5.5 Legame tra stabilitá asintotica ed autovalori

Per i sistemi lineari, sussistonono i seguenti teoremi, che costituiscono i fondamenti di tutta la *Teoria del Controllo Automatico*:

Teorema 5.2 *Un sistema lineare a tempo discreto é asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *della matrice A hanno tutti modulo minore di* 1*, ovvero se*

$$|\lambda_1| < 1,\ |\lambda_2| < 1,\ \ldots,\ |\lambda_n| < 1 \tag{5.4}$$

Si confronti questo teorema con il caso particolare descritto nell'esempio 5.4.1, relativo ad un sistema descritto da una sola variabile di stato.

Il secondo teorema riguarda i sistemi a tempo continuo:

Teorema 5.3 *Un sistema lineare a tempo continuo é asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *della matrice A hanno tutti parte reale minore di zero, ovvero se*

$$\mathrm{Im}(\lambda_1) < 0,\ \mathrm{Im}(\lambda_2) < 0,\ \ldots,\ \mathrm{Im}(\lambda_n) < 0 \tag{5.5}$$

Nel caso di un sistema con una sola variabile di stato x, descritto dall'equazione differenziale $\dot{x} = ax$, ció significa che condizione necessaria e sufficiente per la sua stabilitá, é che si abbia $a < 0$, dato che il parametro a coincide con l'unico autovalore del sistema.

5.6 Autovalori e costanti di tempo

A ciascun autovalore della matrice A, è associata una costante di tempo. Nel caso di sistema a *tempo continuo*, la costante di tempo associata all'autovalore λ_i è

$$T_i = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_i)}$$

mentre per un sistema a *tempo discreto*, il legame è il seguente:

$$T_i = -\frac{1}{\log|\lambda_i|}$$

Nel caso di sistemi a *tempo continuo*, ha pertanto senso parlare di costante di tempo associata ad un autovalore solo quando questo ha parte reale minore

di zero; in caso contrario avremo infatti una costante di tempo negativa, priva di significato fisico. Più la parte reale dell'autovalore è vicina a zero (cioè più l'autovalore si avvicina all'asse delle ordinate nel piano complesso, sempre stando nel semipiano sinistro), maggiore è il valore della costante di tempo.

Nel caso di sistemi a *tempo discreto*, si ha $T_i > 0$ se e solo se $|\lambda_i| < 1$, mentre per $|\lambda_i| > 1$ la costante di tempo diventa negativa, perdendo di significato. Piú grande è il modulo dell'autovalore (cioè più esso si avvicina alla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano complesso, sempre stando all'interno di essa), più grande risulta la costante di tempo ad esso associata.

Determinate tutte le costanti di tempo di un sistema, la più grande di essa è detta *costante di tempo dominante*, e l'autovalore corrispondente è detto *autovalore dominante*.

E' importante notare che, per quanto detto, ha senso parlare di costante di tempo dominante solo per un sistema asintoticamente stabile.

5.7 Criteri di asintotica stabilitá per sistemi a tempo continuo

Esaminiamo ora alcuni criteri, che ci permettono di testare se un sistema risulta o no asintoticamente stabile, *senza* calcolarne i suoi autovalori.

5.7.1 Il test di Hurwitz

Il test di Hurwitz permette di determinare l'asintotica stabilità di un sistema a tempo continuo descritto mediante l'equazione matriciale $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$, costruendo una tabella con i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A. Notiamo come la matrice B non sia coinvolta nello studio. Infatti, a determinare la stabilità asintotica sono gli autovalori della matrice A. Inoltre, ricordiamo che l'asintotica stabilità è intimamente legata allo studio del *movimento libero* del sistema, cioè con stato iniziale non nullo ed ingresso $U(t)$ nullo.

Teorema 5.4 (Criterio di Hurwitz) *Sia:*

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n \tag{5.6}$$

il polinomio caratteristico della matrice A. Costruiamo ora la cosiddetta tabella di Hurwitz H, che non è altro che una matrice quadrata di ordine n (ove n è il grado del polinimio caratteristico):

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ & & \dots & & & \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

in cui poniamo $a_j = 0$ *per ogni* $j > n$. *Si considerano poi i seguenti minori della matrice* H*:*

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$D_n = \det H$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia asintoticamente stabile, è che risulti $D_j > 0$*, per* $j = 1, 2, \dots, n$.

5.7.2 Esempio di applicazione del criterio di Hurwitz

Consideriamo un sistema a tempo continuo la cui matrice A è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 15\lambda - 9$$

I coefficienti sono: $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = -15$, $a_4 = -9$, $a_j = 0$ per $j > 4$. La matrice di Hurwitz è allora la seguente:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Da essa ricaviamo:

$$D_1 = 3 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -15 & 2 \end{bmatrix} = 21 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -15 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -15 \end{bmatrix} = -234 < 0$$

$$D_4 = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 2106 > 0$$

Avendosi $D_3 < 0$, il sistema non è asintoticamente stabile.

5.7.3 Avvertenza

Nel caso di sistemi a tempo continuo, quando i segni dei coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti positivi, cioè esiste qualche coefficiente nullo o negativo, si ha sicuramente almeno un autovalore con parte reale maggiore o uguale a zero, ed il sistema non puó essere asintoticamente stabile. Pertanto, se tra i coefficienti vi è un a_j positivo o nullo, per $1 \leq j \leq n$, il sistema non può essere asintoticamente stabile. In questo caso, è inutile applicare il criterio di Hurwitz. Nell'esempio precedente, eravamo in questa condizione. Se invece i coefficienti sono tutti positivi, non sappiamo nulla sulla stabilità del sistema a meno di calcolare gli autovalori, o applicare il criterio di Hurwitz o qualsiasi altro criterio di stabilità.

5.7.4 Le unitá di misura logaritmiche

Per poter proseguire nello studio dei criteri di stabilitá, dobbiamo introdurre le cosiddette *unitá di misura logaritmiche* utilizzate in particolare nello studio della risposta in frequenza dei sistemi lineari e nello studio dei sistemi di comunicazione elettrica.

5.7.5 Elementi di acustica

La nozione di *decibel* nasce storicamente dagli studi di *acustica*. Ricordiamo innanzitutto che l'intensitá I di un'onda[2] che incide su una superficie di area

[2]Non necessariamente acustica, lo stesso discorso vale ad esempio per un'onda elettromagnetica.

S é data dal rapporto:

$$I = \frac{P}{S}$$

ove P indica la potenza dell'onda incidente. L'intensitá é di conseguenza misurata in $\mathrm{W\,m^{-2}}$.

Esempio 5.1 *Si consideri un altoparlante, che emette un'onda sonora con potenza acustica di* $10\,\mathrm{W}$*, che incide in modo isotropo*[3] *su una cupola di forma emisferica di raggio* $r = 10\,\mathrm{m}$ *(vedi figura 5.2). La superficie della cupola*[4] *é allora:*

$$S = 2\pi r^2 = 628\,\mathrm{m^2}$$

L'intensitá sonora é allora

$$I = \frac{P}{S} = 15,9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

.

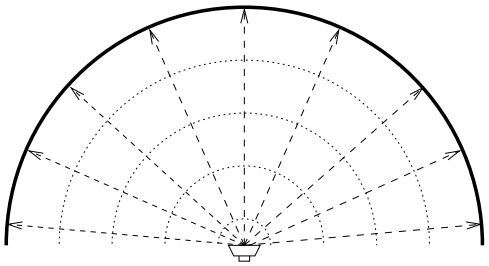

Figura 5.2: Altoparlante che diffonde su una cupola emisferica

Gli studi sulla sensibilitá dell'orecchio umano hanno portato alla conclusione che, per ogni frequenza f di un'onda acustica vi é una minima intensitá al di sotto del quale il suono non é udibile (detta *soglia della percezione sonora*), ed una intensitá massima (detta *soglia del dolore*) sopra la quale si avvertono senzazioni di dolore, sovente accompagnate a danni biologici. Si puó dunque costruire un grafico, detto *gamma uditiva media*, in cui le soglie di intensitá vengono riportate, su scala logaritmica, in funzione della frequenza del suono, anch'essa espressa in scala logaritmica. Tale grafico é riportato in figura 5.3. La linea a tratto intero rappresenta la soglia del dolore, mentre quella punteggiata rappresenta la soglia della percezione.

[3] Ovvero la potenza incidente non dipende dalla direzione.

[4] Ricordiamo che la superficie di una sfera di raggio r é $4\pi r^2$.

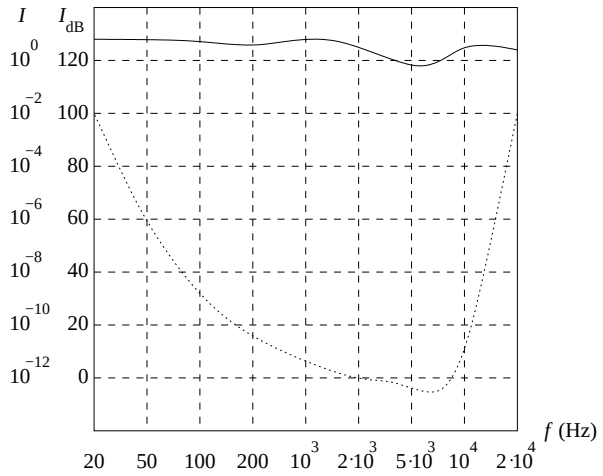

Figura 5.3: Sensibilitá media dell'orecchio umano

Alla frequenza di 400 Hz, la minima intensitá udibile é di $7,2{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, mentre alla frequenza di 1000 Hz essa é di circa $10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Per questo motivo, si é stabilito di scegliere come *livello di riferimento* dell'intensitá sonora il valore

$$I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

In questo modo é possibile introdurre una nuova unitá di misura dell'intensitá sonora, introducendo l'intensitá misurata in *bel*, definita come:

$$I_{\mathrm{bel}} = \log_{10}\frac{I}{I_0}$$

Piú comunemente, si utilizza un sottomultiplo, ovvero il *decibel*, abbreviato con il simbolo dB. L'intensitá in *decibel* é allora data da:

$$I_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10}\frac{I}{I_0}$$

Si osservi che nel grafico rappresentato in figura 5.2 le intensitá sono altresí misurate in decibel. Il valore 0 dB corrisponde dunque ad una intensitá I uguale al valore di riferimento I_0[5].

Esempio 5.2 *Calcolando l'intensitá sonora in decibel per il valore di I trovato nell'esempio 5.1, si ottiene il valore:*

$$I_{\mathrm{dB}} = 102\,\mathrm{dB}$$

[5]In assenza di suono, ad esempio nel vuoto, si ha $I = 0$, e quindi non é possibile definire l'intensitá sonora in decibel. Infatti per $I \to 0$ si ha $I_{\mathrm{dB}} \to -\infty$.

5.7.6 Uso delle unitá logaritmiche nelle reti elettriche

Neper e decibel

Si consideri il sistema *lineare* rappresentato in figura 5.4.

Figura 5.4: Rappresentazione di un sistema lineare

Se indichiamo con P_i la potenza in ingresso e con P_u la potenza uscente dal sistema (entrambi a regime), possiamo definire il guadagno in potenza come:

$$G = \frac{P_u}{P_i} \tag{5.8}$$

Si ha allora la seguente:

Definizione 5.5 *Il guadagno espresso in decibel é:*

$$G_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_u}{P_i} \tag{5.9}$$

Il guadagno espresso in neper é:

$$G_{\mathrm{Np}} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{P_u}{P_i} \tag{5.10}$$

Osserviamo che la definizione del guadagno in *neper* utilizza il logaritmo in base e, o logaritmo neperiano[6].

Figura 5.5: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare

Supponiamo ora che il sistema lineare sia costituito da un doppio bipolo lineare funzionante in continua od in regime sinusoidale; in questo caso, indicate con I_i, I_u le correnti entranti ed uscenti, e con V_i, V_u le tensioni in ingresso

[6]L'abbreviazione del neper é Np.

ed in uscita, possiamo definire il guadagno in corrente G_i ed il guadagno in tensione G_v come:

$$G_i = \frac{|I_u|}{|I_i|}$$

$$G_v = \frac{|V_u|}{|V_i|}$$

Supponiamo ora che $V_i, V_u, I_i, I_u, P_i, P_u$ vengano misurate su resistenze identiche, di valore pari ad R. Si ha allora:

$$\frac{P_u}{P_i} = \frac{\frac{|V_u|^2}{R}}{\frac{|V_i|^2}{R}} = \frac{|V_u|^2}{|V_i|^2}$$

$$\frac{P_u}{P_i} = \frac{R \cdot |I_u|^2}{R \cdot |I_i|^2} = \frac{|I_u|^2}{|I_i|^2}$$

É allora possibile esprimere il guadagno in decibel in funzione delle tensioni, o delle correnti:

$$G_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|V_u|^2}{|V_i|^2} = 20 \log_{10} \frac{|V_u|}{|V_i|}$$

$$G_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|I_u|^2}{|I_i|^2} = 20 \log_{10} \frac{|I_u|}{|I_i|}$$

ove si é utilizzata la proprietá $\log_a x^2 = 2 \cdot \log_a x$. Si ha cioé:

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} G = 20 \log_{10} G_i = 20 \log_{10} G_v} \tag{5.11}$$

Analogamente, il guadagno in neper puó essere espresso come:

$$G_{\mathrm{Np}} = \log \frac{|V_u|}{|V_i|} = \log \frac{|I_u|}{|I_i|}$$

$$\boxed{G_{\mathrm{Np}} = \frac{1}{2} \cdot \log G = \log G_i = \log G_v} \tag{5.12}$$

La seguente tabella riporta un quadro riassuntivo di quanto esposto:

	Guadagno in neper (Np)	Guadagno in decibel (dB)
Tra potenze	$\frac{1}{2} \cdot \log \frac{P_u}{P_i}$	$10 \cdot \log_{10} \frac{P_u}{P_i}$
Tra tensioni	$\log \frac{\|V_u\|}{\|V_i\|}$	$20 \cdot \log_{10} \frac{\|V_u\|}{\|V_i\|}$
Tra correnti	$\log \frac{\|I_u\|}{\|I_i\|}$	$20 \cdot \log_{10} \frac{\|I_u\|}{\|I_i\|}$

Con questa definizione, i rapporti (in decibel o in neper) tra potenze coincidono con i rispettivi rapporti tra le tensioni o tra le correnti.

5.7.7 Sistemi in cascata

Nel caso di sistemi in cascata, il guadagno totale é ottenuto dal prodotto dei guadagni dei singoli blocchi costituenti il sistema. Con riferimento alla figura

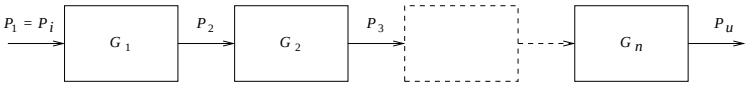

Figura 5.6: Sistemi in cascata

5.6, rappresentante n sistemi in cascata, si ha:

$$P_2 = G_1 \cdot P_1 = G_1 \cdot P_i$$

$$P_3 = G_2 \cdot P_2$$

$$\dots$$

$$P_u = G_n \cdot P_n$$

e di conseguenza, si ha:

$$G = \frac{P_u}{P_i} = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_n \tag{5.13}$$

Se il guadagno di ciascun blocco é espresso in decibel, ovvero se:

$$G_{i(\mathrm{dB})} = 10 \cdot \log_{10} G_i \,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

segue che il *guadagno totale in decibel* é la *somma* dei singoli guadagni, espressi in decibel[7].

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = G_{1\,\mathrm{dB}} + G_{2\,\mathrm{dB}} + \cdots + G_{n\,\mathrm{dB}}} \tag{5.14}$$

Analogamente, il guadagno totale in neper é la somma dei singoli guadagni, espressi in neper:

$$\boxed{G_{\mathrm{Np}} = G_{1\,\mathrm{Np}} + G_{2\,\mathrm{Np}} + \cdots + G_{n\,\mathrm{Np}}} \tag{5.15}$$

5.7.8 Unitá logaritmiche rispetto ad un livello di riferimento

Nei precedenti paragrafi, neper e decibel sono stati usati per la misura di rapporti tra grandezze omogenee (potenze, tensioni o correnti), ovvero per la misura di *grandezze relative*. Nelle applicazioni pratiche, risulta assai comodo utilizzarli anche per la rappresentazione di *grandezze assolute*, rispetto ad una grandezza di riferimento. Ció accade soprattutto nella Teoria delle Comunicazioni Elettriche.

Ció é comune soprattutto per le potenze: una potenza assoluta é detta espressa in *decibel per watt*[8] quando se ne calcola il rapporto (in decibel) rispetto ad 1 watt. Analogamente, se si calcola il rapporto (in decibel) di una potenza rispetto ad una potenza di riferimento di un milliwatt, diremo che tale potenza é espressa in *decibel per milliwatt*[9]. Ad esempio, una potenza assoluta di 30 dBW corrisponde ad una potenza di 1000 watt, mentre una potenza assoluta di -10 dBm corrisponde a $0,1$ milliwatt. In modo analogo é possibile definire le potenze in decibel per microwatt, eccetera. Analoghe definizioni possono essere date per potenze espresse in neper; tuttavia questa unitá é raramente utilizzata per indicare potenze assolute (i neper sono assai comodi nelle espressioni analitiche, mentre i decibel, utilizzando il logaritmo in base 10, sono piú utili nei calcoli). La tabella 5.1 riporta i livelli di potenza in dBW ed in dBm per alcuni valori di potenza.

[7] Se $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ si ha infatti

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$$

[8] Abbreviato in dBW

[9] Abbreviato in dBm

Tabella 5.1: Valori di potenza in dBW e dBm

P (watt)	P_{dBW}	P_{dBm}
10^{-6}	-60	-30
10^{-5}	-50	-20
10^{-4}	-40	-10
10^{-3}	-30	0
10^{-2}	-20	10
10^{-1}	-10	20
1	0	30
10	10	40
10^{2}	20	50
10^{3}	30	60

Capitolo 6

Sistemi di controllo automatico a tempo continuo

In preparazione.

Appendice A

Algebra delle matrici

A.1 Definizioni

In questo paragrafo desideriamo presentare, senza alcuna dimostrazione, alcuni importanti proprietá e Teoremi dell'Algebra delle Matrici, rimandando ai testi di Algebra indicati in bibliografia per maggiori approfondimenti

Definizione A.1 *Una matrice con m righe ed n colonne*[1] *é una tabella formata da $n \cdot m$ numeri*[2]*, disposti su m linee orizzontali e da n linee verticali.*

Una matrice viene di solito racchiusa tra due parentesi, ed é convenzionalmente individuata da una lettera maiuscola:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

Gli $m \cdot n$ numeri che compongono la matrice sono detti *elementi* della matrice stessa; ciascuno di essi viene indicato con il simbolo a_{ij}, ove gli indici i e j indicano rispettivamente la riga e la colonna di appartenenza dell'elemento stesso.

Rivestono particolare importanza le matrici di tipo $(n, 1)$, formate da una sola colonna di n elementi:

$$V = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

[1] o matrice *di tipo* (n, m).

[2] reali o complessi

dette anche *matrici colonna* o *vettori colonna*, e le matrici di tipo $(1, m)$, costituite da una sola riga di m elementi:

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

dette anche *matrici riga* o *vettori riga*.

Ecco un esempio di matrice $(2, 3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & \frac{2}{5} \\ \sqrt{2} & 0 & -4 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Particolarmente interessanti sono le matrici il cui numero di righe coincide con il numero di colonne $(n = m)$:

Definizione A.2 *Una matrice quadrata di ordine n é una matrice di tipo* (n, n).

In una matrice di ordine n, gli elementi del tipo $a_{ii}, i = 1, \dots, n$ sono detti *elementi diagonali* della matrice.

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 6 \\ 2 & 0 & 11 \\ 1 & 22 & -9 \end{bmatrix}$$

é una matrice quadrata di ordine 3, i cui elementi diagonali sono $8, 0, -9$.

Se in una matrice quadrata gli elementi non diagonali sono tutti nulli, diremo trattasi di una *matrice diagonale*; ad esempio la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

é una matrice diagonale. Tra le matrici diagonali, segnaliamo le cosiddette *matrici scalari*, in cui tutti gli elementi della diagonale sono uguali tra loro, ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Tra le matrici scalari riveste una importanza fondamentale la *matrice unitá*, in cui gli elementi diagonali sono tutti uguali ad 1, che indicheremo *sempre con la lettera I*:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

A.2 Operazioni sulle matrici

La *somma* e la *differenza* tra due matrici sono possibili se e solo se le matrici possiedono lo stesso numero di righe e di colonne, e si eseguono sommando (o sottraendo) tra di loro gli elementi che occupano la stessa riga e la stessa colonna. Ad esempio, siano:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora la loro somma é data da:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 13 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

mentre la differenza tra le due matrici é:

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

É anche possibile definire la moltiplicazione di una matrice per un numero[3] α semplicemente come la matrice ottenuta moltiplicando ogni elemento per α: ad esempio possiamo moltiplicare la matrice D per 2, ottenento una nuova matrice:

$$E = 2 \cdot D = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -6 & 22 & 0 \end{bmatrix}$$

L'operazione piú delicata riguarda il *prodotto di due matrici*; realizzabile se e solo se il numero di righe della prima matrice coincide con il numero di colonne della seconda matrice, e definito come segue:

[3] detto anche *scalare*

Definizione A.3 *Il prodotto della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e della matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

é una matrice C di tipo (m, p) il cui ogni elemento c_{ij} é definito dalla relazione $c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Chiariamo il tutto con un paio di esempi: siano innanzitutto:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha allora:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 4 + 3\cdot 0 + 5\cdot 1 & (-2)\cdot 7 + 3\cdot 9 + 5\cdot 2 \\ (-1)\cdot 4 + 6\cdot 0 + 2\cdot 1 & (-1)\cdot 7 + 6\cdot 9 + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 23 \\ 2 & 51 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che il prodotto tra matrici viene effettuato calcolando il coefficiente c_{ij} tramite la somma dei prodotti degli elementi della riga di posto i della prima matrice con gli elementi della colonna di posto j della seconda matrice.

Osserviamo che il prodotto tra matrici *non é commutativo*; in generale si ha infatti $A \cdot B \neq B \cdot A$.

É altresí importante notare come il prodotto di una matrice quadrata A per la matrice unitá I sia uguale alla matrice A stessa, ovvero $A \cdot I = I \cdot A = A$.

A.3 Determinante di una matrice quadrata

Iniziamo il presente paragrafo con una definizione, un pó oscura, e che verrá illustrata nel seguito con degli esempi.

Definizione A.4 *Il determinante di una matrice quadrata*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

di ordine n, indicato con $\det(A)$ *é definito come*

$$\det(A) = \sum_{(q_1,q_2,\dots,q_n)} (-1)^q \cdot a_{1q_1} a_{2q_2} \dots a_{nq_n}$$

ove la somma viene effettuata su $n!$ *permutazioni del tipo* $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ *sull'insieme* $(1, 2, \dots, n)$ *e dove* q *é il numero di inversioni della permutazione* $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ *rispetto alla permutazione fondamentale* $(1, 2, \dots, n)$.

Osserviamo che il determinante di una matrice é spesso indicato semplicemente racchiudendo la matrice tra due linee verticali, ovvero:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Per capirci qualcosa in piú, consideriamo l'insieme $S = (1, 2, 3)$. Una permutazione é una operazione di scambio degli elementi di un insieme; ad esempio, scambiando di posto i numeri 2 e 3 otteniamo l'insieme $(1, 3, 2)$. In questo caso abbiamo effettuato una sola inversione. Con un'altra inversione, se scambiamo di posto i numeri 1 e 3, otteniamo l'insieme $(3, 1, 2)$. Di conseguenza, il numero di inversioni per passare da $(1, 2, 3)$ a $(3, 1, 2)$ é due.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Il suo determinante é dato da:

$$\det(A) = a_{1\mathit{1}} a_{2\mathit{2}} - a_{1\mathit{2}} a_{2\mathit{1}}$$

ove sono stati messi in evidenza in corsivo gli indici interessati dalla permutazione.

Per calcolare i determinanti di matrici di ordine superiore a 2, conviene introdurre la nozione di *minore complementare*

Definizione A.5 *Data una matrice quadrata di ordine $n > 1$, il minore complementare $A^{\diamond}_{ij}$ di un suo elemento a_{ij} é il determinante della matrice ottenuta sopprimento la riga di posto i e la colonna di posto j della matrice A.*

Ad esempio, sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Allora si ha $a_{11} = 2$ ed il suo minore complementare $A^{\diamond}_{11}$ é il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

cioé il numero $A^{\diamond}_{11} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 0 = 14$.

Definizione A.6 *Il complemento algebrico A_{ij} dell'elemento a_{ij} di una matrice quadrata é il prodotto del minore complementare dell'elemento stesso per $(-1)^{i+j}$. Cioé:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A^{\diamond}_{ij}$$

Riferendoci ancora alla matrice data dalla A.8 il complemento algebrico dell'elemento $a_{11} = 2$ é il numero $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 14 = 14$.

Con questa definizione, possiamo calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine n riducendoci al calcolo dei determinanti di matrici di ordine $n - 1$, utilizzando a tal scopo il presente

Teorema A.1 *Il determinante di una matrice quadrata di ordine n si ottiene dalla somma dei prodotti degli elementi a_{1j} della prima riga per i rispettivi complementi algebrici A_{ij}.*

Ad esempio, sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Allora si ha:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcolando i determinanti di ordine 2, si ottiene allora:

$$\det(A) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 8$$

Come si puó notare dall'esempio, il calcolo del determinante di una matrice di ordine 3 si riduce al calcolo dei determinanti di matrici di ordine 2. Analoghe considerazioni valgono per matrici di ordine superiore.

A.4 Inversa di una matrice quadrata

Iniziamo questo capitolo con una

Definizione A.7 *La matrice dei complementi algebrici*[4] *della matrice A data dalla A.6 é la matrice:*

$$A^\star = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ad esempio la matrice dei complementi algebrici della A.8 é:

$$A^\star = \begin{bmatrix} 14 & -21 & 7 \\ -5 & 10 & -10 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Data una matrice quadrata A di ordine n, desideriamo sapere sotto quali condizioni é possibile trovare una matrice B dello stesso ordine, tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

La matrice B cosí definita, se esiste, é detta l'*inversa* di A, ed é anche indicata con A^{-1}.

Si ha il seguente, importantissimo Teorema, di cui tralasciamo la dimostrazione:

Teorema A.2 *Una matrice quadrata A di ordine n ammette inversa* A^{-1} *se e solo se*

$$\det(A) \neq 0$$

In questo caso la matrice inversa esiste ed é unica, ed é data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

cioé la si ottiene moltiplicando la matrice dei complementi algebrici di A per $\frac{1}{\det(A)}$.

[4]Si noti il diverso significato degli indici degli elementi della matrice dei complementi algebrici $A^\star$; in essa il primo indice indica la colonna di appartenenza di un complemento algebrico, ed il secondo la sua riga di appartenenza

Sia ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Avendosi $\det(A) = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$ segue che la matrice A *non ammette inversa.*

Sia ora:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

In questo caso si ha $\det(B) = -3 \neq 0$, e quindi possiamo calcolarne l'inversa, determinando la matrice dei complementi algebrici $A^\star$:

$$A^\star = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e poi dividendone ogni termine per $\det(B)$; si ottiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

A.5 Matrice trasposta

Definizione A.8 *Sia A una matrice di tipo (n, m). Possiamo definire la matrice trasposta di A la matrice di tipo (m, n) i cui elementi sono dati dalle relazioni:*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

La matrice trasposta di A si indica di solito con A^T; essa puó essere pensata come la matrice ottenuta scambiando tra loro le righe e le colonne di A.

Sia ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

La sua trasposta é:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ -1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Definizione A.9 *Una matrice quadrata A é detta simmetrica se $A = A^T$; antisimmetrica se $A = -A^T$*

Ad esempio, la matrice unitá I é simmetrica, mentre la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é antisimmetrica.

A.6 Autovalori di una matrice quadrata

Iniziamo il capitolo con la seguente

Definizione A.10 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Il polinomio caratteristico della matrice A é il polinomio $p(\lambda)$ di grado n nella variabile complessa λ definito dalla relazione:*

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A)$$

Chiariamo il tutto con un esempio:
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Determiniamo innanzitutto la matrice $\lambda \cdot I$, ottenuta moltiplicando tutti gli elementi della matrice unitá per il numero λ:

$$\lambda \cdot I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Determiniamo poi la matrice $D = \lambda \cdot I - A$ come differenza delle due matrici:

$$\lambda \cdot I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico é allora il determinante di questa matrice:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot \lambda - (-3) \cdot (-1) = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 3$$

Dato che la matrice A ha ordine $n = 2$, otteniamo un polinomio avente grado pari all'ordine della matrice stessa.

Definizione A.11 *Le radici*[5] *del polinomio caratteristico sono dette autovalori della matrice A*

Per calcolare gli autovalori della matrice A.9 ci basta quindi calcolare le radici del polinomio di secondo grado appena trovato; esse sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

[5] reali o complesse

A.7 Autovalori di una matrice triangolare o diagonale

Definizione A.12 *Una matrice A é detta triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$; triangolare inferiore se $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$.*

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

é di tipo triangolare superiore, mentre la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

é di tipo triangolare inferiore. Entrambi le matrici sono dette di tipo *triangolare*.

Per una matrice di tipi triangolare, o di tipo diagonale, sussiste il seguente:

Teorema A.3 *Gli autovalori di una matrice triangolare o diagonale coincidono con gli elementi presenti sulla sua diagonale principale.*

Ad esempio, la matrice A della A.10 ha autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 11$, mentre la matrice B della A.11 ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$ e $\lambda_3 = 1/3$.

A.8 Matrici triangolari a blocchi

Capita, a volte, di avere a che fare con matrici del tipo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 8 & 9 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Possiamo pensare la matrice M come composta da quattro matrici:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

ove

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

e dove la matrice $M_{12} = \mathbf{0}$ é la *matrice nulla*, ovvero una matrice con tutti gli elementi uguali a zero:

$$M_{12} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osservando la A.12 possiamo renderci conto che la matrice M é composta da quattro matrici, dette *blocchi*, e che si ha $M_{ij} = 0$ per $i < j$. In analogia con la definizione A.12 diremo che la matrice M é di tipo *triangolare a blocchi* (*inferiore*).

Piú precisamente, una matrice a blocchi é una tabella del tipo:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

ove ciascun blocco M_{ij} é una matrice, tale che: il numero di righe di M_{ij} concide con il numero di righe di M_{ik} ed il numero di colonne di M_{ij} coincide con il numero di colonne di M_{kj}.

Ad esempio, la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

puó essere scritta a blocchi:

$$M = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ I & B \end{bmatrix}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

e dove I indica la matrice unitá di ordine 3, e $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla di tipo (1, 2).

Definizione A.13 *Una matrice M é detta triangolare a blocchi se é del tipo:*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

ove le matrici M_{ij} che la compongono soddisfano la relazione

$$M_{ij} = \mathbf{0} \quad \forall i < j \tag{A.15}$$

o la relazione

$$M_{ij} = \mathbf{0} \quad \forall i > j \tag{A.16}$$

Se vale la A.15 diremo inoltre che M é triangolare a blocchi inferiore, mentre se vale la A.16 diremo che M é triangolare a blocchi superiore. Analogamente, una matrice é detta diagonale a blocchi se si ha

$$M_{ij} = \mathbf{0} \quad \forall i \neq j \tag{A.17}$$

Le matrici triangolari a blocchi e quelle diagonali a blocchi possiedono una proprietá assai importante, data dal seguente:

Teorema A.4 *Gli autovalori di una matrice triangolare a blocchi o triangolare a blocchi del tipo A.14 coincidono con gli autovalori delle matrici M_{ii}, $(i = 1, \dots, n)$.*

Calcoliamo, ad esempio, gli autovalori della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice puó essere rappresentata a blocchi:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

con

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

La matrice M é triangolare a blocchi; per il teorema A.4 i suoi autovalori coincidono con quelli delle matrici M_{11} ed M_{22}. Per calcolarli, scriviamo il polinomio caratteristivo di M_{11}:

$$p_1(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - M_{11}) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)$$

Gli autovalori di M_{11} sono le radici del suo polinomio caratteristico, ovvero:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

Notiamo che potevamo calcolare questi due autovalori semplicemente osservando che M_{11} é una matrice triangolare, e che pertanto i suoi autovalori coincidono con gli elementi presenti sulla diagonale principale.

L'ultimo autovalore é la radice del polinomio caratteristico di M_{22}, ovvero del polinomio

$$p_2(\lambda) = \lambda + 1$$

Cioé

$$\lambda_3 = -1$$

Siamo pertanto riusciti a ricavare gli autovalori di M senza dover calcolare le radici del suo polinomio caratteristico (di terzo grado), ma determinando le radici di polinomi caratteristici di grado inferiore.

A.9 Relazione tra traccia, determinante ed autovalori

Per una matrice quadrata, esiste un'importante relazione tra la sua *traccia*, il suo *determinante* ed i suoi autovalori.

Definizione A.14 *La traccia di una matrice A é la somma dei suoi elementi posti sulla diagonale principale.*

La traccia di una matrice A viene indicata con $\mathrm{tr}\,(A)$. La traccia ed il determinante di una matrice sono legati agli autovalori, secondo il seguente

Teorema A.5 *La traccia di una matrice A coincide con la somma dei suoi autovalori. Il determinante con il prodotto dei suoi autovalori.*

Il teorema é utilizzabile con le matrici di ordine 2 per il calcolo degli autovalori senza ricorrere al calcolo delle radici del polinomio caratteristico. Ad esempio, sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Si ha allora:

$$\mathrm{tr}\,(A) = 2 + 6 = 8$$

$$\det(A) = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 7 = -9$$

Per il teorema A.5 si ha allora:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 8$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -9$$

E da questo sistema é possibile ricavare gli autovalori, che sono:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 9$$

Appendice B

Sviluppo in serie di potenze

B.1 Generalitá

Lo sviluppo in serie di potenze, dovuto a Taylor ed a Mc. Laurin, permette di approssimare una funzione continua e derivabile con un polinomio. Maggiore risulta il grado del polinomio, e migliore risulterá l'approssimazione. Piú precisamente, sussiste il seguente

Teorema B.1 (Polinomio di Taylor) *Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo $[a, b]$ con le sue prime $n-1$ derivate, anch'esse continue in $[a, b]$. Supponiamo che esista in (a, b) la derivata n–esima $f^{(n)}(x)$. Fissiamo un punto $x_0 \in (a, b)$, e sia x un arbitrario punto di (a, b). Allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che:*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} + \cdots + (x - x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + (x - x_0)^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{B.1}$$

Per la dimostrazione, vedi ad esempio [3] o [38].

Il termine:

$$R_n = (x - x_0)^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

é detto il *resto di Lagrange* della formula di Taylor.

La B.1 puó essere scritta piú sinteticamente, ricorrendo al simbolo di sommatoria, nel modo seguente:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x - x_0)^k\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + (x - x_0)^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Se $a < 0$ e $b > 0$, e se si sceglie il punto $x_0 = 0$, sussiste il seguente

Corollario B.1 (Polinomio di Mc. Laurin) *Siano $a < 0$ e $b > 0$. Sotto le condizioni del Teorema B.1, esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che:*

$$f(x) = f(0) + (x - x_0)\frac{f^{(1)}(0)}{1!} + (x - x_0)^2\frac{f^{(2)}(0)}{2!} + \cdots + (x - x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + (x - x_0)^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{B.2}$$

B.2 Esempio

Determiniamo il polinomio di Mc. Laurin di quinto grado che approssima la funzione $f(x) = \sin x$ (ovviamente nell'intorno del punto $x_0 = 0$). Una semplice verifica[1] consente di affermare che le condizioni del Teorema B.1 sono soddisfatte in ogni intervallo dell'asse reale. Si tratta pertanto di applicare il Corollario B.1, calcolando il valore della funzione e delle sue derivate sino al quinto ordine nel punto $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= \sin 0 = 0 \\
f^{(1)}(x) &= \cos x & f^{(1)}(0) &= \cos 0 = 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\sin x & f^{(2)}(0) &= -\sin 0 = 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0 \\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori trovati nella B.2 otteniamo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6$$

B.3 Serie numeriche

Introduciamo ora alcune definizioni, che ci serviranno nel prossimo paragrafo.

Definizione B.1 *Una successione é una funzione definita sull'insieme $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dei numeri naturali.*

[1] lasciata al lettore per esercizio

Se f é una successione, e se $f(n) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, indicheremo la successione con il simbolo a_n, oppure con $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

I valori $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono detti i *termini della successione*.

Osserviamo che a volte conviene prendere come insieme di definizione della successione l'insieme dei numeri interi *non negativi* $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \ldots$.

Definizione B.2 *Sia a_n una successione di numeri reali. Si chiama serie l'espressione simbolica:*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{B.3}$$

Con la B.3 viene introdotta una *nuova operazione*, consistente nella somma degli infiniti numeri a_n, che sono detti i *termini della serie*. Per dare un significato a tale operazione, consideriamo la successione S_n, i cui termini sono definiti nel modo seguente:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\cdots$$

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

$$\cdots$$

Il termine S_k é detto la *somma parziale k–esima* della serie B.3.

Se il limite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n \tag{B.4}$$

esiste finito e vale S, ovvero se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, diremo che la serie B.3 é *convergente*; in caso contrario diremo che essa é *non convergente*.

Ad esempio, si dimostra che la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

non é convergente, essendo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

Invece la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

é convergente, e la sua somma vale $S = 2$. Per dettagli, si veda ad esempio [3] oppure [38].

Passiamo ora ad una nuova

Definizione B.3 *Sia a_n una successione di numeri reali, e sia x una variabile reale. Allora l'espressione simbolica:*

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \tag{B.5}$$

é detta serie di potenze (nel campo reale).

La convergenza della serie B.5 dipende generalmente dal valore della variabile x. Piú precisamente, ad ogni serie di potenze é associato un intervallo dell'asse reale $(-a, a)$ tale che la serie converge per ogni $x \in (-a, a)$. In alcuni casi, si ha che la serie converge per ogni x reale.

B.4 Serie di Taylor e di Mc. Laurin

Passiamo ora all'esame del caso in cui la funzione $f(x)$ sia dotata, in un intervallo dell'asse reale, di derivate di tutti gli ordini.

Sia $h > 0$ un numero reale, e sia $f(x)$ una funzione dotata, nell'intervallo $\mathbb{I} = (x_0 - h, x_0 + h)$, delle derivate di tutti gli ordini. Sia inoltre $x \in \mathbb{I}$. Possiamo allora applicare il Teorema B.1, decomponendo il valore $f(x)$ in due termini:

$$\sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$(x - x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$$

Il primo di essi coincide con la somma dei primi n termini della serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Essa é detta la *serie formale di Taylor* associata alla funzione $f(x)$. Se questa serie converge[2] in ogni punto $x \in \mathbb{I}$ al valore $f(x)$, diremo che essa é la *serie di Taylor* della funzione $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{I}$.

Nel caso in cui $x_0 = 0$, parleremo di *sviluppo in serie di Mc. Laurin* della funzione $f(x)$.

[2]Lo studio delle condizioni relative alla convergenza della serie é riservato ai corsi universitari

Si ha allora, in un opportuno intorno di $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{B.6}$$

B.5 Alcuni sviluppi in serie di Mc. Laurin

Riportiamo gli sviluppi in serie di Mc. Laurin delle funzioni piú comuni:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\log(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Appendice C

Tracciamento di semplici grafici con il programma GnuPlot

In questa appendice vogliamo mostrare come utilizzare un programma gratuito, di nome `GnuPlot`, disponibile sotto `LINUX`, per il tracciamento di semplici grafici, supponendo che i dati siano memorizzati in formato testo su un file, in due colonne, nella forma come da esempio:

```
1.000      2.000
2.000      3.145
3.000      2.444
4.000      1.121
5.000      0.221
```

Il programma viene avviato, sotto interfaccia grafica, aprendo una finestra con la console e digitando il comando

```
gnuplot
```

Il grafico viene visualizzato mediante il comando:

```
plot "<nome del file di output>" notitle with lines
```

nel caso in cui si vogliano collegare i punti del grafico con delle linee, mentre se si vogliono visualizzare solo i punti, si puó utilizzare il comando

```
plot "<nome del file di output>" notitle with dots
```

Nel caso in cui si voglia salvare il grafico su un file, ad esempio nel comodo formato `.fig`[1], occorre far precedere al comando `plot` i comandi

[1] Facilmente convertibile nel formato `.eps`, detto `encapsulated postscript` ed utilizzato nella stampa di documenti professionali, utilizzando ad esempio il programma di composizione LaTeX 2_ε .

```
set terminal fig
```

che predispone l'output in formato `.fig`, e

```
set output "<nome del file di output>"
```

Per terminare il programma `GnuPlot`, si utilizza il comando

```
quit
```

Per ulteriori informazioni sul programma, si rimanda al manuale di riferimento citato in bibliografia (vedi [27]).

Appendice D

Elementi di Topologia

D.1 Introduzione

Nella presente Appendice, introduciamo alcuni fondamenti di Topologia, ed illustruiamo introduciamo alcune proprietá dell'insieme di Cantor. Incominciamo innanzitutto ae esaminare alcune proprietá topologiche degli insiemi.

D.2 Spazi metrici

Consideriamo un *insieme* arbitrario X. Gli elementi di X sono detti *punti*.

Definizione D.1 *L'insieme X costituisce uno spazio metrico se, per ogni coppia di elementi $x_1, x_2 \in X$ é possibile associare un numero reale $d(x_1, x_2)$ funzione di x_1 e di x_2 tale che:*

- $d(x_1, x_2) \geq 0$, *e* $\quad d(x_1, x_2) = 0$ *se e solo se* $x_1 = x_2$,
- $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$,
- *Per ogni terna* $x_1, x_2, x_3 \in X$, $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$. *Questa condizione é nota come diseguaglianza triangolare.*

La funzione d é detta distanza tra due punti.

Esempio 1

Consideriamo ad esempio l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, e definiamo la distanza tra due punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ come:

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \tag{D.1}$$

Se si rappresentano i due punti x_1, x_2 sulla retta reale, si verifica immediatamente che la funzione cosí definita soddisfa le condizioni della precedente definizione. In questo caso $d(x_1, x_2)$ coincide con la *lunghezza del segmento* $[x_1, x_2]$. Vedi figura D.1.

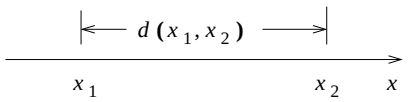

Figura D.1: Funzione distanza sulla retta reale

Esempio 2

Se $X = \mathbb{R}^2$ conicide con il piano cartesiano, é possibile definire la funzione distanza tra due punti arbitrari P $= (x_p, y_p)$ e Q $= (x_q, y_q)$ di X come la lunghezza del segmento PQ:

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

Questa funzione soddisfa le condizioni della definizione D.1. La diseguaglianza triangolare assume ora un significato immediato, come da figura D.2: la somma delle lunghezze di due lati di un triangolo é sempre maggiore della lunghezza del terzo lato, a meno che i tre punti P, Q, R non siano allineati.

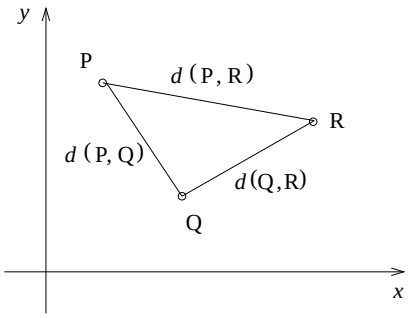

Figura D.2: Significato della diseguaglianza triangolare nel piano

Entrambi le distanze sopra definite sono dette *euclidee*, coincidendo con le ordinarie definizioni di lunghezza di segmenti secondo Euclide.

D.3 Definizioni

Passiamo ora ad ulteriori definizioni relative agli spazi metrici. D'ora in avanti, X indicherá uno spazio metrico, ed Y un sottoinsieme di X, ovvero $Y \subseteq X$.

Definizione D.2 *Sia $x \in X$. Sia inoltre $r > 0$ un numero reale. Possiamo allora definire l'intorno $B_r(x)$ del punto x come l'insieme dei punti di X la cui distanza da x é minore di r, ovvero:*

$$B_r(x) = \{p \in X : d(p, x) < r\}$$

Il numero r é detto il raggio dell'intorno.

L'intorno di un punto $x \in \mathbb{R}$ di raggio r é allora l'intervallo $(x - r, x + r)$, mentre l'intorno di un punto $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^2$ é l'interno della circonferenza di raggio r e con centro in P. Si veda la figura D.3.

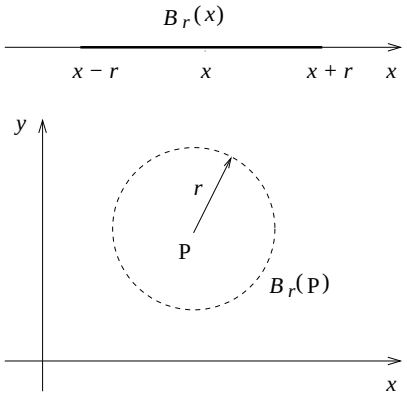

Figura D.3: Intorni di un punto sulla retta reale e nel piano secondo la distanza euclidea.

Definizione D.3 *Sia Y un sottoinsieme di X, ovvero $Y \subseteq X$. Diremo che $x \in X$ é un punto di accumulazione per Y se ogni intorno di x contiene un punto $y \neq x$, tale che $y \in Y$.*

Ad esempio, sia

$$Y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$$

e sia $X = \mathbb{R}$, con la metrica euclidea. Allora il punto $x = 0$ é di accumulazione per Y. Osserviamo che tale punto non appartiene ad Y.

Definizione D.4 *L'insieme Y é chiuso in X se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Un punto $y \in Y$ é interno ad Y se esiste un suo intorno $B_r(y)$, tale che $N_r(y) \subset Y$. L'insieme Y é aperto in X se ogni suo punto é interno.*

Ad esempio, l'insieme $A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ é aperto in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $C = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ é chiuso in $\mathbb{R}$. Gli insiemi

$$D = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$$

e

$$S = (0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$$

non sono né aperti né chiusi in $\mathbb{R}$. Gli insiemi A, C, D, S sono detti *intervalli* di $\mathbb{R}$.

Definendo il complementare Y^C di un insieme Y in X come l'insieme $Y^C = \{x \in X : x \notin Y\} = X \backslash Y$, si dimostra che Y é aperto in X se e solo se Y^C é chiuso in X, e viceversa.

Definizione D.5 *Un insieme Y é perfetto se:*

- *Y é chiuso in X*
- *Ogni $y \in Y$ é un punto di accumulazione di Y*

D.4 L'insieme di Cantor e le sue proprietá

Costruiamo ora un insieme perfetto che non contiene intervalli. Consideriamo l'insieme $Y = [0,1]$, e costruiamo un nuovo insieme Y_1 togliendo da Y l'intervallo aperto $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Si ottiene allora un nuovo insieme:

$$Y_1 = I_1 \cup I_2$$

con

$$I_{11} = [0, \frac{1}{3}], \qquad I_{12} = [\frac{2}{3}, 1]$$

Si elimini ora il terzo centrale da ciascuno di questi intervalli; si ottengono gli intervalli:

$$I_{21} = [0, \frac{1}{9}], \qquad I_{22} = [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$$

$$I_{23} = [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}], \qquad I_{24} = [\frac{8}{9}, 1]$$

Sia:

$$Y_2 = I_{21} \cup I_{22} \cup I_{23} \cup I_{24}$$

Continuando in questo modo, otteniamo una successione (Y_n) di insiemi tali che

$$Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \ldots, \tag{D.2}$$

e tali che Y_n é unione di 2^n intervalli chiusi, ciascuno di lunghezza $(\frac{1}{3})^n$. La figura D.4 mostra la costruzione della successione di insiemi.

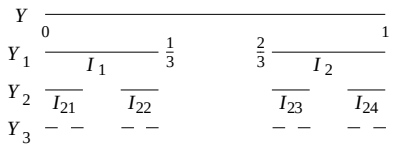

Figura D.4: Costruzione dell'insieme di Cantor

La catena di inclusioni D.2 implica $Y_i \cap Y_{i+1} = Y_{i+1}$. Possiamo allora definire l'insieme

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_i$$

L'insieme K é detto *insieme ternario di Cantor*, o anche *polvere di Cantor*.

Si dimostra (vedi ad esempio [38] che l'insieme di Cantor é perfetto, e che non contiene intervalli.

Questo insieme gode della proprietá di *autosomiglianza*, ovvero ingrandendone una sua piccola parte, si ottiene un insieme con le stesse caratteristiche dell'insieme di partenza.

Il modello della polvere di Cantor puó essere utilizzato nella Teoria dell'Informazione e della Trasmissione per stimare la probabilitá di errore nella trasmissione a distanza di un segnale, in presenza di rumore.

Appendice E

I segnali canonici

E.1 Avvertenza

Come specificato nell'introduzione di queste dispense, la trattazione qui seguita, dovuta a Dirac, è matematicamente imprecisa, e una trattazione corretta può essere effettuata solo mediante la *Teoria delle distribuzioni*, che può essere trattata solo nei corsi universitari di Analisi Funzionale. La trattazione presente è quella sviluppata intorno al 1930 dal fisico Dirac, e si presta bene per applicazioni operative, nonostante le imprecisioni matematiche contenute.

E.2 L'impulso di Dirac

Consideriamo il segnale rappresentato in figura E.1, ovvero:

$$y_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se } -T/2 < t < T/2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{E.1}$$

ove T é un numero reale maggiore di zero.

Questo segnale ha la particolarità di avere *durata limitata*; è infatti nullo al di fuori dell'intervallo $(-T/2, T/2)$. Inoltre l'area compresa tra il segnale e l'asse delle ascisse vale $A = T \cdot (1/T) = 1$.

Se dimezziamo il valore di T, volendo mantenere l'area uguale ad 1, dobbiamo raddoppiare l'altezza del segnale stesso.

Continuando a dimezzare il valore di T, con infiniti passaggi[1] si arriva ad un segnale di durata infinitesima, ed altezza infinita, che conserva tuttavia area pari ad uno. Questo segnale è detto *impulso elementare* o *impulso di*

[1] oppure più semplicemente facendo tendere T a zero

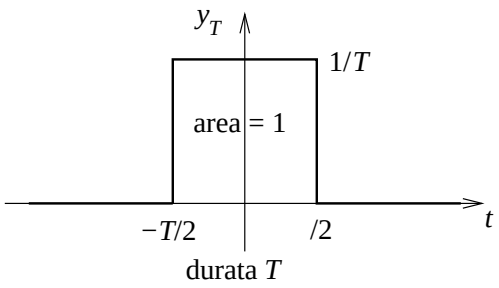

Figura E.1: Funzione impulsiva di area 1

Dirac, o anche *delta di Dirac*, ed è rappresentato con una freccia, come in figura E.2. Il suo simbolo matematico è $y = \delta(t)$.

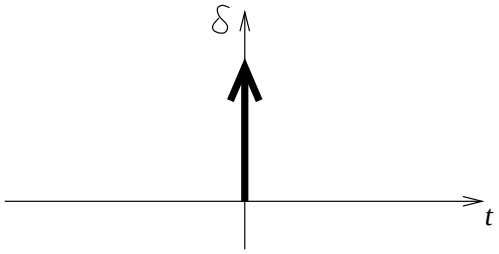

Figura E.2: Rappresentazione della delta di dirac

Notiamo come non esista alcuna *funzione* avente tali caratteristiche (infinito non è un numero), e di conseguenza la trattazione presente in cui la "funzione" $\delta(t)$ viene ottenuta a partire dalla funzione $y_T(t)$ è matematicamente inesatta.

E.3 Lo scalino unitario

La funzione *scalino unitario* (o *gradino unitario*) è definita come:

$$\mathrm{sca}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{E.2}$$

ed è rappresentata in figura E.3.

Ad esempio, essa può rappresentare un generatore di tensione di 1 volt (o di corrente di 1 ampere), che viene acceso all'istante di tempo $t = 0$, e poi lasciato acceso per un tempo infinito.

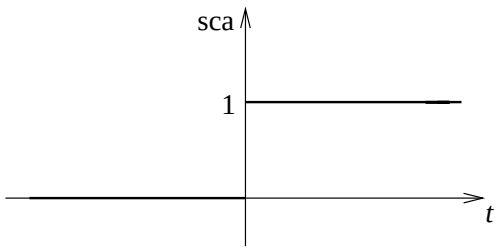

Figura E.3: Scalino unitario

E.4 La rampa unitaria

La *rampa unitaria* è definita come:

$$\mathrm{r}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{E.3}$$

In pratica è costituita da due semirette, la prima coincidente con l'asse negativo delle ascisse, la seconda con la bisettrice del primo quadrante, come rappresentato in figura E.4.

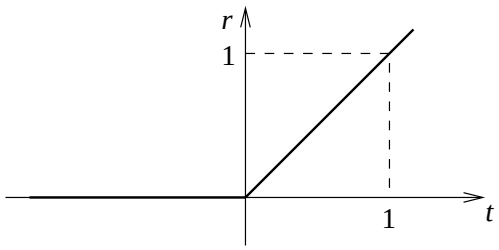

Figura E.4: Rampa unitaria

E.5 Relazione tra i segnali canonici

Se calcoliamo la derivata della funzione rampa unitaria $r(t)$ (che è derivabile per ogni t eccetto $t = 0$), otteniamo:

$$\mathrm{r}'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } t > 0. \end{cases} \tag{E.4}$$

otteniamo cioè la funzione a scalino, se si eccettua il punto $t = 0$ in cui $r'(t)$ non è definita. Di conseguenza, possiamo dire che *lo scalino unitario è la derivata della rampa*, eccetto nel punto $t = 0$.

Per capire la relazione tra lo scalino e la delta di Dirac, conviene innanzitutto considerare una funzione leggermente differente dallo scalino, e precisamente:

$$\mathrm{qsca}_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le T/2, \\ \frac{t}{T} + \frac{1}{2} & \text{se } -T/2 < t < T/2, \\ 1 & \text{se } t \ge T/2. \end{cases} \tag{E.5}$$

ove $T > 0$ è un arbitrario numero reale. Questa funzione è una approssimazione dello scalino, con transizione lineare da 0 ad 1 nell'intervallo $(-T/2, T/2)$, ed è rappresentata in figura E.5.

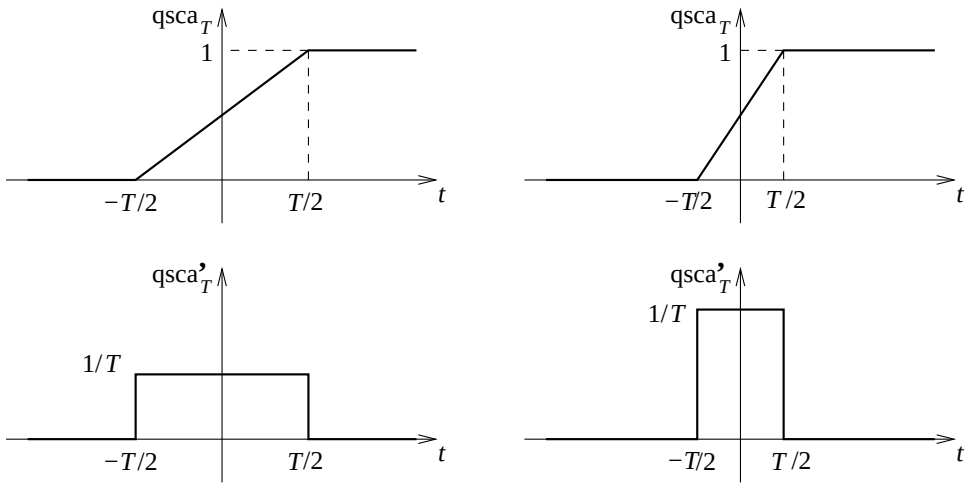

Figura E.5: Scalino modificato e sua derivata per diversi valori di T

Se la deriviamo, e ciò è possibile eccetto nei punti $t = -T/2$ e $t = T/2$, otteniamo la funzione $y_T(t)$ che rappresenta un impulso unitario.

Facendo tendere T a zero, la funzione $\mathrm{qsca}_T(t)$ tende alla funzione scalino, mentre la funzione $y_T(t)$ tende alla delta di Dirac. Per questo motivo, possiamo dire che *la "derivata" della funzione scalino coincide con la delta di Dirac.*

Naturalmente abbiamo usato la parola derivata perchè abbiamo "violentato" la matematica permettendoci di derivare una funzione discontinua, lo scalino, nel suo punto di discontinuità $t = 0$. Questa geniale intuizione, sebbene agli occhi dei matematici faccia veramente ribrezzo, è stata utilizzata da

Dirac con successo per i suoi studi di Fisica Atomica. Un decennio più tardi, i matematici formalizzarono la teoria in modo matematicamente rigoroso.

Appendice F

Le sinusoidi generalizzate

F.1 Introduzione

Prima di addentarci nella definizione e nello studio delle sinusoidi generalizzate, ricordiamo alcune proprietà che legano la funzione esponenziale e^t alle funzioni trigonometriche $\sin t$ e $\cos t$. Indicata con i l'unità immaginaria, si ha:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t \tag{F.1}$$

e ricordando che $\sin(-t) = -\sin t$ e che $\cos(-t) = \cos t$ si ha:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = \cos t - \mathrm{i}\sin t \tag{F.2}$$

Se l'esponente è ax, ove a é un numero reale, le due formule F.1 ed F.2 diventano:

$$\mathrm{e}^{at} = \cos(at) + \mathrm{i}\sin(at)$$

$$\mathrm{e}^{-at} = \cos(at) - \mathrm{i}\sin(at)$$

Che sono riconducibili alle F.1, F.2 per $a = 1$. Sommando e sottraendo membro a membro le ultime due formule, otteniamo:

$$\cos(at) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}}{2} \tag{F.3}$$

$$\sin(at) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}}{2\mathrm{i}} \tag{F.4}$$

In particolare, per $a = 1$ otteniamo:

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \tag{F.5}$$

$$\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} \tag{F.6}$$

F.1.1 Sinusoidi generalizzate

Consideriamo ora un numero complesso $s = \alpha + \mathrm{i}\omega$, com α, β rispettivamente parte reale e parte immaginaria. Sia ora:

$$y(t) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{st}) \tag{F.7}$$

ove Re indica la parte reale della funzione e^{st}. Avendosi:

$$\mathrm{e}^{st} = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t))$$

otteniamo:

$$y(t) = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{st} = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) \tag{F.8}$$

La F.8 è l'equazione che ci permetterà di ottenere, per vari valori reali di α e di ω, le cosiddette *sinusoidi generalizzate*.

Osservazione importante: nel seguito della trattazione relativa alle sinusoidi generalizzate, considereremo nulle tutti i segnali e tutte le funzioni per $t < 0$.

Dobbiamo considerare diversi casi:

1. $\alpha = 0$, $\omega = 0$. In questo caso, la F.8 diventa:

   $$y(t) = 1 \qquad (t \geq 0)$$

   ed essendo nulla per $t < 0$, tale funzione coinciderà con lo scalino unitario.

2. $\alpha \neq 0$, $\omega = 0$. In questo caso, la F.8 risulta un esponenziale crescente per $\alpha > 0$, decrescente per $\alpha < 0$, avendosi:

   $$y(t) = e^{\alpha t}$$

   Se $\alpha < 0$ possiamo definire $\tau = -1/\alpha$ come costante di tempo; infatti per $t \geq 5\tau$ l'esponenziale è praticamente nullo.

3. $\alpha = 0$, $\omega \neq 0$. In questo caso si ha:

$$y(t) = \cos(\omega t) \qquad (t \geq 0)$$

e per $t > 0$ la funzione è un coseno, cioè una sinusoide ordinaria. Notiamo che ω è la *pulsazione* della sinusoide.

4. $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$. In questo caso la F.8 è costituita da un prodotto di un esponenziale e di un coseno. Per $\alpha > 0$ si ha una sinusoide crescente nel tempo, per $\alpha < 0$ una sinusoide decrescente. In quest'ultimo caso, definita la costante di tempo $\tau = -1/\alpha$ si avrà $y(t) \approx 0$ per $t \geq 5\tau$.

Le sinusoidi generalizzate sono rappresentate, caso per caso, in figura F.1. Il loro nome deriva dal fatto che nel caso particolare $\alpha = 0$, $\omega \neq 0$ esse si riconducono ad una sinusoide (un coseno).

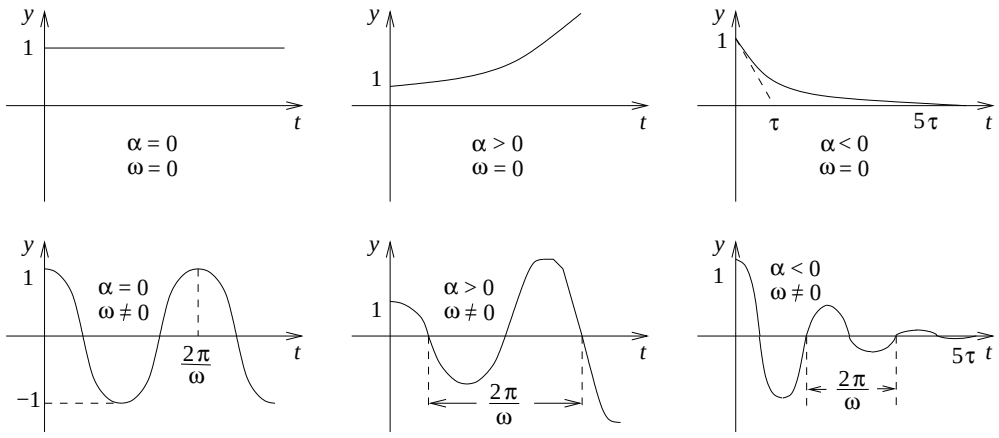

Figura F.1: Sinusoidi generalizzate

Le sinusoidi generalizzate sono utili nello studio dei transitori dei sistemi, come descritto nell'appendice relativa all'antitrasformazione di Laplace.

Notiamo infine che se vogliamo sinusoidi generalizzate del tipo $\sin(\omega t)$, $e^{\pm\alpha t}\sin(\omega t)$ occorre e basta prendere la parte immaginaria di e^{st} anzichè la parte reale.

Appendice G

Dal regime sinusoidale alla funzione di trasferimento

G.1 Introduzione

In questa appendice, verrà illustrata una tecnica per passare dalla descrizione di una rete elettrica lineare *in regime sinusoidale* alla sua *funzione di trasferimento*.

G.2 Studio di una rete elettrica in regime sinusoidale

Consideriamo la rete RC parallelo rappresentata in figura G.1, alimentata da un generatore di corrente sinusoidale di pulsazione ω. Si desidera calcolare la tensione V ai capi del parallelo, a regime.

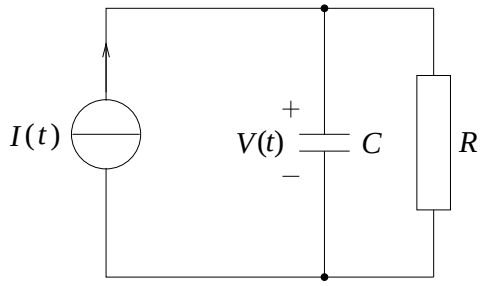

Figura G.1: Rete RC parallelo

Per far ciò, si tratta di calcolare l'ammettenza Y, che risulta pari a:

$$Y = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C = \frac{1 + \mathrm{j}\omega CR}{R}$$

ove, in conformità con i testi di Elettrotecnica, abbiamo indicato con j l'unitá immaginaria. Seguiremo questa convenzione in tutto questo capitolo.

La tensione V risulta pari a:

$$V = \frac{I}{Y} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega CR}$$

Siamo così giunti alla soluzione del problema.

Notiamo infine che il rapporto V/I risulta pari a:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{V}{I} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega CR} \tag{G.1}$$

Esso rappresenta il rapporto tra *l'uscita* V e l'*ingresso* I della rete, e pertanto può essere considerato come la *funzione di trasferimento in regime sinusoidale*.

G.2.1 Funzione di trasferimento della rete

Se determiniamo, a partire dall'equazione esterna la funzione di trasferimento $G(s)$ della rete elettrica di figura G.1, considerando ancora come ingresso il generatore $u(t) = I(t)$ (questa volta non necessariamente sinusoidale) e come uscita la tensione $y(t) = V(t)$ otteniamo:

$$G(s) = \frac{R}{1 + sRC} \tag{G.2}$$

Notiamo che la funzione di trasferimento G.2, calcolata a partire dall'equazione esterna, si differenzia dalla funzione di trasferimento in regime sinusoidale G.1 per il fatto che *compare la variabile complessa* s *al posto di* jw.

Pertanto, per calcolare la funzione di trasferimento di una qualsiasi rete elettrica lineare, *possiamo studiare la rete come in regime sinusoidale, avendo cura di sostituire alla variabile immaginaria* jw *la variabile complessa* $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$.

In altre parole, conviene studiare la rete indicando tutte le impedenze induttive X_l con $X_l = sL$ (e non più come $X_l = \mathrm{j}\omega L$) e le impedenze capacitive con $X_c = \frac{1}{sC}$ (e non più come $X_c = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$).

G.2.2 Esempio

Calcoliamo la funzione di trasferimento della rete RLC parallelo rappresentata in figura G.2. Sia $u(t) = I(t)$ l'ingresso, e sia $y(t) = V(t)$ l'uscita.

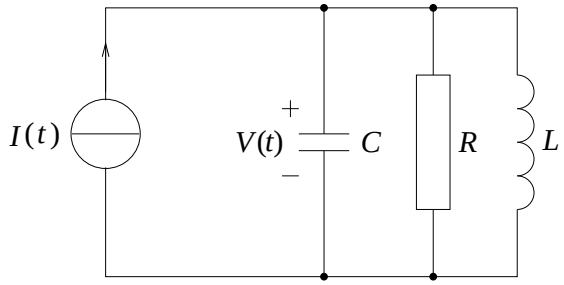

Figura G.2: Rete RLC parallelo

Possiamo calcolare l'ammettenza Y della rete come somma delle ammettenze $Y_l = \frac{1}{sL}$, $Y_c = sC$, e della conduttanza $G = \frac{1}{R}$:

$$Y = \frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R} = \frac{s^2RLC + sL + R}{sLR}$$

La tensione V risulta allora pari a:

$$V = \frac{I}{Y} = I \cdot \frac{sLR}{s^2RLC + sL + R}$$

La funzione di trasferimento $G(s) = y/u = V/I$ risulta allora la seguente:

$$G(s) = \cdot\frac{sLR}{s^2RLC + sL + R} \tag{G.3}$$

G.3 Formalizzazione matematica

Consideriamo un induttore reale. Tensione e corrente sono legate dalla relazione $V = L\dot{I}$. Introducendo l'operatore di derivazione s (vedi 1.9), si ha allora $V = sLI$, da cui possiamo definire l'impedenza generalizzata (cioè secondo il metodo di Laplace) $Z_l = sL$, e scrivere $V = Z_l I$.

In regime sinusoidale, sia $I = I_m \sin(\omega t)$. Derivando rispetto al tempo, si ha: $\dot{I} = I_m \omega \cos(\omega t)$, da cui $V = L\dot{I} = \omega L I_m \cos(\omega t)$. Notiamo allora che il valore di picco V_m di V é $LI_m\omega$, cioè è ωL volte più grande di quello di I. Inoltre la fase di $\dot{I}$ risulta essere in anticipo di $\pi/2$ radianti (90 gradi) rispetto ad I.

Per quanto riguarda la relazione tra i valori di picco, si ha allora $V_m = \omega L I_m$[1], mentre se vogliamo tener conto anche della fase utilizzando la rappresentazione con i numeri complessi, si ha $V_m = \mathrm{j}\omega L I_m$.

Riassumendo, possiamo scrivere $V = sLI$ nella rappresentazione di Laplace, e $V = \mathrm{j}\omega LI$ in regime sinusoidale, ove in quest'ultimo caso V ed I indicano i valori di picco, o quelli efficaci. Da ciò si nota una profonda analogia tra lo studio in regime sinusoidale e quello effettuato con il metodo di Laplace, per segnali di ingresso arbitrari. E ciò giustifica la sostituzione $\mathrm{j}\omega L \leftrightarrow sL$ introdotta nel paragrafo precedente.

Considerando la relazione $I = C\dot{V}$ ai capi di un condensatore reale, e ripetendo le considerazioni precedenti, otteniamo $I = sCV$ con il metodo di Laplace. In regime sinusoidale, posto $V = V_m \sin(\omega t)$ otteniamo $I = \omega C V_m \cos(\omega t)$, da cui otteniamo la relazione (in modulo e fase) tra il valore massimo I_m della corrente e quello V_m della tensione $I_m = \mathrm{j}\omega C V_m$. Ancora una volta, introducendo l'ammettenza capacitiva $Y_c = sC$ con il metodo di Laplace, e $Y_c = \mathrm{j}\omega C$ in regime sinusoidale, possiamo giustificare la sostituzione $\mathrm{j}\omega C \leftrightarrow sC$.

In entrambi i casi, si passa dallo studio in regime sinusoidale a quello con il metodo di Laplace con la sostituzione $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow s$.

Abbiamo messo questa trattazione in appendice perchè la giustificaziore data andrebbe completata con uno studio più approfondito del metodo della trasformata di Laplace, riservato di solito ai corsi universitari.

[1] Analoga relazione vale per i valori efficaci, ottenibili dividendo per $\sqrt{2}$ quelli di picco.

Appendice H

La trasformata di Laplace

In preparazione.

Appendice I

L'antitrasformata di Laplace

I.1 Introduzione

In questa appendice verrà illustrato l'uso dell'antitrasformata di Laplace per lo studio dei transitori dei sistemi lineari a tempo continuo, descritti mediante funzione di trasferimento. Inizieremo a studiare sistemi che si trovano nello stato iniziale nullo, per poi considerare sistemi in uno stato iniziale qualsiasi. Daremo due formule di antitrasformazione; oltre a quella generale, valida sia per poli semplici che con molteplicità maggiore di uno, utilizzaremo una formula semplificata di antitrasformazione, molto comoda in presenza di poli semplici (cioè di molteplicità pari ad uno), caso che si presenta assai frequentemente nella teoria dei sistemi lineari.

I.2 La rappresentazione nel dominio di Laplace dei segnali

Utilizzando la tabella I.1 delle trasformate di Laplace, è possibile associare ai più comuni segnali di ingresso (segnali canonici e sinusoidi generalizzate e loro combinazione lineare) una funzione nella variabile complessa s che li descrive.

Nel caso in cui il segnale desiderato non sia presente in tabella, si può calcolarne la trasformata di Laplace (sempre se esiste) mediante l'integrale di Laplace, illustrato nell'appendice H. Inoltre, se un segnale è moltiplicato per una costante reale a, lo è anche la sua trasformata; ad esempio la trasformata di Laplace di $2\sin 10t$ è $2 \cdot \frac{10}{s^2+10^2} = \frac{20}{s^2+100}$. Sempre per la linearità della trasformata, alla somma dei segnali corrisponde la somma delle trasformate, così ad esempio, se $u(t) = 3\sin(t) + 6\mathrm{sca}(t)$ si ha $U(s) = 3\frac{1}{s^2+1} + 6\frac{1}{s}$.

Tabella I.1: Trasformate di Laplace dei principali segnali di input

Nome	Funzione $u(t)$	Trasformata $u(s)$
Delta di Dirac	$\delta(t)$	1
Scalino unitario	$\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa unitaria	$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Sinusoide	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosinusoide	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Esponenziale decrescente	$\mathrm{e}^{-\alpha t},\ \alpha > 0$	$\frac{1}{s+\alpha}$
Sinusoide generalizzata decrescente	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t),\ \alpha > 0$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
Cosinusoide generalizzata descrescente	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t),\ \alpha > 0$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
Sinusoide crescente linearmente	$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
Cosinusoide crescente linearmente	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
Prodotto di t^{n-1}, $(n \geq 1)$ per un esponenziale	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}$

La cosa più importante è comunque quella di associare ad un segnale la sua trasformata di Laplace. Per i segnali di ingresso più comuni, rappresentati in tabella, essa è sempre un rapporto tra due polinomi nella variabile complessa s.

I.3 Il metodo dell'antitrasformata nel calcolo dei transitori

Iniziamo lo studio dei transitori dietro l'ipotesi che il sistema si trovi inizialmente nello stato nullo (ad esempio, in una rete elettrica, ciò corrisponde ad avere tutti gli induttori e tutti i condensatori scarichi, e tutti i nuclei ferromagnetici smagnetizzati).

Supponiamo inoltre di considerare sistemi ad un solo ingresso ed una sola uscita.

Sia $u(s)$ la trasformata di Laplace dell'ingresso, e sia $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema lineare di cui si desidera studiare il transitorio.

Per la definizione di funzione di trasferimento, l'uscita y del sistema, espressa in funzione della variabile complessa s risulta essere:

$$y(s) = G(s) \cdot u(s)$$

Calcolata la funzione $y(s)$ non resta altro che antitrasformare, operazione assai semplice nel caso in cui i poli di $y(s)$ siano tutti distinti, leggermente più laboriosa se due o più poli coincidono.

Nel prossimo paragrafo, supporremo che i poli di $y(s)$ siano tutti distinti tra loro.

I.3.1 Antitrasformazione con poli di y distinti

La prima fase, consiste nel determinare i poli di $y(s)$ e di fattorizzare il denominatore della funzione stessa. Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gli n poli di y. Scriviamo allora y come:

$$y(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

L'uscita $y(t)$ in funzione del tempo si determina allora con la seguente formula di antitrasformazione:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y(s)(s-p_i)\mathrm{e}^{st}|_{s=p_i} \tag{I.1}$$

Esempio 1

Sia $G(s) = \frac{1}{10s+1}$. Si studi il transitorio della rete quando in ingresso è applicato uno scalino unitario. Si consideri nullo lo stato iniziale.

Soluzione

Dalla tabella delle trasformate, si ricava la trasformata di Laplace dello scalino unitario; si ha $u(s) = 1/s$.

Si calcola poi $y(s)$ come prodotto dell'ingresso $u(s)$ per la funzione di trasferimento $G(s)$, ottenendo:

$$y(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$$

I poli di $y(s)$ sono due, e precisamente: $p_1 = 0$, $p_2 = -0{,}1$. Nella formula I.1, si avrà allora $n = 2$.

Si scrive poi $y(s)$ in modo che il denominatore risulti fattorizzato come $(s-p_1)\cdot(s-p_2)$; osserviamo che il coefficiente di s in ciascun fattore deve essere $+1$. Otteniamo allora:

$$y(s) = \frac{0{,}1}{(s-0)(s-(-0{,}1))}$$

Sostituiamo questa espressione nella I.1; otteniamo allora:

$$y(t) = \frac{0{,}1}{(s-0)(s-(-0{,}1))}(s-0)\mathrm{e}^{st}|_{s=0} + \frac{0{,}1}{(s-0)(s-(-0{,}1))}(s-(-0{,}1))\mathrm{e}^{st}|_{s=-0{,}1}$$

Semplificando i termini a numeratore e a denominatore, e sostituendo al primo termine a secondo membro il valore $s = 0$, ed al secondo termine il valore $s = -0{,}1$ otteniamo:

$$y(t) = \frac{0{,}1}{0-(-0{,}1)}\mathrm{e}^{0t} + \frac{0{,}1}{0{,}1-0)}\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t}$$

che è la soluzione desiderata. Notiamo che la f.d.t. considerata è quella di una rete RC serie alimentata da un generatore di tensione a scalino unitario, con $R = 10\,\Omega$, $C = 1\,\mathrm{F}$ e con uscita y coincidente con la tensione ai capi del condensatore. La soluzione è rappresentata in figura I.1.

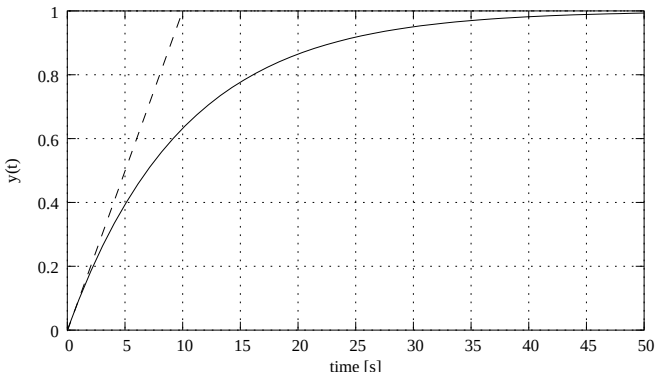

Figura I.1: Risposta allo scalino per una rete RC

Considerando il condensatore inizialmente scarico, abbiamo ricavato il transitorio di carica del condensatore, con costante di tempo $\tau = RC = 10\,\mathrm{secondi}$.

Esercizio 2

Studiare il transitorio di una rete LC parallelo con $L = 1\,\mathrm{H}$ e $C = 0{,}25\,\mathrm{F}$ alimentata da un generatore di corrente I che fornisce in ingresso uno scalino unitario. Si consideri come uscita la tensione V ai capi del parallelo.

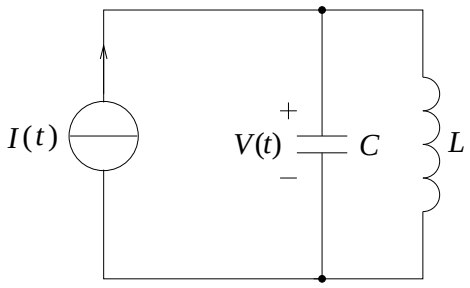

Figura I.2: Rete LC parallelo

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la funzione di trasferimento della rete, con il metodo illustrato nell'appendice G. Calcoliamo innanzitutto l'ammettenza del parallelo. Si ha:

$$Y = sC + \frac{1}{sL} = \frac{s^2LC + 1}{sL}$$

Otteniamo allora:

$$G(s) = \frac{y}{u} = \frac{V}{I} = \frac{1}{Y} = \frac{sL}{s^2LC + 1}$$

Possiamo ora determinare l'uscita $y = V$ nel dominio di Laplace, moltiplicando la funzione di trasferimento per $u(s) = \frac{1}{s}$:

$$y(s) = \frac{L}{s^2LC + 1} = \frac{1}{0{,}25s^2 + 1}$$

I poli di $y(s)$ sono $p_1 = -\mathrm{i}2$ e $p_1 = \mathrm{i}2$. Siamo dunque nel caso di due poli immaginari puri, uguali in modulo e opposti in segno. Possiamo dunque scomporre il denominatore in due termini del tipo $s - p_i$, $i = 1, 2$. Notiamo che il coefficiente di s in ciascun termine deve essere $+1$. Otteniamo allora:

$$y(s) = \frac{4}{(s - \mathrm{i}2)(s + \mathrm{i}2)}$$

Applichiamo la formula di antitrasformazione:

$$y(t) = \frac{4}{(s - \mathrm{i}2)(s + \mathrm{i}2)} \cdot (s - \mathrm{i}2)\mathrm{e}^{st}|_{s=\mathrm{i}2} + \frac{4}{(s - \mathrm{i}2)(s + \mathrm{i}2)} \cdot (s + \mathrm{i}2)\mathrm{e}^{st}|_{s=-\mathrm{i}2}$$

Semplificando e sostituendo i2 (i2) al posto di s nel primo (secondo) addendo a secondo membro otteniamo:

$$y(t) = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} = 2\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$$

+Ricordando la F.6, otteniamo allora:

$$y(t) = 2\sin(2t)$$

Notiamo che la parte immaginaria $\omega = 2$ dei poli determina la pulsazione (2 radianti al secondo) della sinusoide.

I.3.2 Esercizio 3

Studiare il transitorio di una rete RLC serie (figura I.3, con $R = 4\,\Omega$, $C = 1/13\,\mathrm{F}$, $L = 1\,\mathrm{H}$ alimentata da un generatore di tensione ideale che fornisce in ingresso una delta di Dirac. Sia lo stato iniziale nullo (condensatore ed induttore scarichi), e come uscita si consideri la corrente I.

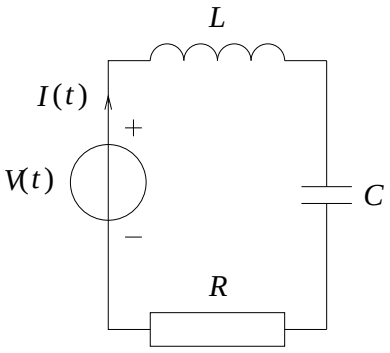

Figura I.3: Rete RLC serie

Soluzione

L'impedenza serie vale $Z = R + sL + \frac{1}{sC}$ e pertanto la funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{sC}{s^2CL + sCR + 1} = \frac{s}{s^2 + 4s + 13}$$

I poli sono $p_1 = -2 - \mathrm{i}3$ e $p_2 = -2 + \mathrm{i}3$. Per la delta di Dirac, si ha $u(s) = 1$, e di conseguenza:

$$y(s) = u(s) \cdot G(s) = G(s) = \frac{s}{(s + 2 - \mathrm{i}3)(s + 2 + \mathrm{i}3)}$$

Applichiamo ora la formula di antitrasformazione:

$$y(t) = \frac{s(s+2+\mathrm{i}3)}{(s+2-\mathrm{i}3)(s+2+\mathrm{i}3)}\mathrm{e}^{st}|_{s=-2-\mathrm{i}3} + \frac{s(s+2-\mathrm{i}3)}{(s+2-\mathrm{i}3)(s+2+\mathrm{i}3)}\mathrm{e}^{st}|_{s=-2+\mathrm{i}3}$$

Semplificando, otteniamo allora:

$$y(t) = \frac{-2-\mathrm{i}3}{-2-\mathrm{i}3+2-\mathrm{i}3}\mathrm{e}^{(-2-\mathrm{i}3)t} + \frac{-2+\mathrm{i}3}{-2+\mathrm{i}3+2+\mathrm{i}3)}\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i}3)t} = \mathrm{e}^{-2t}(\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t))$$

L'uscita $I(t) = y(t)$ è riportata in figura I.4.

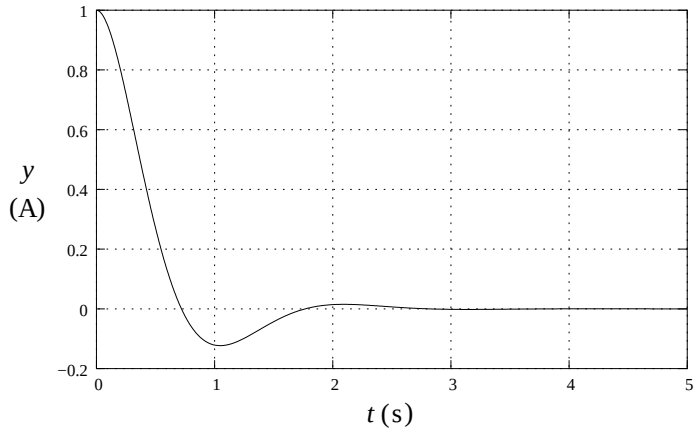

Figura I.4: Transitorio della rete RLC serie

Notiamo ancora come la parte reale dei poli determini la costante di tempo (che vale $\tau = 0{,}5$ secondi) mentre la parte immaginaria determina la pulsazione $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$ della componente sinusoidale.

La presenza dell'elemento resistivo fa in modo che l'energia fornita dal generatore all'instante $t = 0$ venga accumulata nell'induttore e nel condensatore per poi essere dissipata in calore per effetto Joule, fino a quando non ci si ritrova con induttore e condensatore scarichi, corrente nulla ed esaurimento del transitorio. Durante il transitorio, parte dell'energia viene scambiata tra induttore e condensatore (dando così luogo alle oscillazioni); tale oscillazioni risultano essere smorzate dal fatto che un'altra parte dell'energia accumulata viene dissipata sulla resistenza.

I.4 Antitrasformazione nel caso di poli coincidenti

Nel caso in cui due o più poli coincidano, la formula di antitrasformazione risulta più complessa, e consiste nello sviluppare la $Y(s)$ come somma di frazioni, ciascuna avente a denominatore un termine del tipo $(s-p_i)^k$, ove p_i è l'i-esimo polo di molteplicità m_i, e $k = 1, \ldots, m_i$.

I.4.1 Solo un polo ha molteplicità maggiore di uno

Cominciamo nel caso in cui ci sia un solo polo, p_1, con molteplicità $m_1 > 1$, mentre i rimanenti poli $p_2, p_3, \ldots, p_n$ hanno tutti molteplicità uno. Sia cioè:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \tag{I.2}$$

ove $N(s)$ è un polinomio in s. Si tratta di scrivere la $Y(s)$ come somma di frazioni, ciascuna delle quali ha come denominatore un termine del tipo $(s-p_1)^k$, oppure $(s-p_i)$, per $i > 1$:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{A_{11}}{(s-p_1)^{m_1}} + \frac{A_{12}}{(s-p_1)^{m_1-1}} + \cdots + \\ + \frac{A_{1m_1}}{(s-p_1)} + \frac{A_2}{(s-p_2)} + \ldots \frac{A_n}{(s-p_n)} \end{aligned} \tag{I.3}$$

Le costanti (reali se i poli sono reali, ma generalmente complesse) A_{11}, A_{12}, ... ,A_{1m_1}, A_2, ..., A_n si determinano eguagliando la I.2 alla I.3. Ricordando poi (vedi tabella I.1 che la trasformata di Laplace di $\frac{1}{(s-p_i)^k}$ è $\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}\mathrm{e}^{p_i t}$, con $(k \geq 1)$, e con $p_i \neq 0$, otteniamo allora:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{A_{11}}{(m_1-1)!}t^{m_1-1}\mathrm{e}^{p_1 t} + \frac{A_{12}}{(m_1-2)!}t^{m_1-2}\mathrm{e}^{p_1 t} + \cdots + \\ + A_{1m_1}\mathrm{e}^{p_1 t} + A_2\mathrm{e}^{p_2 t} + \cdots + A_n\mathrm{e}^{p_n t} \end{aligned} \tag{I.4}$$

Sia, ad esempio:

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} \tag{I.5}$$

Abbiamo allora un polo $p_1 = -1$ con molteplicità $m_1 = 2$, ed un polo $p_2 = -2$ con molteplicità uno. Scriviamo la I.5 come somma di frazioni parziali:

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{(s+1)^2} + \frac{A_{12}}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} \tag{I.6}$$

Eguagliamo il secondo membro della I.5 al secondo membro della I.6:

$$\frac{s}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A_{11}(s+2) + A_{12}(s+1)(s+2) + A_2(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

Eguagliamo i numeratori, raccogliendo a secondo membro i termini in s^2, in s ed i termini noti:

$$s = (A_{12} + A_2)s^2 + (3A_{12} + A_{11} + 2A_2)s + (2A_{11} + 2A_{12} + A_2)$$

Affinchè sussista l'uguaglianza tra primo e secondo membro, deve risultare:

$$A_{12} + A_2 = 0, \quad 3A_{12} + A_{11} + 2A_2 = 1, \quad 2A_{11} + 2A_{12} + A_2 = 0$$

da cui si ottiene:

$$A_{11} = \frac{1}{3}, \quad A_{12} = -\frac{2}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3}$$

Sostituendo tali valori nella I.6 si ottiene allora:

$$Y(s) = \frac{1}{3(s+1)^2} - \frac{2}{3(s+1)} + \frac{2}{3(s+2)} \tag{I.7}$$

Si ha allora:

$$y(t) = \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \tag{I.8}$$

I.4.2 Più di un polo ha molteplicità maggiore di uno

Supponiamo che la $Y(s)$ possieda più di un polo con molteplicità maggiore di uno, sia cioè:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\dots(s-p_n)^{m_n}} \tag{I.9}$$

Ripetendo per $p_2, \dots p_n$ quanto fatto per p_1 nel precedente paragrafo, otteniamo la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{(s-p_1)^{m_1}} + \frac{A_{12}}{(s-p_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(s-p_1)} + \cdots + \\ + \frac{A_{n1}}{(s-p_n)^{m_n}} + + \frac{A_{n2}}{(s-p_n)^{m_n-1}} + \cdots \frac{A_{nm_1}}{(s-p_n)} \tag{I.10}$$

Eguagliando le due equazioni I.9 e I.10 si ricavano ancora le costanti A_{ij} incognite, e ragionando come nel precedente paragrafo, si ottiene:

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{(m_1-1)!}t^{m_1-1}\mathrm{e}^{p_1 t} + \frac{A_{12}}{(m_1-2)!}t^{m_1-2}\mathrm{e}^{p_1 t} + \cdots + A_{1m_1}\mathrm{e}^{p_1 t} + \cdots + \\ + \frac{A_{n1}}{(m_n-1)!}t^{m_n-1}\mathrm{e}^{p_n t} + \frac{A_{n2}}{(m_n-2)!}t^{m_n-2}\mathrm{e}^{p_n t} + \cdots + A_{nm_1}\mathrm{e}^{p_n t} \tag{I.11}$$

Ad esempio, sia:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

Questa funzione ha 2 poli, $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, entrambi con molteplicità 2. Scriviamo $Y(s)$ come somma di frazioni:

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{s^2} + \frac{A_{12}}{s} + \frac{A_{21}}{(s+1)^2} + \frac{A_{22}}{(s+1)}$$

Eguagliando i due secondi membri, ricaviamo le A_{ij}:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = 1, \quad A_{22} = 2$$

si ha allora:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$$

da cui:

$$y(t) = t - 2\mathrm{e}^{0t} + t\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t} = t - 2 + t\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t}$$

Ricordando che tutti i segnali sono nulli per $t < 0$, constatiamo che il primo termine è una rampa, ed il secondo un gradino di ampiezza -2, e pertanto:

$$y(t) = r(t) - 2\mathrm{sca(t)} + t\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t}$$

La formula generale di antitrasformazione vista nel presente paragrafo va bene anche per poli immaginari puri, o complessi coniugati. Ad esempio, sia:

$$Y(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2}{(s+\mathrm{i})^2(s-\mathrm{i})^2}$$

In questo caso abbiamo due poli, $p_1 = -\mathrm{i}$, e $p_2 = \mathrm{i}$, entrambi con molteplicità 2.

Scriviamo $Y(s)$ come somma di frazioni parziali:

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{(s+\mathrm{i})^2} + \frac{A_{12}}{(s+\mathrm{i})} + \frac{A_{21}}{(s-\mathrm{i})^2} + \frac{A_{22}}{(s-\mathrm{i})}$$

Ricaviamo le costanti A_{ij}, sempre eguagliando i due secondi membri:

$$A_{11} = \frac{1}{4}, \quad A_{12} = \frac{\mathrm{i}}{4}, \quad A_{21} = \frac{1}{4}, \quad A_{22} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

Si ha allora:

$$Y(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{(s+\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{(s+\mathrm{i})} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{(s-\mathrm{i})}$$

Si ottiene allora:

$$y(t) = \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

Raccogliendo i termini, ed utilizzando le F.3 e F.4 otteniamo:

$$y(t) = \frac{t}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

I.4.3 Dimostrazione della formula di antitrasformazione

Nel caso di poli coincidenti, la dimostrazione della formula di antitrasformazione verte sulla seguente proprieta: derivare rispetto alla variabile complessa s una funzione $Y(s)$ equivale a moltiplicare per $-t$ la corrispondente antitrasformata $y(t)$ (Ricordiamo che per sistemi nello stato iniziale nullo, la derivata rispetto al tempo di $y(t)$ corrispondeva ad una moltiplicazione per s della sua trasformata di Laplace; qui la corrispondenza risulta simmetrica, a parte il segno meno). Sia ora:

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} \tag{I.12}$$

La sua antitrasformata è:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-at} \tag{I.13}$$

Derivando la I.12 otteniamo:

$$Y_1(s) = Y'(s) = -\frac{1}{(s+a)^2} \tag{I.14}$$

La sua antitrasformata puó essere ottenuta dalla I.13, moltiplicando quest'ultima per $-t$:

$$y_1(t) = -t\,\mathrm{e}^{-at} \tag{I.15}$$

Pertanto, cambiando di segno la I.15 che la I.14 otteniamo che l'antitrasformata di $\frac{1}{(s+a)^2}$ è $y(t) = t\,\mathrm{e}^{-at}$. Derivando ancora una volta la $Y'(s)$, otteniamo:

$$Y_2(s) = Y''(s) = 2\frac{1}{(s+a)^3}$$

la cui antitrasformata si ottiene moltiplicando la I.15 per $-t$:

$$y_2(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-at}$$

e dividendo sia $Y_2(s)$ che $y_2(t)$ per 2, otteniamo che l'antitrasformata di $\frac{1}{(s+a)^3}$ é $\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-at}$. Proseguendo ancora nella derivazione, possiamo trovare l'antitrasformata di una funzione con più poli coincidenti. Il caso generale è riportato nell'ultima riga della tabella I.1.

I.5 Caso di stato iniziale non nullo

Nel caso in cui si abbia $y(0) \neq 0$, la trasformata di Laplace di $\dot{y}(t)$ non è data dal solo termine $sY(s)$, ma ad esso va aggiunto il termine $-y(0)$, che tiene conto del valore iniziale della variabile $y(t)$. Analoghe formule, si hanno per la derivata seconda, terza, e cosí via, come riportato in tabella I.2.

Tabella I.2: Trasformate di Laplace con valore iniziale di y non nullo

Dominio del tempo $y(t)$	Dominio di Laplace $Y(s)$
$\dot{y}(t)$	$sY(s) - y(0)$
$\ddot{y}(t)$	$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$
$y^{(3)}(t)$	$s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)$
$y^{(n)}(t)$	$s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$

I.5.1 Esempio applicativo

Consideriamo un sistema del primo ordine, ad esempio un circuito costituito da un condensatore C in parallelo ad una resistenza R (figura I.5). Supponiamo che inizialmente il condensatore sia carico alla tensione $V_c(0) = V_0 \neq 0$, e scriviamo l'equazione esterna del sistema (supponiamo nullo l'ingresso, cioè poniamo $u = 0$. Sia $R = 1\,\Omega$, $C = 2\,\mathrm{F}$, $V_c(0) = 5\,\mathrm{V}$.

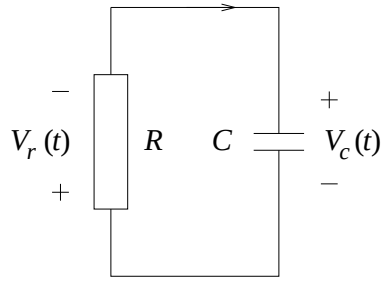

Figura I.5: Rete RC parallelo con stato iniziale non nullo

Si ha:

$$V_c(t) = -V_r(t) \qquad I_c(t) = C\dot{V}_c(t) \qquad V_r(t) = RI(t)$$

Considerando come uscita la tensione ai capi del condensatore ($y(t) = V_c(t)$), si ha la seguente equazione esterna:

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

Applicando la regola vista nel paragrafo precedente, otteniamo allora:

$$RC(sY - y(0)) + Y = 0$$

Sostituendo i valori noti, si ha allora: $2sY - 10 + Y = 0$, da cui:

$$Y(s) = \frac{10}{2s+1} = \frac{5}{s+0{,}5}$$

Antitrasformando, si ottiene allora:

$$y(t) = 5\,\mathrm{e}^{t/2}$$

che è la nota formula di scarica del condensatore, con tensione iniziale di 5 volt e costante di tempo $\tau = 2$ secondi.

I.6 Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali

A titolo di esempio, vogliamo far vedere come il metodo della trasformata di Laplace consenta di risolvere sistemi di equazioni differenziali lineari senza ricorrere all'integrazione. Ricordiamo che una equazione differenziale lineare di ordine n è equivalente ad un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine (basta infatti pensare che da una equazione differenziale di ordine n, un qualsiasi procedimento di realizzazione, ad esempio in forma canonica di controllo, consente di ottenere n equazioni differenziali del primo ordine).

Consideriamo dunque la rete RLC serie di figura I.6, e siano: $R = 2\,\Omega$, $C = 1\,\mathrm{F}$, $L = 1\,\mathrm{H}$. Consideriamo come ingresso la tensione $V(t) = u(t)$, e supponiamo di applicare in ingresso uno scalino, da cui $U(s) = 1$. Vogliamo conoscere l'andamento della tensione $y(t) = V_c(t)$ ai capi del condensatore. Si supponga che lo stato iniziale non sia nullo, cioè indicate con $x_1(t) = I(t)$ e con $x_2(t) = V_c(t)$ le due variabili di stato, sia $x_1(0) = I(0) = 2\,\mathrm{A}$, $x_2(0) = V_c(0) = 5\,\mathrm{V}$.

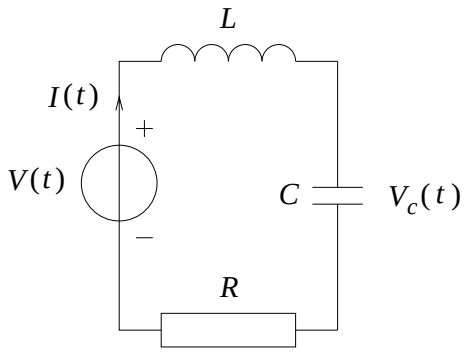

Figura I.6: Rete elettrica RLC serie con stato iniziale non nullo

Scriviamo le equazioni della rete elettrica:

$$I(t) = C\dot{V}_c(t)$$
$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + V_c(t)$$

e da esse ricaviamo le equazioni di stato:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t)$$

e quella di uscita:

$$y(t) = x_2(t)$$

Notiamo come l'uscita $y(t)$ coincida con $x_2(t)$, pertanto nel seguito della trattazione ci ricondurremo al calcolo di $x_2(t)$.

Utilizzando l'operatore di derivazione s, e ricordando che lo stato iniziale è diverso da zero, e che $U(s) = \frac{1}{s}$, possiamo riscrivere le due equazioni di stato come:

$$sX_1 - x_1(0) = -\frac{R}{L}X_1 - \frac{1}{L}X_2 + \frac{1}{sL}$$
$$sX_2 - x_2(0) = \frac{1}{C}X_1$$

Sostituendo i valori di R, L, C e i valori iniziali della corrente e della tensione ai capi del condensatore, otteniamo:

$$sX_1 - 2 = -2X_1 - X_2 + \frac{1}{s}$$
$$sX_2 - 5 = X_1$$

Sostituendo $X_1(s)$ dalla seconda equazione nella prima, e ricavando X_2, si ha:

$$X_2(s) = \frac{5s^2 + 12s + 1}{s(s+1)^2} \tag{I.16}$$

Si tratta dunque di una antitrasformazione con tre poli, di cui due coincidenti ($s = -1$) ed uno con molteplicità singola ($s = 0$). Scrivendo l'espansione in frazioni parziali:

$$X_2(s) = \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{21}}{s+1} + \frac{A_{22}}{(s+1)^2}$$

si ricavano i valori delle costanti:

$$A_{11} = 1, \quad A_{21} = 4, \quad A_{22} = 6$$

e pertanto, si ha:

$$X_2(s) = \frac{1}{s} + 4\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{(s+1)^2}$$

La corrispondente antitrasformata è allora:

$$x_2(t) = \mathrm{sca}(t) + 4\mathrm{e}^{-t} + 6t\mathrm{e}^{-t}$$

Il grafico di $V_c = x_2(t)$ è riportato in figura I.7. Da questo grafico notiamo che, sebbene la costante di tempo dominante sia pari a $\tau = 1\,\mathrm{s}$ (corrisponde ai due poli in -1), la presenza di poli coincidenti non ci permette più di dire che il transitorio si esaurisce dopo circa 5τ, ma occorre un po' più di tempo (circa 8τ). Di conseguenza, in presenza di poli dominanti coincidenti il transitorio puó avere durata leggermente superiore rispetto al caso di poli semplici (questo fenomeno è dovuto alla presenza del termine te^{-t}, che si esaurisce in un tempo piú lungo rispetto ad e^{-t}; ove il primo termine si ha solo con poli coincidenti); la costante di tempo dominante fornisce comunque un ordine di grandezza della durata del transitorio.

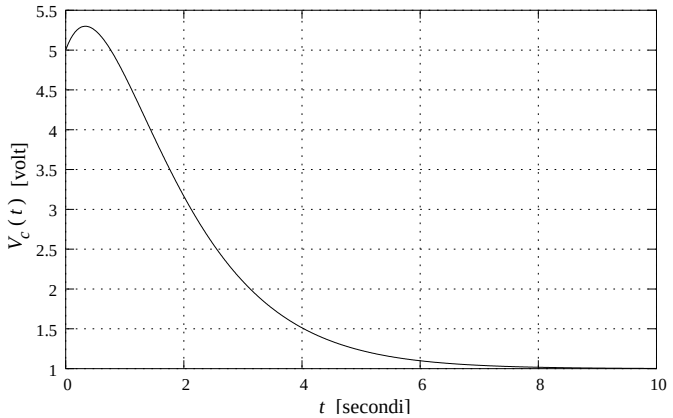

Figura I.7: Grafico della tensione sul condensatore in funzione del tempo

I.7 I teoremi del valore iniziale e finale

Nel caso in cui occorra conoscere solo il valore iniziale (cioè per $t = 0$) e finale (cioè per $t \to +\infty$) di $y(t)$, senza voler antitrasformare la funzione $Y(s)$, è possibile applicare i seguenti teoremi:

Teorema I.1 (Teorema del valore iniziale e finale) *Data una funzione $Y(s)$, si ha:*

$$y(0) = \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to+\infty} sY(s)$$

$$y(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Nel caso in cui $y(t)$ non abbia limite, il valore di $y(t)$ per $t \to +\infty$ deve essere inteso come valor medio calcolato a transitorio esaurito (cioè a regime).

Consideriamo, come esempio, la funzione:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

, la cui antitrasformata è $y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. Se non vogliamo antitrasformate, possiamo ottenere i valori iniziale e finale applicando il teorema:

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s+1} = 0$$

$$y(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

Notiamo come il calcolo del valore finale dia come risultato il valor medio nel caso in cui il limite per $t \to +\infty$ non esista. Sia ad esempio:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

la cui antitrasformata è:

$$y(t) = \sin t$$

Se applichiamo il teorema del valore finale, otteniamo:

$$y(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$$

che è proprio il valor medio della funzione seno. Il teorema del valore finale non si applica dunque in presenza di poli di $Y(s)$ aventi parte immaginaria diversa da zero e parte reale maggiore o uguale a zero (cioè nel caso di sinusoidi, o sinusoidi crescenti esponenzialmente).

Infine, applichiamo il teorema del valore iniziale e del valore finale alla funzione $X_2(s)$ riportata in I.16. Si ha:

$$x_2(0) = \lim_{s\to+\infty} s \cdot \frac{5s^2+12s+1}{s(s+1)^2} = 5$$

che è proprio il valore iniziale della tensione sul condensatore (vedi figura I.7). Analogamente, a transitorio esaurito, si ha:

$$x_2(+\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{5s^2+12s+1}{s(s+1)^2} = 1$$

che coincide con la tensione del generatore (uno scalino).

Bibliografia

[1] M. Alonso, E. J. Finn. *Elementi di Fisica per l'Universitá – Volume secondo, Campi ed Onde*, Masson Italia Editori S.p.A., Milano, (1983).

[2] L. Alsedá, J. Llibre, M. Misiurewicz. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, World Scientific, Singapore, (1993).

[3] L. Amerio. *Analisi Matematica, con Elementi di Analisi Funzionale – volume primo*, U.T.E.T., Torino, (1977).

[4] L. Amerio. *Analisi Matematica, con Elementi di Analisi Funzionale – volume secondo*, U.T.E.T., Torino, (1983).

[5] L. Amerio. *Analisi Matematica, con Elementi di Analisi Funzionale – volume terzo, parte prima*, U.T.E.T., Torino, (1986).

[6] L. Amerio. *Analisi Matematica, con Elementi di Analisi Funzionale – volume terzo, parte seconda*, U.T.E.T., Torino, (1982).

[7] V. I. Arnold. *Equazioni Differenziali Ordinarie*, Edizioni MIR, Mosca, (1979).

[8] V. I. Arnold. *Metodi Geometrici della Teoria delle Equazioni Differenziali Ordinarie*, Editori Riuniti, Roma, (1989).

[9] V. I. Arnold. *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, (1995).

[10] S. Bittanti, N. Schiavoni. *Modellistica e Controllo – Volume Primo*, CittáStudiEdizioni, Milano, (1998).

[11] S. Bittanti, N. Schiavoni. *Modellistica e Controllo – Volume Secondo*, CittáStudiEdizioni, Milano, (1998).

[12] L. S. Block, W. A. Coppel. *Dynamics in One Dimension*, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[13] F. Carassa. *Comunicazioni Elettriche*, Bollati Boringhieri, Torino, (1989).

[14] P. Colaneri. *Controllo Digitale*, Appunti del corso tenuto presso il Politecnico di Milano, Milano, (2000).

[15] P. Collet, J.-P. Eckman. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhauser, Boston, (1980).

[16] M. Crivellini, A. E. Müller. *Controlli Automatici – Esercizi*, Clup, Milano, (1977).

[17] M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj. *Lezioni di Algebra*, Liguori Editore, Napoli, (1994).

[18] G. Dacquino. *Controlli Automatici*, Clup, Milano, (1981).

[19] J. J. D'Azzo, C. H. Houpis. *Feedback Control System – Analysis & Synthesis*, McGraw–Hill, Singapore, (1985).

[20] C. A. Desoer, E. S. Kuh. *Fondamenti di Teoria dei Circuiti*, Franco Angeli, Milano, (1984).

[21] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Sustems – Second Edition*, Addyson-Wesley, Reading, Massachusetts, (1989).

[22] K. Falconer. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and Sons Inc., Chichester, (1990).

[23] B. Finzi. *Meccanica Razionale – volume primo*, Zanichelli, Bologna, (1984).

[24] B. Finzi. *Meccanica Razionale – volume secondo*, Zanichelli, Bologna, (1984).

[25] U. Gasapina. *Algebra delle Matrici*, Masson Italia Editori, Milano, (1984).

[26] E. Gatti, P. F. Manfredi, A. Rimini. *Elementi di Teoria delle Reti Lineari*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, (1983).

[27] `gnuplot`. *An Interactive Plotting Program*, `info-gnuplot@dartmouth.edu`, (1998)

[28] G. Guardabassi. *Elementi di Controllo Digitale*, Clup, Milano, (1988).

[29] L. D. Landau, E. M. Lifšits. *Fisica Teorica 1 – Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, (1982).

[30] Leonardo da Pisa (Fibonacci). *Liber Abaci*, (1202). In: B. Buoncompagni, *Bollettimo di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, Roma, (1868–1887), 20 volumi.

[31] T.-Y. Li, J. Yorke. *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), pagg. 985–992.

[32] S. Rinaldi. *Teoria dei Sistemi*, Clup, Milano, (1981).

[33] B. B. Mandelbrot. *Gli Oggetti Frattali, Forma, Caso e Dimensione*, Giulio Einaudi Editore, Torino, (1987).

[34] R. M. May. *Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos*, J. Theor. Biol., vol. 5, (1975), pagg. 511-524.

[35] S. Rinaldi. *Teoria dei Sistemi – Esercizi*, CittáStudiEdizioni, Milano, (1995).

[36] S. Rinaldi, L. Farina. *I Sistemi Lineari Positivi*, CittáStudiEdizioni, Milano, (1995).

[37] S. Rinaldi, C. Piccardi. *I Sistemi Lineari – Teoria, Modelli, Applicazioni*, CittáStudiEdizioni, Milano, (1997).

[38] W. Rudin. *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill Libri Italia, Milano, (1991).

[39] A. Šapiro. *Modelli Matematici della Competizione*, Regolazione ed Informazione, DVNTs AN SSSR, vyp. 10, Vladivostok, (in Russo), (1974), pagg. 5–75.

[40] E. Sernesi. *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, (1994).

[41] G. Targonski. *Topics in Iteration Theory*, Vandenhoeck and Ruprecht in Göttingen und Zürich, Göttingen, (1981).

[42] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, (1996).